АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1 - 5314

№ 1—6 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

QA
1
A373
1958
Cyo. 1-6

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1—859

*

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 1 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 3
Основания математики и математическая логика 5
Теория чисел 9
Алгебра 15
Многочлены и линейная алгебра 15
Группы 18
Поля, кольца и структуры 23
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 28
Теория функций действительного переменного 33
Теория множеств 37
Приближение функций полиномами и их обобщениями 38
Теория функций комплексного переменного 41
Дифференциальные уравнения 52
Обыкновенные дифференциальные уравнения 52
Уравнения в частных производных . . . 58
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . —
Интегральные уравнения 82
Приложения интегральных уравнений —
Вариационное исчисление 84
Анализ (другие вопросы) 85
Числовые ряды 90
Специальные функции 92
Интегральные преобразования и операционное исчисление 93
Приложения общих методов математического анализа 95
Функциональный анализ 96
Теория вероятностей 106
Математическая статистика 111
Теория игр и математическая экономика 117
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 118
Геометрия 121
Приложения геометрии 122
Элементарная геометрия 123
Проективная и начертательная геометрия 124
Алгебраическая геометрия 125
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 127
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 129
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 135
Метрические методы в геометрии . . . 137
Геометрия выпуклых многообразий . . . 138
Численные и графические методы 140
Таблицы 150
Вычислительные машины и математические приборы 151
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . —
Авторский указатель 165

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

REFERATIVNYI ZHURNAL MATHEMATIKA

EDITOR *S. M. Nikolsky*

EDITORIAL BOARD: *P. S. Alexandrov, S. P. Finikov, A. N. Kolmogorov, Yu. V. Linnik, A. I. Marcushevich, M. A. Naimark, V. V. Nemycky, S. M. Nikolsky, P. S. Novikov, D. Yu. Panov, K. A. Rybnikov, N. V. Smirnov, N. Vekua*

EXECUTIVE SECRETARY *A. A. Konjushkov*

CONTENTS

General
- History. Biography

Foundations. Mathematical logic

Theory of numbers

Algebra
- Polynomials, linear algebra
- Groups
- Fields, rings, lattices
- Algebraic theory of communication and control circuits

Topology

Theory of functions of real variables
- Theory of sets
- Approximations of functions by polynomials and by their generalizations

Theory of functions of complex variables

Differential equations
- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Applications to physics, technology and natural sciences

Integral equations
- Applications of integral equations

Calculus of variations

Analysis (other aspects)
- Numerical series
- Special functions
- Integral transforms, operational calculus
- Applications of general method of mathematical analysis

Functional analysis

Theory of probability
- Mathematical statistics
- Theory of games, mathematical economics
- Applications of probabilities and statistical methods

Geometry
- Applications of geometry
- Elementary geometry
- Projective and descriptive geometry
- Algebraic geometry
- Differential geometry of 3-dimensional space
- Geometry of n-dimensional space. Theory of relativity
- Global theory of differential geometry
- Metric methods in geometry
- Geometry of convex manifolds

Numerical and graphical methods
- Tables

Computers and mathematical devices
- Applications of computer devices

Author index

Editorial Office: Moscow, D-219, Baltijsky poselok, 42-B

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1 - 5314

№ 1—6 1958
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 1—859 **№ 1** **Январь 1958 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

1. **Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства. Заключительное слово. Несмеянов А. Н.** В сб.: Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Пленарн. заседания. М., АН СССР, 1957, 262—271

2. **В Отделении физико-математических наук.** Вестн. АН СССР, 1957, № 3, 19—24

Информация об общем собрании Отделения физ.-матем. наук АН СССР, состоявшемся 15—16 января 1957. Был заслушан отчетный доклад акад. М. А. Лаврентьева и научные доклады. Л. С. Понтрягин сделал доклад о математической теории оптимальных процессов применительно к проблемам автоматического регулирования.

3. **Международный математический конгресс в 1958 г. в Эдинбурге** (Congrès international des mathématiciens Edimbourg 1958), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 59 (франц.)

Конгресс состоится 14—21 августа 1958 г. Намечена работа 8 секций: логики и оснований математики; алгебры и теории чисел; анализа; топологии; геометрии; теории вероятностей и статистики; прикладной математики, математической физики и численного анализа; истории и преподавания математики.

4. **Заседания Московского математического общества.** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 211—233

Сообщается о заседаниях Московского математического общества за период 11 сент.—11 дек. 1956 г. и о прочитанных докладах:

18 сентября 1956 г. В. П. Коровин, Расслоение многообразий в проективном пространстве. С. Б. Стечкин, О приближении абстрактных функций. А. В. Ефимов, Оценка модуля непрерывности периодически квазигладких функций.

25 сентября 1956 г. Е. В. Вороновская, Полиномы Чебышева, Золотарева и Ахиезера как решения задачи функционального анализа. Ф. А. Березин, Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и их применение в теории представлений.

16 октября 1956 г. А. А. Мучник, Отрицательное решение проблемы сводимости Поста.

23 октября 1956 г. М. Р. Шура-Бура, Вопросы программирования на автоматических вычислительных машинах.

30 октября 1956 г. М. К. Фаге, Операторно-аналитические функции одной независимой переменной. Л. В. Быков, О задаче Коши для одного класса операторных дифференциальных уравнений.

20 ноября 1956 г. С. Л. Соболев, Корректная [illegible]ая задача для уравнения колебания струны с заданием на всем контуре. В. Н. Масленникова, Построение в явном виде решения задачи Коши для общей системы уравнений с частными производными первого порядка.

27 ноября 1956 г. А. С. Шварц, Гомологии пространств замкнутых кривых. К. В. Темко, Выпуклая емкость и ряды Фурье.

4 декабря 1956 г. М. А. Лаврентьев, Принципы работы кумулятивного заряда.

11 декабря 1956 г. А. Г. Витушкин, Некоторые оценки из теории табулирования. А. В. Ефимов, О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера.

Президентом Общества вновь избран академик П. С. Александров.

13 и 15 ноября 1956 г. собрание Общества обсуждало новые учебники по математике для средней школы.

5. **Собрание отдела физико-математических наук Академии наук УССР** (Збори Відділу Фізико-математичних наук Академії наук УРСР), Вісник АН УРСР, 1957, № 6, 61 (укр.)

6. **Основные итоги научной деятельности учреждений Академии наук УССР за 1956 г. и задачи на 1957 г. Семененко** (Основні підсумки наукової діяльності установ Академії наук УРСР за 1956 р., та завданне на 1957 р. Семененко М. П.), Вісник АН УРСР, 1957, № 5, 5—26 (укр.)

7. **Первая математическая конференция Таджикской ССР. Турсунов А.,** Матем. в школе, 1957, № 3, 95

Конференция происходила 28—30 марта 1957 г. Обсуждались вопросы координации научных исследований, преподавания математики в высших учебных заведениях и школах, создания учебников и пособий на таджикском языке и др. Образовано республиканское математическое общество и принят его устав.

К. А. Рыбников

8. **Об организации Вычислительного центра при Ленинградском отделении Математического института,** Вестн. АН СССР, 1957, № 5, 93

Создаваемый центр будет состоять из лабораторий: эксплуатации вычислительных машин, экспериментальной, подготовки задачи и программирования. Центр будет входить в систему учреждений Академии наук СССР.

К. А. Рыбников

9. **Сессия болгарских математиков (София, 10—14 октября 1956 г.). Бицадзе А. В., Постников А. Г.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 246

10. **Четвертый съезд румынских математиков (Бухарест, 27 мая—4 июня 1956 г.). Стечкин С. Б.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 244—245

См. также РЖМат, 1957, 5268, 5269, 6767, 7560.

11. **Конгресс румынских математиков. Векуа** (Congresul matematicienilor romîni. Vekua I. N.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1957, 11, № 2, 112—113 (рум.)

Перевод из Вестн. АН СССР, 1956, № 11 (РЖМат, 1957, 5269).

12. Результаты научной работы в области физико-математических наук. Новак (Výsledky vědecké práce z oborů matematických a fysikálních. Novák Josef), Věst. ČSAV, 1957, 66, № 1—2, 19—22 (чешск.)

Доклад председателя Секции на общем собрании Чехословацкой Академии наук о работе Секции за 1956 г. Математический институт, насчитывающий 19 научных сотрудников, опубликовал 42 работы. Институт занимался изучением напряжений в бетонной плотине при затвердевании бетона; значительные результаты достигнуты также в теории вероятностей и в теории устойчивости. Институт математических машин заканчивал конструкцию вычислительной машины SAPO и занимался также теоретическими проблемами. Остальная часть доклада посвящена работе входящих в Секцию институтов: астрономического, физического, технической физики, геофизического и оптической лаборатории. Э. Я. Кольман

13. IX пленум Союза обществ математиков и физиков ФНРЮ. Вернич (IX, Plenum Saveza društava matematičara i fizičara FNRJ. Vernić Elza), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, 10, № 4, 298—299 (сербо-хорв.)

20—21 октября 1955 г. в Сараеве состоялся IX пленум Союза обществ математиков и физиков Югославии, объединяющего республиканские общества физиков и математиков. Пленум рассматривал вопросы: организация научной работы и связи с зарубежными учеными, преподавание математики и физики в высшей и средней школах страны, издание математической и физической литературы. После пленума 21—22 октября было проведено совещание о некоторых вопросах элементарной математики (основы аксиоматики, аксиоматика геометрии, аксиоматика алгебры, связи между основными понятиями арифметики и геометрии) и преподавания математики в средней школе. Б. А. Розенфельд

14. Международный летний математический центр в Италии. Чех (Mezinárodní letní matematické centrum v Italii, Čech E.), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 1, 129—130 (чешск.)

Начиная с 1954 г. Итальянский математический союз организует десятидневные лекционные циклы по различным областям математики, на которые приглашаются как итальянские, так и зарубежные ученые. В 1954 г. были проведены 3 цикла — по аналитическим функционалам и нормированным кольцам (Америо, Фантапье, Лорх, Пеллегрино — 9—18 июня в Варезе на оз. Комо), по квадратуре поверхностей и родственным вопросам (Каччополи, Чезари, Панк — 15—25 августа там же), по нелинейным дифференциальным уравнениям (Граффи, Массера, Сансоне, Вазов — 15—24 сентября там же). В 1955 г. были проведены 5 циклов — по теореме Римана—Роха и родственным вопросам (Хирцебрух, Севери, Ван-дер-Варден — 29 июня—8 июля в Варезе), по аналитической теории чисел (Давенпорт, Главка, Морделл, Риччи — 16—25 августа там же), по топологии (Куратовский, Скорца-Драгони, Шпернер — 26 августа—4 сентября там же), по новым результатам в теории упругости и теории крыла (Финци, Синьорини, Дюнген ван-дер-Варден — 20—29 сентября в Венеции), по проективно-дифференциальной геометрии (Бомпьяни, Сегре, Чех — 26 сентября—5 октября в Павии). Приводятся названия лекций автора, прочитанных им на последнем лекционном цикле.

Б. А. Розенфельд

15. Октябрьское собрание в Кембридже. Шейфер (The October meeting in Cambridge. Schafer R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 1, 1—21 (англ.)

Сообщение о 527-м собрании Американского математического общества 27 октября 1956 г. совместно с Обществом промышленной и прикладной математики. Тезисы 69 представленных докладов.

16. Ноябрьское собрание в Пасадене. Кли (The November meeting in Pasadena. Klee V. L., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 1, 22—28 (англ.)

Сообщение о 528-м собрании Американского математического общества 17 ноября 1956 г. в Пасадене (Калифорния). Тезисы 18 представленных докладов.

17. Ноябрьское собрание в Ивенстоне. Янгс (The November meeting in Evanston. Youngs J. W. T.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 1, 29—38 (англ.)

Сообщение о 529-м собрании Американского математического общества в Ивенстоне (штат Иллинойс) 23 ноября 1956 г. Тезисы 35 представленных докладов.

18. Ноябрьское собрание в Лексингтоне. Робертс (The November meeting in Lexington. Roberts J. H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 1, 39—45 (англ.)

Сообщение о 530-м собрании Американского математического общества 30 ноября—1 декабря 1956 г. в Лексингтоне, в Кентуккийском университете. Тезисы 24 представленных докладов.

19. Годичное собрание в Рочестере. Шейфер (The annual meeting in Rochester. Schafer R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 2, 83—150 (англ.)

Отчет о годичном собрании Американского математического общества 27—29 декабря 1956 г. с участием Математической ассоциации Америки и Ассоциации математической логики. Освещаются оргвопросы; приводятся тезисы 202 представленных докладов.

20. О задаче философии математики. Хейтинг (Sur la tâche de la philosophie des mathématiques. Heyting A.), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 193—198 (франц.)

21. Платонова точка зрения в математике. Финслер (Der platonische Standpunkt in der Mathematik. Finsler P.), Dialectica, 1956, 10, № 3, 250—255 (нем.)

22. Обзор литературы по вопросам преподавания математики, вышедшей в 1955 году. Шустеф Ф. М., Матем. в школе, 1957, № 3, 83—92

23. Новая учебно-педагогическая литература. Второе полугодие 1956 г. Невский В. А., Матем. в школе, 1957, № 4, 90—92

24. Школьная математика и недостаток специалистов. Паррии (Junior high school mathematics and the manpower shortage. Parrish Clyde E.), Math. Teacher, 1956, 49, № 8, 611—616 (англ.)

Констатируется недостаток в США работников научных и технических специальностей. Указывается, что он является результатом недостаточной работы средней школы, в частности отсутствия надлежащей направленности преподавания математики. Автор требует, чтобы школа не только заботилась об усвоении вычислительной техники, но и давала учащимся понимание роли математики в культуре человечества. Автор критикует состояние подготовки учителей математики в США.

И. Я. Депман

25. Вопросы преподавания высшей математики в высшем учебном заведении. Чоранеску (Problema predării matematicilor superioare în învățămîntul superior. Ciorănescu N.), Gaz. mat. și fiz., 1956, A8, № 11, 586—589 (рум.)

В статье говорится о преподавании высшей математики в технических высших учебных заведениях Румынии. Автор предлагает при изучении математического

анализа уделять больше внимания практическим занятиям. Он считает также, что в программе по математике мало уделяется внимания алгебре.

В отношении аналитической геометрии высказывается мнение, что векторное изложение менее доступно студентам 1-го курса, нежели координатное. Со второго курса автор считает необходимым вводить специальные математические курсы, в зависимости от профиля факультета. А. Н. Гливич

26. **Координация физики и математики. Контур, Бертран, Клавье, Моро-Тозен** (Coordination physique-mathématiques. Contour, Bertran, Clavier, Moreau-Tauzin), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1955, 34, № 170, 24—33 (франц.)

Доклад группы преподавателей математики Международному центру педагогических исследований в Севре. Содержит конкретные предложения о распределении отдельных вопросов программ математики и физики по классам французской средней школы в целях координации преподавания обоих предметов.

И. Я. Депман

27. **В секторе методики преподавания математики Института методов обучения Академии педагогических наук. Никитин Н. Н.**, Матем. в школе, 1957, № 3, 94—95

Информация о совещании 30 октября 1956 г. с широким представительством математической общественности. Обсуждался доклад В. И. Левина «Подготовка учителей математики в педагогических институтах в связи с проблемой повышения успеваемости и осуществления политехнического обучения в школе».

К. А. Рыбников

28. **Изменение программ для классов, подготовляющих к баккалаврским экзаменам. Робер** (Les modifications de programmes dans les classes préparant au baccalauréat. Robert P.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1957, 36, № 183, 188—192 (франц.)

29. **О модернизации учебных программ в средней школе. Хаймович** (Despre modernizarea programelor de învățămînt mediu. Haimovici Adolf), Gaz. mat. și fiz., 1956, A8, № 12, 645—652 (рум.)

Доклад на межобластном совещании преподавателей математики в Яссах по вопросам политехнизации обучения. Докладчик приходит к выводу, что программу по математике в средней школе необходимо постепенно менять, вводя новые понятия и разделы, ближе стоящие к современным математическим дисциплинам.

А. Н. Гливич

30. **О преподавании математики в средней школе Польской Народной Республики. Гутковский Ф.**, Матем. в школе, 1957, № 3, 71—74

31. **К вопросу о планировании учебного материала по математике** (Cu privire la planificarea materiei la matematică), Gaz. mat. și fiz., 1957, A9, № 4, 200—205 (рум.)

32. **Конкурсные задания по математике и решения ранее опубликованных задач** (Rozstrzygnięcie konkursu specjalnego z zeszytu NR 3 (41)), Matematyka, 1957, 10, № 1, 50—75 (польск.)

33 К. **Математика для инженеров. Миллер** (Engineering mathematics. Miller Kenneth Sielke. Rinehart, 1956, 417 pp., 6.50 doll.) Cumul. Book Index, 1956, 59, № 9, 80 (англ.)

34 К. **Сборник задач по высшей математике. Гюнтер, Кузьмин** (Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Bd I. Günter N. M., Kusmin R. O. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1957, VIII, 492 S.) (нем.)

Перевод с русского. При переводе использованы 10-е, 11-е, 12-е русские издания. Том содержит первую и вторую части, за исключением гл. X о дифференциальных уравнениях в частных производных из 2-й части русского оригинала. Эта глава перенесена во 2-й том немецкого издания.

35 К. **Задачи по математике и физике, дававшиеся на приемных испытаниях в 1947—1955 годах.** Моск. физ.-техн. ин-т, М., 1957, 92 стр.

36 К. **Сборник задач по математике. Для учительских институтов. 2. изд. Георгиев, Караникола, Иванов, Панов, Пенков, Цветков** (Сборник от задачи по математика. За учителските инст. 2 изд., Георгиев Г., Караниколов Хр., Иванов Ал., Панов Д., Пенков П., Цветков Цв. София, Нар. просв., 1956, 432 стр., 8.90 лв. Литогр. изд.) (болг.)

37 К. **Курс высшей математики. Для техникумов. Изд. 10-е, стереотипн. Тарасов Н. П.** М., Гостехиздат, 1957, 404 стр., илл., 7 р. 15 к.

38 К. **Задачи по высшей математике. Для студентов политехнических институтов. Бялынич, Зелинский** (Zadania z matematyki wyższej. Dla studentów politechnik. Wyd. 2. Białynicz Stefan, Zieliński Kazimierz. Warszawa, PWN, 1957, 468 s., il., 37 zł.) (польск.)

39 К. **Справочник по высшей математике. (2-е испр. изд.). Выгодский М. Я.** М., Гостехиздат, 1957, 783 стр., илл., 13 р. 40 к.

40 Д. **Роль математических асбтракций в познании действительности. Киселева Н. А.** Автореф. дисс. канд. филос. н., Акад. обществ. наук при ЦК КПСС, М., 1957

41 Д. **Вычислительная работа в курсе математики средней школы. Брадис В. М.** Автореф. дисс. докт. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1957

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

42. **Решение Архита задачи об удвоении куба. Грессер** (Archytas' duplication of the cube. Graesser R. F.), Math. Teacher, 1956, 49, № 5, 393—395 (англ.)

Задачу об удвоении куба с данным ребром греческий математик Архит из Тарента (первая половина IV в. до н. э.) свел к стереометрическому построению. Оно состоит в разыскании точки, общей для трех поверхностей: цилиндра, конуса и поверхности вращения окружности около ее касательной. Автор дает аналитическое решение последней задачи и показывает, что расстояние ρ от общей точки до упомянутой касательной удовлетворяет равенству $\rho = \sqrt[3]{2a}$, где a — данное ребро. В редакционном примечании поясняется, как Архит пришел к рассмотрению вышеуказанных поверхностей, исходя из результата, полученного Гиппократом Хиосским примерно в 460 г. до н. э. А именно, Гиппократ свел задачу об удвоении куба к разысканию двух соседних пропорциональных между отрезками a и $2a$. М. Я. Выгодский

43. **О теореме Фалеса. Мярка** (O twierdzeniu Talesa. Miarka Feliks), Matematyka, 1957, 10, № 1, 28—30 (польск.)

Автор дает доказательство теоремы о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, опирающееся на измерение площадей многоугольников и на теорему: Отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению их оснований. По мнению автора, это доказательство следует использовать в школьном преподавании, как более других соответствующее уровню развития учащихся. А. Е. Раик

44. Римские двенадцатиричные цифры. Франсис (Roman dumerals. Francis L.), Duodecimal Bull., 1956, 17, № 1, 7—9 (англ.)

Размышления о том, какова была бы римская нумерация, если бы в основе ее лежала не десятичная, а двенадцатиричная система счета. М. Я. Выгодский

45. Арабские цифры, числа и определение счета. Гудстейн (The arabic numerals, numbers and the definition of counting. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1956, 40, № 332, 114—129 (англ.)

Автор пытается наметить воображаемый путь возникновения и развития натурального числа, счета и цифровых обозначений. Он намечает следующие 6 стадий, пройденных от первых примитивов ориентировки в конечных множествах (стадах) до принятого ныне счета: 1) простая бирка, на которой устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством зарубок и овец в стаде; 2) двойная бирка, где на второй отмечаются зарубкой группы десятков, сотен и т. д.; 3) прототип счетов (из проволок); 4) фигурные знаки; 5) алфавитная система; 6) общепринятые цифры.

Автор нигде не пытается свои выводы подтвердить историческими фактами. И. К. Андронов

46. Исаак Барроу. Асперйтия (Isaac Barrow. Azpeitia A. G.), Gac. mat., 1956, 9, № 4—5, 123—129 (исп.)

Очерк жизни и многосторонней деятельности И. Барроу, как богослова, философа, лингвиста, ботаника, физика и математика. Характеризуются его «Лекции по оптике» и «Лекции по геометрии». В «Лекциях по геометрии» содержатся основные идеи исчисления бесконечно малых. Понимание этих идей затрудняется неудобством обозначений. «Лекции по геометрии» оказали большое влияние на Лейбница. Ньютон в бытность студентом Кембриджского университета работал под личным руководством Барроу. Отмечается, что ряд основных понятий ньютоновой механики предвосхищены в работах Барроу. М. Я. Выгодский

47. Карл Фридрих Гаусс (Carlos Federico Gauss. J. A.), Rev. Univ. nac. Tucuman. Fac. cienc. exactas y tecnol., 1954 (1955), **A10**, № 1—2, 210—215 (исп.)

48. Жизнь Бернарда Больцано и его математические и естественнонаучные работы. Веселый (Život Bernarda Bolzana a jeho matematicko-přírodovědecké práce. Veselý František), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 1, 119—127 (чешск.)

Краткая биография пражского математика и философа Б. Больцано, 175 лет со дня рождения которого исполнилось в 1956 г. Э. Я. Кольман

49. Теория действительных чисел в рукописном наследии Больцано. Рыхлик (Theorie reálných čísel v Bolzanově rukopisné pozůstalosti. Rychlík Karel), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 4, 391—395 (чешск.)

Автор описывает неопубликованную рукопись Б. Больцано «Понятие о бесконечных числах (величинах) (Теория чисел II)», в которой разработана систематическая теория действительных чисел; рукопись относится к 1830—1835 гг. «Бесконечным числовым выражением» Больцано называет выражение (формальное), в котором проделывается бесконечное число основных операций арифметики над целыми числами, например, $1+2+3\ldots$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots$, $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\ldots$. Если S есть подобное выражение, а q есть натуральное число, то может случиться, что существует целое число p, такое, что $S=\frac{p}{q}+p_1$, $S=\frac{p+1}{q}-p_2$, где p_1 является или нулем, или положительным выражением, а p_2 есть положительное выражение.

Если для любого натурального q существует подобное p, то Больцано называет выражение S «измеримым». Если при этом получается, что $p=0$ для любого q, то S называется «положительным бесконечно малым числом»; аналогично определяется бесконечно малое отрицательное число. Больцано называл два измеримых выражения S и T «равными», если для S получаются такие же дроби $\frac{p}{q}$, что и для T. Это определение равенства было затем использовано для определения действительных чисел. Больцано заключает (zeigt), что действительные числа образуют упорядоченное архимедово тело. Далее Больцано доказал основополагающие теоремы анализа: условие Больцано—Коши для сходимости последовательности действительных чисел, теорему о верхней и нижней грани, а также теорему, представляющую известное обобщение основной теоремы Дедекинда.

Как отметил автор, основы теории Больцано (т. е. понятие бесконечного числового выражения и формальные операции с этими выражениями (необоснованы, а в деталях имеются также ошибки. Чтобы сохранить возможно больше из больцановой теории, автор предлагает интерпретировать ее по образцу канторовой теории. Несмотря на неудовлетворительность основ, встречаются интереснейшие теоремы, доказательство которых у Больцано правильное. С их помощью выясняется, что Больцано пользовался в этих доказательствах не неясными представлениями о бесконечных числовых выражениях, а использовал представление действительного числа посредством так называемого канторова ряда $\alpha+\frac{\beta}{a}+\frac{\beta\gamma}{ab}+\frac{\beta\gamma\delta}{abc}+\ldots$ (α, β, γ, δ, $\ldots$, a, b, c, $\ldots$ целые; $a>1$, $b>1$, $c>1$, $\ldots$, $0\leqslant\beta<a$, $0\leqslant\gamma<b$, $0\leqslant\delta<c$, $\ldots$).

Автор подчеркивает также пристрастие Больцано к «методу исчерпывания». Если $A+\Omega_1=B+\Omega_2$, где A и B — постоянные числа, а $|\Omega_1|$, $|\Omega_2|$ могут принимать сколь угодно малые значения, то $A=B$. Рассматриваемая рукопись Больцано разъясняет также происхождение многих понятий и теорем, появившихся без разъяснения в книге «Functionenlehre», опубликованной в 1930 г. (Praha, Král, česka spol. nauk). V. Jarnik

50 К. В. Я. Буняковский — ученый и педагог. Пособие для учителей. Прудников В. Е. М., Учпедгиз, 1954, 87 стр., 1 р. 25 к.

Очерк педагогической и научной деятельности В. Я. Буняковского (1804—1889) в связи со 150-летием со дня его смерти. Главы книги содержат: I — краткие биографические сведения; II — описание научных трудов (по теории чисел, теории вероятностей, математическому анализу и др.); III — описание математических приборов Буняковского; IV — сведения о деятельности Буняковского в Академии Наук; V — сведения о деятельности в Петербургском университете; VI — сведения о преподавании математики в Морском корпусе и работе по методике преподавания элементарной математики в военных школах; VII — разбор учебных руководств Буняковского, составленных для средних военно-учебных заведений; VIII — высказывания о Буняковском его слушателей и учеников. Приводимые в очерке сведения в кратком изложении были опубликованы автором в статье (РЖМат, 1955, 2060). Рецензию на книгу см. Успехи матем. наук, 1956, 11, вып. 2 (68). Г. Ф. Рыбкин

51. **Исследования по дифференциальной геометрии в Румынии** (Ricerche di geometria differenziale in Romania. M. V.), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 591—593 (итал.)

Конспект доклада об истории развития дифференциальной геометрии в Румынии, подготовленного для четвертого съезда румынских математиков (Бухарест, 27 мая—5 июня 1956 г.) Георгиу, Майером, Михэйлеску и Врынчану. А. Н. Гливич

52. **Владимир Иванович Смирнов (к семидесятилетию со дня рождения). Ладыженская О. А., Фихтенгольц Г. М.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 5—14

53. **80-летие Пауля Эйгена Бёмера** (Paul Eugen Böhmer 80 Jahre), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1957, **3**, № 2, 133—134 (нем.)

54. **Эмиль Борель (1871—1956). Курепа** (Емил Борел (1871—1956). Курепа Ђуро), Наука и природа, 1956, 9, № 6, 233—234 (сербо-хорв.)

55. **Очерк жизни Германа Вейля (9 ноября 1885 г.—19 декабря 1955 г.). Фрёйденталь** (Levensbericht von Hermann Weyl (9 november 1885—9 december 1955). Freudenthal Hans), Jaarb. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955—1956. Amsterdam, 1956, 231—238 (голл.)

Творчество Вейля имело своим истоком проблемы теоретической физики. Характеризуются труды Вейля по теории интегральных уравнений, римановой геометрии, теории относительности, квантовой механике, теории групп, теории чисел, философии математики. М. Я. Выгодский

56. **Вениамин Федорович Каган (1869—1953). Дубнов Я. С., Лопшиц А. М.**, Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 3—14

Биографический очерк. Приложен список сочинений (83 назв.) и изданий, переведенных или редактированных В. Ф. Каганом (11 назв.). См. также РЖМат, 1954, 2463. Б. А. Розенфельд

57. **Эрнесто Чезаро. Нунцианте-Чезаро** (Ernesto Cesàro. Nunziante-Cesàro Carlo), Archimede, 1956, 8, № 6, 285—287 (итал.)

58. **Умер доцент Йозеф Грдличка. Юрек** (Odešel docent dr Josef Hrdlička. Jurek Bohumil), Českosl. časop. fys., 1957, 7, № 4, 323—324 (чешск.)

См. также: 526, 605, 617, 631 К, 633

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

59. **Аксиомы Пеано и модели арифметики. Сколем** (Peano's axioms and models of arithmetic. Skolem Th.), Math. interpretation formal systems, Amsterdam, N. V. Noord—Holl. Uitg., 1955, 1—14 (англ.)

Первая статья в сборнике докладов, прочитанных 9 и 10 сентября 1954 г. в симпозиуме, организованном Математическим обществом (Wiskunding genootschap). Дается краткое изложение известного построения нестандартной модели аксиом Пеано (Skolem Th., Fundam. Math., 1934, **23**, 157—159) и некоторых аналогичных конструкций для более узких систем.

Вводится классическое логико-арифметическое исчисление: исчисление предикатов плюс аксиомы Пеано, аксиомы для равенства, рекурсивные определения сложения и умножения. Если выводима формула

$$(x)(Ey)A(x, y), \qquad (1)$$

то выводима также

$$(x)(Ey)(A(x, y) \& (z)(\overline{A}(x, z) \vee (y \leqslant z))); \qquad (2)$$

функцию, сопоставляющую каждому x соответствующее (наименьшее) y, обозначим через f; тогда вместо формулы (1) можно писать (2) $A(x, f(x))$. (При этом говорится, что формула (1) получена из (2) при помощи квантификации, а (2) из (1) при помощи деквантификации.) Совокупность всех таких арифметических функций обозначается через F, функций одного аргумента — через F_1.

Доказывается лемма: Если дана бесконечная последовательность арифметических функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, . . ., то существует такая арифметическая функция $g(t)$, что для любой данной пары чисел i, j при всех $t > \max(i, j)$ имеет место одно и то же из отношений $<$, $=$ или $>$ для чисел $f_i(g(t))$ и $f_j(g(t))$.

Если построить последовательность всех функций из F_1, то лемма позволяет естественно определить $f_i > f_j$, $f_i = f_j$, $f_i < f_j$. Равные друг другу в таком смысле функции объединяются в один класс. Множество N^* всех этих классов и является нестандартной моделью аксиом Пеано, так как эти классы обладают всеми свойствами натуральных чисел.

В заключение рассматриваются несколько более узких теорий, например теория T, в которой можно доказать обыкновенные свойства сложения и умножения и такие свойства неравенств, как $(a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$, $(a < b) \to (a + c < b + c)$, $(c > 0) \times \& (a < b) \to (ac < bc)$, но в которой не удалось доказать формулу

$$(a = 0) \vee (b = 0) \vee (a^2 < 2b^2) \vee (a^2 > 2b^2),$$

выражающую иррациональность $\sqrt{2}$. В. Детловс

60. **Об определимости и выводимости. Хазенйегер** (On definability and derivability. Hasenjaeger G.), Math. interpretation formal systems, Amsterdam, N. V. Noord-Holl. Uitg., 1955, 15—25 (англ.)

В модели формальной системы, построенной на основе исчисления предикатов, должны интерпретироваться константы этой системы и задаваться области изменения переменных (общие для переменных одного типа). Модель называется стандартной, если эти области для предикатных переменных взяты максимальными. Формула называется S-истинной, если она истинна при всякой замене констант соответствующими константами из S и переменных—элементами из области соответствующего типа.

Говорится, что формула $\mathfrak{L}$ является стандартным универсальным следствием совокупности формул Γ (запись: $\Gamma \cup \vdash \mathfrak{L}$), если $\mathfrak{L}$ является S-истинной для каждой такой стандартной модели, для которой S-истинны все формулы Γ. Пусть a и b — гёделевы номера формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$. Доказывается, что тогда предикат $V(a, b)$, равносильный с $\mathfrak{A} \cup \vdash \mathfrak{L}$, не может

быть выражен ни в одном из видов $\exists x R(x, a, b)$ или $\forall x R(x, a, b)$ с общерекурсивным R.

Понятие стандартного универсального следствия обобщается следующим образом. Если K — некоторый класс моделей (не обязательно стандартных), то формула $\mathfrak{A}$ называется универсальным K-следствием совокупности формул Γ (запись: $\Gamma \cup \vdash_K \mathfrak{A}$), если $\mathfrak{A}$ является S-истинной для каждой такой модели $S \in K$, для которой S-истинны все формулы Γ. Класс моделей K называется адэкватным для выводимости (обозначаемой через $\vdash$), если $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \cup \vdash_K \mathfrak{A}$ для всех Γ и $\mathfrak{A}$. Описывается класс K_0, адэкватный для выводимости в узком исчислении предикатов с правилом подстановки для предикатов. Это позволяет проводить доказательства невыводимости в узком исчислении предикатов при помощи моделей из K_0.

В заключение более подробно рассматривается взаимная выводимость аксиом булевой алгебры и аксиом поля характеристики 2, формулированных в исчислении предикатов с тождеством. В. К. Детловс

61. Доказательство теоремы Эрбрана. Лось, Мостовский, Расёва (A proof of Herbrand's theorem. Łoś J., Mostowski A., Rasiowa H.), J. math. pures et appl., 35, № 1, 19—24 (англ.)

Приводится упрощенное доказательство теоремы Эрбрана о необходимом и достаточном условии выводимости предложения Y в элементарной теории $T(\mathfrak{A})$, основанной на классическом исчислении предикатов и на множестве $\mathfrak{A}$ открытых аксиом. Во избежание громоздких (но не существенных) деталей авторы ограничиваются рассмотрением формул Y вида:

$$Y = (\exists y_1)(y_2)(\exists y_3)(y_4)(\exists y_5) Z(y_1, \ldots, y_5),$$

где Z — открытая матрица, не содержащая свободных переменных, отличных от $y_1, \ldots, y_5$.

Теорема Эрбрана. Следующие условия равносильны:

1) Y доказуема в $T(\mathfrak{A})$.

2) Для некоторого натурального n в $T(\mathfrak{A})$ доказуема формула

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} Z(x_j, y_{k(j)}, x_l, y_{k(j,l)}, x_h),$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность всевозможных термов теории, а $y_{(k)j}$, $y_{k(j,l)}$ — переменные, не встречающиеся в термах x_j и x_j, x_l соответственно. Упрощение достигается за счет применения «алгебраических методов» (РЖМат, 1956, 6335).

Другие результаты:

I. Каждое из условий (1) (2) эквивалентно условию: (3) Y истинна в любой модели $T(\mathfrak{A})$;

II. Эквивалентность (1) $\rightleftarrows$ (2) может быть установлена и для теорий, основанных на модальной логике, при условии, что Y взята в нормальной предваренной форме (приведение к такой форме не всегда осуществимо в рамках модальной логики).

Б. А. Трахтенброт

62. Модели, переводы и интерпретации. Крейсел (Models, translations and interpretations. Kreisel G.), Math. Interpretation Formal Systems, Amsterdam, N. V. Noord-Holl Uitg., 1955, 26—50 (англ.)

Статья обзорного характера; рассматриваются в различных комбинациях связи понятий непротиворечивости, модели, перевода и интерпретации математических систем. Имеются в виду аксиоматические системы с конечным или бесконечным общерекурсивным множеством аксиом, а также неаксиоматизируемые системы. Понятие модели для систем узкого исчисления предикатов определяется так: система (S_2) называется моделью системы (S_1), если нелогические постоянные системы (S_1) могут быть заменены выражениями из (S_2) так, что аксиомы (S_1) переходят в теоремы (S_2). Понятие перевода определяется по Хао Вану: общерекурсивная функция τ называется (S)-переводом системы (S_1) в систему (S_2), если в (S) выводимы формулы

$$(E_y)\,\mathrm{Prov}_1(y, n) \to (E_y)\,\mathrm{Prov}_2(y, \tau(n)),$$

$$\tau(\nu_1(n)) = \nu_2(\tau(n)),$$

где $\mathrm{Prov}_i(a, b)$ означает: a является гёделевым номером вывода в системе (S_i) формулы с номером b, а $\nu_i(c)$ есть номер в системе (S_i) отрицания формулы с номером c. Понятие интерпретации системы (S_1) в (S_2) определяется следующим образом: общерекурсивная функция i называется дизъюнктивной интерпретацией, если число $\mathrm{i}(a, n)$ является номером некоторой формулы $A_2^{(n)}$ из (S_2), когда a — номер формулы A_1 из (S_1), причем (1) из выводимости A_1 в (S_1) следует выводимость $A_2^{(n)}$ в (S_2) для некоторого n. Интерпретация называется вполне дизъюнктивной, если, кроме (1), выполняется (2): из выводимости $\neg A_1$ в (S_1) следует, что для некоторого n, $A_2^{(n)}$ является «ложной»; и строго дизъюнктивной, если кроме (1) выполняется (3): если (S_2) является подсистемой (S_1), то в (S_1) формула A_1 может быть выведена из $A_2^{(n)}$ при каждом n.

В добавлении дается набросок доказательства ω-непротиворечивости системы Z (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, I, Berlin, 1934) в следующей формулировке: если в Z может быть выведена формула

$$(E_y)(x_1)(Ey_1) \ldots (x_n)(Ey_n) A(y; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

то для любой арифметической функции p неверно, что $p(m)$ является гёделевым номером доказательства формулы

$$\neg(x_1)(Ey_1) \ldots (x_n)(Ey_n) A(m; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

для всех m. Доказательство использует понятие вычислимого функционала, сопоставляющего каждой вычислимой функции конструктивным образом некоторое число (при нахождении которого достаточно знать значения функции для достаточно длинного, но конечного отрезка натурального ряда). В. К. Детловс

63. Упрощенное доказательство сведения всех модальностей к 42 в S3. Фейс (A simplified proof of the reduction of all modalities to 42 in S3. Feys Robert), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, 10, № 1—2, 53—57 (англ.)

Модальностью называется функция одного аргумента модального исчисления высказываний, допускающая представление через функции N (отрицание) и M (возможность). Как отмечает автор, в статье Парри (Parry W. T., J. Symbolic Logic, 4(1939), 137—154) было доказано, что в исчислении S3 (Lewis C. I., Langford C. H., J. Symbolic Logic, 1932, № 4) имеется ровно 42 различные модальности. Реферируемая работа содержит несколько более простое доказательство этой верхней оценки числа различных модальностей, близкое к доказательству Парри. О. Б. Лупанов

64. Две теоремы о функциях истинности. Куайн (Two theorems about truth functions. Quine W. V.), Bol. soc. mat. mexicana, 1953, 10, № 1—2, 64—70 (англ.)

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция (попарно различных) переменных, над некоторыми из которых стоят знаки отрицания. Конъюнкции, получающиеся друг из друга перестановкой членов, не различаются. Нормальной формой называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций. Длиной нормальной формы называется число входящих в нее знаков переменных и знаков дизъюнкции. Нормальная форма называется минимальной, если не существует нормальной формы, имеющей меньшую длину и выражающей ту же функцию.

Теорема 1. Если нормальная форма не содержит отрицаний и никакой ее дизъюнктивный член не является частью другого ее дизъюнктивного члена, то она минимальна.

Обозначим $\bar{x}(x)$ через $x^0(x^1)$, и пусть функция $[m]$ равна дизъюнкции всех конъюнкций $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, для которых $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (1-\sigma_k) r^{k-1} \leqslant m$.

Теорема 2. Если $m < 2^n$, то минимальная нормальная форма для функции $[m]$ не содержит отрицаний. О. Б. Лупанов

65. К преобразованию логических выражений с помощью вычислительных машин с программным управлением. Роледер (Zur Umformung logischer Ausdrücke mit Hilfe programmgesteuerter Rechenanlagen. Rohleder Hans), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 2, 57—58 (нем.)

Описывается один способ задания функций алгебры логики, удобной для использования в цифровых вычислительных машинах. Функция от n аргументов представляется строчкой ее значений (т. е. нулей и единиц) на всевозможных наборах значений аргументов (эти 2^n наборов берутся в фиксированном для всех функций порядке). О. Б. Лупанов

66. Равномерная рекурсивность алгоритмических операторов над общерекурсивными функциями и каноническое представление для конструктивных функций вещественного аргумента. Цейтин Г. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 188—189

Краткие тезисы доклада.

Теорема 1. Для того чтобы оператор, отображающий множество $\{f\}$ всех общерекурсивных функций само в себя, был равномерно рекурсивным по Клини относительно f, необходимо и достаточно существование частично рекурсивной функции, осуществляющей отображение соответствующих гёделевских номеров для функций $\{f\}$.

Перенесение этих понятий в конструктивный анализ позволяет получить некоторое каноническое представление для конструктивных функций, из которого следует:

Теорема 3. Всякая конструктивная функция, определенная на всех конструктивных вещественных числах некоторого промежутка $<a, b>$, конструктивно непрерывна. Б. А. Трахтенброт

67. Вычислимые операции и понятие программы. Успенский В. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 172—176

Запись набора правил (предписания), задающего вычислимую функцию, называется программой. Существуют различные способы записи этих предписаний, т. е различные способы программирования. Предлагается формальное определение понятия «способ программирования» для случая системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ вычислимых (частично-рекурсивных) функций одного аргумента; программы считаются натуральными числами. Нумерацией множества M называется произвольное отображение α произвольного множества E натуральных чисел на M (если $\alpha(e) = m$, то e называется номером элемента m). Нумерация ζ сводится к нумерации η, коль скоро существует такая вычислимая функция g, что если определено $\zeta(e)$, то определено и $\eta(g(e))$, причем $\eta(g(e)) = \zeta(e)$. Нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ называется потенциально вычислимой, коль скоро существует такая вычислимая функция f от двух переменных, что для любого k, если $\alpha(k) = \varphi \in \mathfrak{U}^{(1)}$, то $f(k, x)$ совпадает с $\varphi(x)$. Нумерация α системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ называется вполне накрывающей, если к ней сводится всякая потенциально вычислимая нумерация этой же системы. Нумерация, являющаяся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей, называется главной нумерацией 2-го рода (одной из главных нумераций 2-го рода является гёделевская нумерация). Понятие «способ программирования» отождествляется с понятием главной нумерации 2-го рода; под термином «программа» понимается номер функции при рассматриваемом способе программирования.

Если отождествить каждую функцию с ее графиком, система $\mathfrak{U}^{(1)}$, рассматриваемая вместе с какой-нибудь своей нумерацией, оказывается частным случаем занумерованной системы (РЖМат, 1957, 4549). Поэтому, в силу связности $\mathfrak{U}^{(1)}$ как топологического пространства (РЖМат, 1956, 5682) при фиксированном способе программирования невозможно так разбить $\mathfrak{U}^{(1)}$ на два непересекающихся непустых множества A и B, чтобы существовала вычислимая функция, равная 0 на программах функций из A и равная 1 на программах функций из B (теорема IV).

Оператор $\mathbf{K}$, осуществляющий отображение $\mathfrak{U}^{(1)}$ в себя, называется конструктивным относительно нумерации α, коль скоро существует такая вычислимая функция h, что если $\alpha(k) = \psi \in \mathfrak{U}^{(1)}$, то $\alpha(h(k)) = \mathbf{K}(\psi)$. Оператор, конструктивный относительно какого-либо (а, значит, и любого) способа программирования, называется конструктивным. Поскольку, во-первых, всякий конструктивный оператор можно определить как оператор, осуществляющий вычислимое отображение в себя занумерованной системы $\mathfrak{U}^{(1)}\alpha$, где α — какой-либо способ программирования (РЖМат, 1957, 4549) и, во-вторых, частично-рекурсивный оператор представляет собой частный случай вычислимой операции (РЖМат, 1956, 5682), то в силу теорем 7 и 10 из статьи Успенского В. А. (РЖМат, 1957, 4549) справедливо следующее утверждение (теоремы I и II): оператор, отображающий $\mathfrak{U}^{(1)}$ в себя, тогда и только тогда конструктивен, когда он продолжается до вычислимого оператора.

Кроме того, доказывается теорема III: если α — потенциально-вычислимая нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ и если всякий определенный на $\mathfrak{U}^{(1)}$ оператор, продолжаемый до вычислимого, конструктивен относительно α, то α есть способ программирования.

Изложение не предполагает специальных знаний в области теории алгоритмов. А. С. Есенин-Вольпин

68. Об одной проблеме, касающейся определения понятия общерекурсивной функции. Кальмар (Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktion. Kalmár László), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, 1, № 2, 93—96 (нем.)

Строится специальная система $\mathfrak{A}$ функциональных уравнений, каждое из которых является равенством двух термов (как в обычном определении общерекурсивной функции). Доказывается, что эта система определяет неявно функцию, не являющуюся общерекурсивной. Б. А. Трахтенброт

69. Прямое доказательство рекурсивной неразрешимости проблемы разрешимости для исчисления пре-

дикатов первой ступени с тождеством. Кальмар (Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität. Kalmár László), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 1,1—14 (нем.)

Пусть S обозначает произвольную систему уравнений, определяющую (в смысле Клини) какую-нибудь общерекурсивную функцию. Автор строит отображение B, определенное на множестве всевозможных S, и отображение C, определенное на натуральном ряде чисел, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $B(S)$ и $C(S)$ являются формулами узкого исчисления предикатов с тождеством;

2) Формула $B(S) \wedge C(S)$ выполнима тогда и только тогда, когда равенство $f(n) = 0$ (f — функция, определяемая системой S) не выводима из системы S. Это позволяет непосредственно установить несуществование общерекурсивного предиката $\varphi(m)$, означающего: формула A_m (при надлежащей нумерации формул исчисления) выполнима.

Автор замечает, что все ранее известные доказательства основаны на сводимости и проблеме разрешимости исчисления предикатов других проблем, алгорифмическая неразрешимость которых уже предполагается установленной. Б. А. Трахтенброт

70. О равносильности и преобразованиях схем программ. Янов Ю. И., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 1, 39—42

В работе изучается операторный способ записи алгоритмов, используемый при программировании для универсальных автоматических вычислительных машин.

Алгоритм записывается в виде (конечной) строчки символов операторов и логических условий (т. е. формул двузначной алгебры логики с указателями порядка выполнения операторов), называемой схемой программы. Каждому оператору поставлено в соответствие некоторое множество переменных. Каждой последовательности $\Delta_{S_1}, \Delta_{S_2}, \ldots, \Delta_{S_n}, \ldots$ (*) наборов значений логических переменных, встречающихся в схеме программы $\mathfrak{A}$, ставится в соответствие по определенному правилу последовательность $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}, \ldots$ выполняющихся операторов (содержащихся в $\mathfrak{A}$), называемая значением схемы программы для этой последовательности наборов (при наборе Δ_{S_n} выполняется оператор A_{i_n}). Последовательность (*) называется допустимой для $\mathfrak{A}$, если набор Δ_{S_n} отличается от $\Delta_{S_{n+1}}$ значениями только тех переменных, которые соответствуют оператору, выполняющемуся при Δ_{S_n}. Две схемы программ называются равносильными, если для них последовательности наборов являются допустимыми одновременно и если для каждой допустимой последовательности значения схемы программы одинаковы.

В работе рассматриваются схемы программы, в каждой из которых символы операторов попарно различны. Описывается алгоритм, позволяющий устанавливать для любых двух схем программ, равносильны они или нет. В заключение приводится полная система тождественных преобразований схемы программы. Доказательства не приводятся.

Примечание референта. Замечание автора о том, что каждое вхождение оператора в схему программы индивидуализировано (стр. 39), следует понимать именно в том смысле, что рассматриваются схемы программы, в каждой из которых символы операторов попарно различны. О. Б. Лупанов

71. О современных теориях сообщений: тьюринговы машины и проблемы слов. Тамари (Une contribution aux théories modernes de communication: machines de Turing et problèmes de mot. Tamari Dov), Synthese, 1954, 9, № 3—5, 205—227 (франц.)

Популярный доклад о теории алгоритмов: машины Тьюринга, вычислимые числа, неразрешимые проблемы, проблемы тождества в полугруппах.

Б. А. Трахтенброт

72. Что за наука логика? Тулмин (What kind of discipline is logic? Toulmin Stephen), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 7—11 (англ.)

На основании относительности законов конкретных наук отрицается растворение Карнапом логики в математике. Автор рассматривает символическую логику как часть логики, подобно тому как математическая физика является частью физики. Критикуется «антипсихологическое» истолкование логики Карнапом с позиций более последовательного агностицизма.

В. А. Айзенштейн

73 К. Существование в математике. Бет (L'existence en mathématiques. Beth E. W. Paris, Gauthier-Villars, Louvain, E. Nauwelaerts, 1956, 60, 900 fr.) (франц.)

Книга носит обзорный характер; в основу ее положен курс лекций, прочитанный автором в Сорбонне в 1954 г.

После введения основных понятий и описания узкого исчисления автор приводит понятие дедуктивной теории с системой постулатов D как наименьшей системы $K(D)$, содержащей постулаты D, узкое исчисление, и замкнутой относительно правил вывода $\frac{u;\ u \to v}{v}$ и $\frac{u(x)}{(x)\,u(x)}$. Формулируются теорема Линденбаума (Lindenbaum) о возможности расширить систему D до системы D' такой, что $K(D')$ — полна, и теорема Тарского (Tarski) о том, что $K(D)$ является пересечением всех полных систем $K(D')$, $D \subseteq D'$. Рассматривается также узкое исчисление с равенством.

Вводится понятие оценочной функции или оценки $W(u)$ — функции, приписывающей каждой формуле u исчисления высказываний ее значение в двузначной матрице (с элементами 2 и 0). Очевидно, что функция $W(u)$ полностью определяется ее значениями на элементарных формулах.

Доказывается эквивалентность следующих утверждений:

1. $K(D)$ непротиворечива;

2. Для всякого конечного $D^0 \subseteq D$ система $K(D^0)$ непротиворечива;

3. Для всякого конечного $D^0 \subseteq D$ существует функция W^0 такая, что $W^0(u) = 2$ для любой формулы $u \in D^0$;

4. Существует оценка W такая, что $W(u) = 2$ для любой $u \in D$.

Вводится понятие «сокращенной логики» (logique réduite), формулы которой получаются из формул узкого исчисления путем замены всех свободных переменных цифрами.

Оценочная функция продолжается на формулы сокращенного исчисления. Оценка называется нормальной, если $W((Ex)\,u(x)) = 0$ тогда и только тогда, когда $W(u(1)) = W(u(2)) = \ldots = W(u(n)) = \ldots = 0$. Вводится понятие регулярных оценок, при помощи которого доказывается теорема Лёвенгейма—Сколема—Гёделя: если D — счетная система формул, то для существования нормальной оценки W, равной 2 на D, необходимо и достаточно, чтобы $K(D)$ была непротиворечива.

Доказывается существование несчетных моделей.

Устанавливается связь между моделями и нормальными оценками; вводится различие между моделями и интерпретациями.

Доказывается, что в узком исчислении понятие бесконечности невыразимо, и приводятся различные неформализованные формулировки аксиомы бесконечности.

Приводятся различные эквиваленты утверждения о выводимости замкнутой формулы T в узком исчислении, а также теорема Эрбрана (Herbrand) и теорема совместности.

Рассматривается метод доказательства независимости первоначальных (неопределяемых) понятий, предложенный Падоа (Padoa). В качестве примера доказывается независимость отношения $<$ от равенства и функции «$'$» в некоторой дедуктивной теории.

Вводится понятие определимости предиката по отношению к системе замкнутых формул и формулируется критерий определимости.

Отмечается связь между утверждениями существования и утверждениями о компактности некоторых топологических пространств в классической математике и ставится вопрос о связи между теоремами этих типов в интуиционистской математике; излагаются основные положения интуиционистов и рассматриваются некоторые интуиционистские понятия.

В заключение излагаются точки зрения современных номиналистов и платоников, в частности, по вопросу об аксиомах свертывания и бесконечности, об объеме и содержании; рассматриваются непредикативные определения.

Библиографические ссылки (к сожалению, не полные) приводятся в конце книги в специальном приложении.

Книга рассчитана на лиц, интересующихся вопросами обоснования математики. Б. Ю. Пильчак

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

74. Проблема Варинга. Палама (Il problema di Waring. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 1, 82—100 (итал.)

Популярная сводка основных результатов по проблеме Варинга от работ Д. Гильберта до И. М. Виноградова. Описываются известные функции $G(h)$ и $g(h)$.

Примечание референта. По поводу теоремы референта о семи кубах имеется не только краткая формулировка в работе, указанной автором в списке литературы, но и полное доказательство (Линник Ю. В., Матем. сб., 1943, 12(54), 218—224). Ю. В. Линник

75. Заметка о представлении больших целых чисел в виде сумм простых чисел. Ин Вен-Лин, Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 12, 793—795

Пусть $K(n)$ обозначает наименьшее число простых чисел таких, что целое число n представимо в виде суммы $K(n)$ простых чисел. Опираясь на элементарные методы арифметической теории множеств, автор получает некоторое улучшение результатов Шапиро и Варга (Shapiro H. N., Warga J., Comm. Pure Appl. Math., 1950, **3**, 153—176), доказывая, что $K(2n) \leqslant 18$ и $K(2n+1) \leqslant 17$ для $n > N$. Б. М. Бредихин

76. О слабом порядке базиса. Хорнфек, Вирзинг (Über die schwache Basisordnung. Hornfeck Bernhard, Wirsing Eduard), Arch. Math., 1957, **7**, № 6, 450—452 (нем.)

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество неотрицательных целых чисел,

$$A(x) = \sum_{0<a\leqslant x,\ a\in\mathfrak{A}} 1,$$

$\delta^*(\mathfrak{A}) = \lim_{x\to\infty}(A(x)/x)$ — асимптотическая плотность $\mathfrak{A}$.

Если существует наименьшее натуральное число k, для которого $\delta^*(k, \mathfrak{A}) = 1$, то k называют слабым порядком базиса $\mathfrak{A}$.

Известно (РЖМат, 1957, 1137), что

$$k \leqslant h \leqslant 2k, \qquad (1)$$

где h — асимптотический порядок базиса $\mathfrak{A}$.

В реферируемой заметке с помощью двоичных разложений доказывается, что h может принимать все значения, удовлетворяющие неравенствам (1).

Оценку (1) улучшить нельзя. Б. М. Бредихин

77. Существенные компоненты множеств точек решетки. Каш (Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. Kasch Friedrich), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 3—4, 208—215 (нем.)

Рассматривается множество $\mathfrak{Z}$ всех неотрицательных точек $\mathfrak{n}$ r-мерной пространственной решетки: $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$, где целые $n_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Исключив нулевую точку, получим множество $\mathfrak{N}$ натуральных точек решетки. Положим $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, если $m_i \leqslant n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{Z}$. $A(\mathfrak{n}) = \sum_{0<\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{n},\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} 1$; $\inf_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}} (A(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{n})) = \delta(\mathfrak{A}) = \alpha$ — плотность $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ обозначает множество всех точек решетки вида $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (a_1+b_1, \ldots, a_r+b_r)$, где $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$. Пусть $0\in\mathfrak{B}$ и каждая точка $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}$ представима в форме $\mathfrak{n} = \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{l(\mathfrak{n})}$ $(\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{B})$ с минимальным $l(\mathfrak{n})$. Тогда $\sup l(\mathfrak{n}) = h$ называется порядком $\mathfrak{B}$; $\sup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{0<\mathfrak{m}<\mathfrak{n}}^{\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}} l(\mathfrak{m}) = \lambda$ — средний порядок $\mathfrak{B}$. В случае $h < \infty$ $\mathfrak{B}$ называется базисом конечного порядка; $\mathfrak{B}$ называется существенной компонентой, если при любом $\mathfrak{A}$ с $0 < \alpha < 1$ $\delta(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \gamma \geqslant \alpha + \varphi(\alpha)$, где $\varphi(\alpha) > 0$.

Доказываются:

Теорема 1. Если $0\in\mathfrak{B}$ и $\delta(\mathfrak{B}) > 0$, то $\mathfrak{B}$ — базис конечного порядка.

Теорема 2. Если $0\in\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ — базис конечного порядка, то $\mathfrak{B}$ — существенная компонента.

В теореме 2 дается оценка

$$\gamma \geqslant \alpha\left(1 + c\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \qquad (1)$$

где $c = \{3(r+1)\}^{-r}$.

Для любых множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{Z}$ $(0\in\mathfrak{B})$ верна оценка

$$\gamma \geqslant \alpha\left(1 + \frac{c}{2r}(1-\alpha)\,\beta\right). \qquad (2)$$

Оценки (1) и (2) переносятся на асимптотические плотности, которые определяются по аналогии с линейным случаем.

Автор отмечает, что теоремы 1 и 2 можно распространить на произвольные множества точек в r-мерном пространстве, если положить в основу понятие плотности в смысле Райкова и Шатровского.

Для двумерного случая оценка (2) усиливается

$$\gamma \geqslant \alpha + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\beta. \qquad (3)$$

Неравенство (3) слабее шнирельмановского неравенства

$$\gamma \geqslant \alpha + (1-\alpha)\beta.$$

Неизвестно, можно ли получить в двумерном случае точное обобщение шнирельмановского неравенства. Во всяком случае, обобщение теоремы Манна на двумерный случай невозможно.

Неравенство (3) — первый шаг в доказательстве гипотезы:

$$\gamma \geqslant \alpha + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{r-1}(1-\alpha)\beta.$$

для r-мерной решетки. Б. М. Бредихин

78. Количество представлений больших двудольных чисел. Райт (The number of partitions of a large bi-partite number. Wright E. M.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 25, 150—160 (англ.)

Под «двудольными числами» (m, n) автор понимает двумерные векторы, компонентами которых являются неотрицательные рациональные числа. Количеством представлений или разложений двудольного числа (m, n) называется количество решений векторного уравнения

$$\sum_j (m_j, n_j) = (m, n)$$

в двудольных числах, отличных от нуля; обозначается количество представлений: $p(m, n)$.

Рассматриваются также такие разложения двудольных чисел, где ни одна часть не содержит компонент нуль и т. д.

Выводится асимптотическая формула для $p(m, n)$ при больших m и n:

$$p(m, n) \sim e^{\sigma}.$$

Здесь $e^{\sigma} = (2\pi)^{-13-1/2}N^{-16}ae^{F(X,\ Y)}$, $F(x, y) = \ln f(x, y) + mx + ny$; $f(x, y) = \prod_{h,k}(1-e^{-hx-ky})^{-1}$, a и N — постоянные, h, k — любые целые, отличные от нуля.

Е. П. Ожигова

79. О проблеме делителей. III. Дун Гуан-чан (除數問題. III. 董光昌), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 4, 515—541 (кит., рез. англ.)

Продолжение статей автора (РЖМат, 1956, 6340; 1957, 4562). Устанавливается асимптотическая формула

$$\int_0^x \Delta_k^2(y)\,dy = \frac{1}{(4k-2)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^{1+1/k}}x^{2-1/k} + \begin{cases} O\left(x^{2-\frac{3-4\sigma_k}{2k(1-\sigma_k)-1}+\varepsilon}\right) & (k>2), \\ O(x\ln^5 x) & (k=2) \end{cases}$$

где ε — любое положительное число, $\sigma_k \leqslant (k+1)/2k$, $d_k(n)$ — число разложений числа n на k множителей, $D_k(x) = \sum_{n\leqslant x} d_k(n)$, $R_k(x) = (a_{k,0} + a_{k,1}\ln x + \ldots + a_{k,k-1}\ln^{k-1} x)x$ $(x>0)$ — вычет $\zeta^k(s)x^s/s$ в точке $s=1$, $\Delta_k(x) = D_k - R_k(x)$.

Г. В. Емельянов

80. О ζ-функции Римана. Митрович (Sur la fonction ζ de Riemann. Mitrović Dragiša), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 12, 1602—1604 (франц.)

Ряд предложений элементарного характера, относящихся к свойствам функции Римана $\zeta(s)$ и ее производных в различных областях полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.

В. С. Равин

81. Интегральные представления дзета-функции. Исраилов М. Н., Сб. студ. работ Узб. ун-та, 1956, вып. 1, 143—147

Используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln(1-x^n) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n,$$

автор получает интегральное представление для $\zeta(s)$ в области $\sigma > \sigma_0 > 2$, которое после исправления ошибок, допущенных в работе, имеет вид

$$\zeta(s) = \frac{1-s}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\ln(1-e^{-y})\,y^{s-2}dy.$$

Примечание референта. Это представление можно получить проще интегрированием по частям известной формулы Римана. Б. В. Левин

82. Некоторые новые доказательства функционального уравнения дзета-функции. Мухутдинов Р. Х., Сб. студ. работ Узб. ун-та, 1956, вып. 1, 131—142

Даются два новых доказательства функционального уравнения Римана для дзета-функции.

Из тождеств

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\left(\frac{1}{2}-\{nx\}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin 2\pi nx \qquad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\left(\frac{1}{2}-\{nx\}\right) = \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x \quad (x \text{ — не целое}) \qquad (2)$$

получены тождества

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\sin^2\pi nx = \sum_{1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}\{nx\}(1-\{nx\}) \qquad (3)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\{nx\}(1-\{nx\}) = \frac{2}{\pi^2}\sin^2\pi x \qquad (4)$$

и отсюда функциональное уравнение Римана.

Примечание референта. Тождества (1) и (2), доказательства которых в работе не приведены, нуждаются в обосновании. Тождество (1) изучалось в работе Вальфиша и Човла, которые доказали, пользуясь методом И. М. Виноградова, что (1) верно почти всюду (Walfisz A., Chowla S., Acta Arithmetica, 1937, **1**, 87—113). В работе Н. П. Романова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, № 2, 131—152) тождество (1) доказано, но сходимость понимается как сходимость по норме пространства $L^2(0,1)$.

Однако тождества (1) и (2) используются автором только для вывода тождеств (3) и (4), которые легко получаются из известного равенства

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi nx}{n^2}=\{x\}(1-\{x\}).$$

Автор выводит, следовательно, простой факт из более сложного.

Многие утверждения работы можно получить проще. Имеется много опечаток. Б. В. Левин

83. Об усреднениях, относящихся к функции Мёбиуса. Гупта, Чима, Гупта (On Möbius means. Gupta H., Cheema M. S., Gupta O. P.), Res. Bull. Panjab. Univ., 1954, № 42, 16 pp., ill. (англ.)

Приводятся таблицы, которые служат для проверки предположений Бруна и Зигеля относительно функции $\mu_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\mu_1(k)$, где $\mu_1(n)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)$, μ — функция Мёбиуса. Предположение заключается в том, что в среднем

$$n^{-1}\mu_2(n-1)=-2+12n^{-1}-\beta n^{-2},$$

где $\beta=18$, согласно Бруну, и $\beta=2\pi^2/\zeta(3)=16{,}421$, согласно Зигелю. (См. Brun C. R., Dixième Congrès Math. Skandinaves, 1946, Gjellerup, Copenhagen, 1947, pp. 40—53; Gupta, J. Indian Math. Soc. (N. S), 1949; 13, 85—90). Авторы табулируют функцию

$$F(n)=T_0(n)=n\mu_2(n-1)+2n^2-12n$$

и ее последовательные усреднения

$$T_k=n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}T_{k-1}(\nu)\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

для всех целых n от 1 до 750. В нижней половине таблицы $T_5(n)$ монотонно уменьшается от —14 до —15. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 9, 779.

84. О некоторых арифметических тождествах. Агапова К. Ф., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 109—113

Работа посвящена конкретизации тождества из статьи Н. П. Романова (Изв. АН СССР, 1946, № 10), содержащего две произвольные последовательности a_n, b_n со сходящейся суммой квадратов модулей. В реферируемой работе положено $a_n=\mu_r(n)/n^{z_1}$, $b_n=\mu_r(n)/n^{z_2}$, где обобщенная функция Мёбиуса $\mu_r(n)$ вводится при помощи соотношений:

$$\mu_r(ab)=\mu_r(a)\,\mu_r(b),$$

$$\mu_r(p^\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha>r\\ (-1)^\alpha, & \text{если } \alpha\leqslant r,\end{cases}$$

где p — простое число. В результате получается формула

$$\frac{\zeta(2s)\,\zeta(z_1+z_2)\,\zeta(s+z_1)\,\zeta(s+z_2)\,\zeta(ks+kz_1)\,\zeta(ks+kz_2)}{\zeta(2s+2z_1)\,\zeta(2s+2z_2)\,\zeta(kz_1+kz_2)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2s}(n)^{-1}Q_{s+z_1}(n)\,Q_{s+z_2}(n),$$

где $\varphi_{2s}(n)=n^{2s}\prod_{p/n}(1-1/p^{2s})$ — обобщенная по Лиувиллю функция Эйлера, а $Q_{s+s}(n)$ — мультипликативная функция, выражающаяся довольно просто через обобщенную функцию Эйлера. Н. П. Романов

85. О функции Эйлера. Вальфиш (On Euler's function. Walfisz A. Z.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 4, 1—29 (англ.)

Перевод с русского (см. РЖМат, 1953, 1040).

86. Теория арифметических линейных операторов и ее приложение к элементарному доказательству теоремы Дирихле. Ямамото (Theory of arithmetic linear transformations and its application to an elementary proof of Dirichlet's theorem. Yamamoto Koichi), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, 424—434 (англ.)

Дано элементарное доказательство теоремы Дирихле о простых числах прогрессии, тесно примыкающее к известным исследованиям А. Сельберга и Г. Шапиро, но при этом глубже, чем у этих авторов, вскрывается внутренняя операторная сущность соотношений, на которых основаны современные элементарные доказательства теоремы Адамара и теоремы Дирихле. Метод работы состоит в изучении операторов вида $\sum_{n\leqslant x}a_nf(x/n)$ и в изучении их влияния на асимптотические оценки. При этом получаются общие соотношения, имеющие самостоятельный интерес вне зависимости от их приложения к теории простых чисел. Автор отмечает, что операторный принцип в теории чисел развивался также Мёбиусом, Ландау, Глэшером, А. Сельбергом. Здесь следует добавить, что тот же принцип лежит в основе работы Чебышева «Заметка о некоторых рядах». В реферируемой работе дано систематическое исследование коммутативного кольца линейных операторов вышеприведенного вида, изоморфного с кольцом бесконечных последовательностей с обычным сложением и с «арифметической конволюцией» $\sum_{d/n}a_db_{n/d}$ в качестве второй операции. Работа имеет много пунктов соприкосновения также с работой референта (РЖМат, 1956, 1951).

Н. П. Романов

87. Замечания о дробной части p^α. Хартман, Кнаповский (Bemerkungen über die Bruchteile von p^α. Hartman S., Knapowski S.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 285—287 (нем.)

Доказываются две теоремы:

1. Если число α допускает аппроксимацию $|\alpha-a/q|<1/q^{c+1}$, где a q — несократимая рациональная дробь, c — одна константа Ю. В. Линника, то неравенство $|\alpha-r/q|<2p^{1+1/c}$ имеет бесконечное множество решений в простых p и целых r.

2. Для каждого α неравенство $|\alpha-r/p|<1/p^{1/8-\eta}$, где $\eta>0$ произвольно, разрешимо в простых числах p и r. Н. В. Гордеев

88. Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных частей. Коробов (Normal periodic systems and their applications to the estimation of sums of fractional parts. Korobov N. M.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 4, 31—58 (англ.)

Перевод из журнала. Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 17—46.

89. Об одновременном приближении двух вещественных чисел. Пуату (Sur l'approximation simultanée de deux nombres réels. Poitou G.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 9, № 13 (франц.)

Пусть α_i $(i=1,\ \ldots,\ n)$ — произвольно заданные вещественные числа $z\neq0$, x_i — целые числа и $p_i=|z|\,|x_i-\alpha_iz|^n$. Согласно теореме Кронекера существует бесконечно много систем чисел $(z,\ x_i)$, для которых $p_i<1$; пусть $\max(\inf p_1,\ \ldots,\ \inf p_n)=C_n^{-1}$. Дается обзор известных оценок чисел $C_1=\sqrt{5}$;

$2{,}6 < C_2 \leqslant 3{,}5$ и др. Указан путь для доказательства равенства $C_n = \inf \Delta$, где Δ — определитель решетки пространства R^{n+1}, содержащей точку O начала координат и не имеющей, кроме O, других точек в области $|x_{n+1}| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^n| < 1$. Э. К. Фогелс

90. Очерк одной теории арифметических функций. I. Пеллегрино (Lineamenti di una teoria delle funzioni aritmetiche. I. Pellegrino Franco), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 3—4, 469—504 (итал.)

Интегральным произведением двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ (т. е. функций, заданных на множестве натуральных чисел) называется арифметическая функция $\sum_{d/n} f(d)\, g(n/d)$. Изучается алгебраическая структура множества всех комплексных арифметических функций относительно сложения, обычного и интегрального умножений. Отметим некоторые из результатов.

Множество всех комплексных арифметических функций образует относительно обычного сложения и интегрального умножения коммутативное кольцо I с единицей, не обладающее делителями нуля.

Порядком арифметической функции $f(n)$ называется наименьшее натуральное число n, для которого $f(n) \neq 0$. Обратным элементом в I обладают те и только те функции, порядок которых равен 1.

Кольцо I не является кольцом главных идеалов. В нем не выполняется условие конечности базисов. Один из идеалов, не обладающих конечным базисом, образует множество M всех арифметических функций порядка >1. Фактор-кольцо I/M является полем, изоморфным полю комплексных чисел.

Некоторые из результатов уже опубликованы автором ранее (РЖМат, 1955, 2097). Н. П. Кубилюс

91. Аномалия выпуклых тел. Вуде (The anomaly of convex bodies. Woods A. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 3, 406—423 (англ.)

Пусть K — выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве R_n, симметричное относительно начала координат; Λ — решетка в R_n, одна из точек которой лежит в начале координат; $\mu_1(\Lambda), \mu_2(\Lambda), \ldots, \mu_n(\Lambda)$ — последовательные минимумы решетки Λ по отношению к телу K, т. е. $\mu_i(\Lambda) = \inf \mu$, взятый по всем положительным числам μ, для которых тело K содержит i линейно независимых точек решетки Λ. Положим

$$\Delta(K) = \inf_{\Lambda} \mu_1^{-n}(\Lambda)\, d(\Lambda).$$

Величина

$$M(K) = \sup_{\Lambda} \mu_1(\Lambda)\, \mu_2(\Lambda) \ldots \mu_n(\Lambda)\, \Delta(K)\, d(\Lambda)$$

называется аномалией тела K. Известно (Chabauty C., Ann. scient. École norm. supér., (3), 1949, 66, 367—394; РЖМат, 1953, 443), что $M(K) \leqslant 2^{(n-1)/2-n^{-1}}$. Отсюда для $n=2$ $M(K) = 1$. Доказывается, что $M(K) = 1$ и для $n = 3$. Библ. 9 назв. А. В. Малышев

92. О распределении вершин одного плоского регулярного незамкнутого многоугольника. Декомб (Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée. Descombes Roger), Ann. scient. École norm. supér., 1956, **73**, № 3, 283—355 (франц.)

Определяется дискретная часть спектра (до первой точки сгущения) для неоднородной задачи чебышевского типа в теории диофантовых приближений. Рассмотрим функцию $k(\xi, \tau_i) = \overline{\lim}_{u,\, v} v\,|v\xi - u - \tau_i|$, где u и v пробегают все целые числа, $v > 0$, ξ — иррациональное, τ_i — произвольное вещественное число. Две пары (ξ, τ_i) и (ξ', τ_i') назовем эквивалентными, если найдутся целые A, B, C, D, E, F такие, что $\varepsilon = AD - BC = \pm 1$, $\xi' = (A\xi + B)/(C\xi + D)$, $\eta' = (\varepsilon\eta + E\xi + F)/(C\xi + D)$, $C\xi + D > 0$.

Автор строит последовательность чисел

$$\frac{1}{\gamma_{-4}} > \frac{1}{\gamma_{-3}} > \ldots > \frac{1}{\gamma_1} > \ldots > \frac{1}{\gamma_r} > \ldots$$

и последовательность пар (ξ_r, τ_r) $(r = -4, -3, \ldots)$, обладающих свойством: если пара (ξ, τ_i) не эквивалентна ни одной из пар (ξ_s, τ_s) $(s = -4, -3, \ldots, r-1)$, то $k(\xi, \tau_i) \leqslant 1/\gamma_r$; эти неравенства точные, так как $k(\xi_r, \tau_r) = 1/\gamma_r$ $(r = -4, -3, \ldots)$. Первые 5 γ_r и соответствующие (ξ_r, τ_r) вычислены отдельно. Дальнейшие γ_r, ξ_r, τ_r определяются из формул

$$\xi_r = \frac{\frac{1}{2}(A_r - D_r) + \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r},$$

$$\tau_r = \frac{M_r \xi_r + N_r}{2\Delta_r},$$

$$\gamma_r = \frac{8\Delta_r^2 \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r N_r^2 + (A_r - D_r) N_r M_r - B_r M_r^2},$$

$$A_r = 14 s_{r+1} - 257 s_r,$$

$$B_r = 3 s_{r+1} + 398 s_r, \quad C_r = 9 s_{r+1} - 144 s_r,$$

$$D_r = 2 s_{r+1} + 223 s_r,$$

$$M_{2p} = s_{p+1} + 257 s_p, \quad \Delta_{2p} = 7 s_{p+1} + 263 s_p,$$

$$N_{2p} = 11 s_{p+1} + 75 s_p,$$

$$\delta_{2p} = s_{p+1} + 35 s_p, \quad M_{2p-1} = 25 s_p + 8 s_{p-1},$$

$$\Delta_{2p-1} = 127 s_p + 8 s_{p-1},$$

$$N_{2p-1} = 189 s_p + 2 s_{p-1}, \quad \delta_{2p-1} = 34 s_p + 2 s_{p-1}$$

$$(r,\ p = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где числа s_n определены рекуррентным соотношением $\delta_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_{n+1} = 542 s_n - s_{n-1}$. Вычислен предел $1/\gamma = \lim_{r \to \infty} 1/\gamma_r$, он равен $1/\gamma = (773868 - 28547\sqrt{510})/366795$. До настоящего времени были известны только значения $1/\gamma_{-4}$, $1/\gamma_{-3}$, $1/\gamma_{-2}$, $1/\gamma_0$. (см. работу автора (РЖМат, 1955, 5600) и Касселса (РЖМат, 1955, 603)). Доказательства получены обобщением классического аппарата непрерывных дробей на неоднородный случай. Б. Б. Венков

93. Значение минимума модуля чисел из некоторого замкнутого множества алгебраических чисел. Шамфи (Valeur minima du module pour un ensemble fermé d'indices algébriques. Chamfy Christiane), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 15, 1992—1994 (франц.)

Автор вводит следующие обозначения: S_1 — множество всех целых алгебраических чисел, все сопряженные у которых лежат в единичном круге, S_2 — совокупность всех вещественных целых алгебраических чисел, у которых все сопряженные, кроме одного, меньше единицы, $\overline{S}_2$ — совокупность комплексных алгебраических чисел с теми же свойствами. Известно, что S_1 замкнуто и что наименьшее по модулю число θ_1 из S_1 является корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$.

Известно также, что $S_1 + \overline{S}_2$ замкнуто. Доказывается, что минимум модуля для чисел из $\overline{S}_2$ ра-

вен $\sqrt{\theta_1}$ и он достигается только для корней уравнений

$$x^6 - x^2 + 1 = 0, \quad x^3 + x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - x^2 + 1 = 0.$$

Аналогичное утверждение доказано для S_2, а именно: пара сопряженных между собою чисел из S_2, по модулю не превосходящих $\sqrt{\theta_1}$, суть корни уравнения $x^6 - x^2 - 1 = 0$. И. И. Пятецкий-Шапиро

94. Теория приведения положительных квадратичных форм. Ван дер Варден (Die Reductionstheorie der positiven quadratischen Formen. Van der Waerden B. L.), Acta math., 1956, **96**, № 3—4, 265—309 (нем.)

Весьма содержательный обзор теории приведения положительных квадратичных форм по Эрмиту-Минковскому. Изложены все основные известные результаты этой теории. Во многих случаях упрощены доказательства и уточнены оценки. Упомянем уточнение неравенства Малера (Mahler K., Quart. J. Math., 1938, **9**, 259) $f_{kk} \leqslant \delta_k N_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) между диагональными коэффициентами f_{kk} приведенной формы f и последовательными минимумами N_k, позволяющее доказать неравенство Минковского $\lambda_n f_{11} f_{22} \ldots f_{nn} \leqslant D_n$, где D_n — определитель формы f с постоянной λ_n Ремака (Remak R., Compositio math., 1938, 5, 368).

Примечание референта. Не упомянута в обзоре и не приведена в списке литературы работа Б. А. Венкова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, 37—52), где предлагается и изучается целый класс новых методов приведения и решается один принципиальный вопрос Теории приведения. Библ. 39 назв. К этому списку следует добавить обзор Б. Н. Делоне «Геометрия положительных квадратичных форм», Успехи матем. наук, 1937, вып. III, 16—62; 1938, вып. IV, 102—164. А. В. Малышев

95. О бинарных квадратичных формах. Джерасимович (Über die binären quadratischen Formen. Djerasimović Božidar), Math. Z., 1957, **66**, № 4, 328—340 (нем.)

Пусть D — целое положительное число, не являющееся квадратом; P и Q — целые числа. Говорим, что квадратичная иррациональность $(\sqrt{D} + P)/Q$ имеет нормальную форму, если: а) $(D - P^2)/Q = Q_{-1}$ — целое число и б) о. н. д. $(Q, P, Q_{-1}) = 1$. Всякая квадратичная иррациональность может быть приведена к нормальной форме.

Теорема 1. Пусть $f(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ — целочисленная примитивная неопределенная бинарная квадратичная форма неквадратного определителя $D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0$. Целые числа δ и $-\delta$ ($\delta > 0$) или одно из них примитивно представимы формой f тогда и только тогда, когда δ есть знаменатель нормальной формы квадратичной иррациональности, эквивалентной одному из корней уравнения $f(\xi, 1) = 0$. По одному примитивному представлению числа $\pm\delta$ формой f строится бесконечная система представлений (теорема 2). Подсчитывается количество таких систем (теорема 3). В теоремах 4—6 дано приложение общих исследований к случаям $\delta = \pm 1$ и $\delta = \pm 2$.

А. В. Малышев

96. Целоэквивалентность квадратичных форм в разветвленных локальных полях. О'Мира (Integral equivalence of quadratic forms in ramified local fields. O'Meara O. T.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 1, 157—186 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1956, 153). Дается описание полной системы инвариантов классов целоэквивалентных квадратичных форм в локальном поле в качестве поля коэффициентов, в котором число 2 имеет локальный порядок $\geqslant 1$, но $< \infty$.

Результаты работы и их доказательства даются в геометрическом аспекте. В теореме 2, составляющей основной результат работы, даются необходимые и достаточные условия того, чтобы две решетки L и K одного и того же типа, лежащие в одном и том же векторном пространстве V, были изометричны между собой (т. е. представляемые им квадратичные формы были целоэквивалентны). Б. М. Уразбаев

97. О вычетах некоторых квадратичных форм. Тамакава (或る種の2次合同式の解の數について. 玉河恒夫), 數學, Sugaku, 1953, 5, № 3, 21—23 (японск.)

98. Исправление к работе «К арифметике кватернионных алгебр». Эйхлер (Berichtigung zu der Arbeit «Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren». Eichler M.), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 3—4, 220 (нем.)

См. РЖМат, 1957, 2876.

99. Некоторые обобщенные уравнения Пелля. Чок (Quelques équations de Pell généralisées. Chalk John H. H.), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 8, 985—988 (франц.)

Известно, что уравнение

$$x^2 + y^2 - D(z^2 + w^2) = 1$$

при $D \not\equiv 0 \pmod 4$ имеет целые решения, удовлетворяющие неравенству

$$1 < (x^2 + y^2)^{1/2} < 1 + D \prod_p \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где произведение распространено на нечетные простые делители D. Это утверждение обобщается на уравнение

$$x^2 + Py^2 - D(z^2 + Pw^2) = 1.$$

Утверждается, что при условиях $D > 0$, $P > 0$, $(D, P) = 1$ или 2, $P \not\equiv 0 \pmod 4$ и $D \not\equiv 0 \pmod 4$. Это уравнение имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$1 < (x^2 + Py^2)^{1/2} < 1 + DP \prod_\delta \left(1 + \left(-\frac{P}{\delta}\right)\frac{1}{\delta}\right) \times$$

$$\times \prod_\omega \left(1 + \left(\frac{D}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right),$$

где δ пробегает нечетные простые делители D, а ω — нечетные простые делители P. Указаны идеи доказательства этого утверждения.

Рассматриваются также уравнения

$$x^2 - D(y^2 + Pz^2) = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + Py^2 - Dz^2 = 1.$$

Указаны подстановки, переводящие эти уравнения в уравнение (1), и вытекающие отсюда оценки их решений. В. Д. Подсыпанин

100. Замечание о целых решениях диофантова уравнений $x^2 - dy^2 = 1$. Хантер (A noto on integer solutions of the diophantine equation $x^2 - dy^2 = 1$. Xunter John), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, **3**, № 1, 55—56 (англ.)

Для уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$, d — положительное целое число, не являющееся полным квадратом, развивается метод решения в целых числах, связанный с приближенным отысканием по методу Ньютона корня уравнения $z^2 - d = 0$. В некоторых случаях этот метод приводит к наименьшему нетривиальному решению. А. В. Малышев

101. О неоднородных минимумах некоторых норменных форм. Годуин (On the inhomogeneous mi-

nima of certain norm-forms. Godwin H. J.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 114—119 (англ.)

Пусть m — целое положительное бесквадратное число; $\bar{\omega} = \sqrt{m}$, $\bar{\omega} = -\sqrt{m}$, если $m \not\equiv 1 \pmod 4$; $\omega = (1+\sqrt{m})/2$, $\bar{\omega} = (1-\sqrt{m})/2$, если $m \equiv 1 \pmod 4$. Рассматриваются норменные формы $f_m(x, y) = (x+\omega y)(x+\bar{\omega}y)$, являющиеся неопределенными бинарными квадратичными формами. Дается видоизменение метода Барнса и Суиннертон-Дайера (Barnes E. S., Swinnerton-Dyer H. P. F., Acta math., 1952, 87, 259—323) для нахождения последовательных неоднородных минимумов $M_1(f_m)$, $M_2(f_m)$, ... (определения см. в цитированной выше статье), удобное в случае, когда фундаментальная единица квадратичной области $k(\sqrt{m})$ велика. В частности, для $m = 73$ вычислены $M_1(f_m)$, $M_2(f_m)$ и оценено сверху $M_3(f_m)$; для $m = 46$, 57, 67, 71, 86 и 94, вычислены $M_1(f_m)$ и оценено сверху $M_2(f_m)$. А. В. Малышев

102. Заметка о целых решениях [уравнения] $z^2 - k^2 = ax^3 + by^3$. **Морделл** (Note on the integer solutions of $z^2 - k^2 = ax^3 + by^3$. Mordell L. J.), Ganita, 1954, 5, № 2, 103—104 (англ.)

Доказывается, что при $k = 4abc^3$, где a, b, c — целые числа, уравнение

$$z^2 - k^2 = ax^3 + by^3$$

имеет бесконечное множество целочисленных решений. Некоторые из этих решений могут быть найдены с помощью целочисленных формул $x = a\xi^2$, $y = b\eta^2$, $z = a^2\xi^3 + b^2\eta^3$, $\xi\eta = 2c^2$. И. Г. Мельников

103. Целочисленные решения уравнений $3y^4 - 2x^4 = z^2$, $\lambda^4 - 6g^4 = v^2$. Формулы Пепина и их обращения. **Сансоне** (Soluzioni intere delle equazioni $3y^4 - 2x^4 = z^2$, $\lambda^4 - 6g^4 = v^2$. Formule di Pepin e loro inversione. Sansone G.), Matematiche, Catania, 1953, 8, № 2, 3—10 (итал.)

Бесконечность числа решений в целых числах уравнения $3y^4 - 2x^4 = z^2$ устанавливается геометрическим методом. Этот метод сопоставляется с рекурсионным методом решения Пепина (Pepin T., Atti Accad. Pont. Nuovi Lincei, 1878, 31, 397—427). В реферируемой работе метод Пепина описан в общих чертах и в преобразованном виде использован для доказательства бесконечности числа решений уравнения $\lambda^4 - 6g^4 = v^2$, родственного уравнению, которое также было решено Пепином. I. Niven Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 4, 335.

104. О некоторых целочисленных трехчленных уравнениях и о сравнениях из них происходящих. **Реморов П. Н.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1957, 17, 15—27

В первой части, представляющей продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 2031), рассматривается уравнение

$$x^p + y^p = Dz^p \qquad (1)$$

при $p \geqslant 7$ и $\sum f_i^{-1} < 1$, где f_i — показатели, которым принадлежат простые делители D по модулю p.

Используя результаты упомянутой работы методом, применявшимся при исследовании уравнения Ферма, автор доказывает теорему: Пусть $p \equiv 23$, 47 или 59 (mod 60) и уравнение (1) имеет решение (x, y) такое, что xy — четное и $xy(x^2 - y^2)$ не делится на p. В таком случае имеют место сравнения $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ для $q = 2$, 3, 5, 7 и 11, а также сравнения

$$(x^6 + y^6)(13^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

и

$$(x^8 + y^8)(17^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Во второй части рассматривается уравнение

$$x^p + y^p = p^m Dz^p$$

для регулярного $p \geqslant 7$ и D, удовлетворяющего условиям $\sum f_i^{-1} < 1 - 2/(p-1)$, и доказывается отсутствие у этого уравнения целых решений, удовлетворяющих условиям $(x, y) = (x, pDz) = (y, pDz) = (p, Dz) = 1$. В. Д. Подсыпанин

105. Кубические сравнения. **Льюис** (Cubic congruences. Lewis D. J.), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 85—95 (англ.)

Основной результат: если Γ — конечное расширенное поле рациональных чисел и если Δ — кольцо целых алгебраических чисел, принадлежащих Γ, а $\mathfrak{m}$ — идеал из Δ, то каждое сравнение вида

$$a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + \ldots + a_nx_n^3 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$$

(где $n \geqslant 7$ и a_i принадлежат Δ) имеет нетривиальное решение. Имеется в виду решение, в котором найдутся значения x_i, не делящиеся на любой простой делитель $\mathfrak{m}$.

Предварительно доказаны аналогичные теоремы для конечных полей (при $n \geqslant 3$) и для p-адических полей (при $n \geqslant 7$). Причем, в последнем случае оценка является окончательной, ибо указан пример уравнения с шестью неизвестными, не имеющего нетривиальных решений. В. Д. Подсыпанин

106. Некоторые теоремы о степенных вычетах. **Швец М. Н.**, Тр. Одесск. ун-та, 1956, 146, сер. матем. н., № 6, 53—66

107. Число целых неотрицательных решений уравнения $\sum_{k=1}^{n-1} x_k + px_n = m$. **Нилов Г. Н.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 21—23

108. Об уточнении одного алгорифма проф. И. Чистякова. **Лабутин Д. Н.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 63—64

109. Формулы пифагорейских чисел. **Хазанов М. Б.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 14

110. Число целых неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=1}^{r} ix_i = m$. **Ткачев М. И.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 75—82

111. К вопросу о производящей функции $p_n(m)$. (Метод и формулы при $n = 8, 9$). **Ткачев М. И.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 86—98

112. Вычисление некоторых производных. **Ткачев М. И.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 83—85

113 К. Теория чисел. Элементарный курс. 2-е изд. **Сушкевич А. К.** Харьков, Харьковск. ун-т, 1956, 204 стр., 5 р. 20 к.

114 К. Основы теории чисел. **Ибрагимов И. И.** (Ədədlər nəzəriyyəsinin əsaslары. Ибрahимов И. И. Бакы, Азәрб. дәвләт нәшр., 1955, 380 сәh, 8 ман. 60 гәп.). (азерб.)

115. К. Арифметическая теория идеалов (в некоммутативных кольцах). **Барбилян** (Teoria aritmetica a idealelor (În inele necomutative). Barbilian D. București, Ed. Acad. RPR, 1956, 379 p., 15.35 lei) (рум.)

Систематическое изложение арифметической теории идеалов в некоммутативных кольцах, в основном,

в духе концепций Дедекинда (с использованием обратного модуля) и А. И. Узкова (Матем. сб., 1939, 6, 263); дается некоторое обобщение теории идеалов Узкова.

Книга состоит из предисловия и двух частей.

Часть I. Общая теория идеалов. Глава I. Теория идеалов в субкоммутативных кольцах (кольцо O субкоммутативно справа, если при $a \in O$, $Oa \subset aO$). § 1. Разложение на секции неприводимых идеалов. § 2. Разложение на секции примарных максимальных идеалов. § 3. Минимальные взаимно простые разложения. § 4. Минимальное разложение без общих делителей. § 5. Разложение на однородные идеалы. § 6. Приложение общей теории идеалов к теории чисел. Абстрактная теория целых единиц в кольце. Глава II. Общая теория идеалов в несубкоммутативных кольцах — 5 параграфов, трактующих вопросы, аналогичные параграфам главы I. Часть II. Классическая теория идеалов в некоммутативном случае и проблемы исчерпывания и переноса. Глава I. Классическая теория идеалов в некоммутативном случае. § 1. Определение понятий (идеал, порядок; порядок Узкова; обратный модуль). § 2. Теорема об общем арифметическом делителе. § 3. Предшествующие арифметики. Основная теорема разложения. (Предшествующая арифметика (aritmeticile anterioare) есть теория идеалов, связанная с расширением $H \supset O$ кольца O с единицей и произвольной характеристической полугруппой E, и при выполнении трех особых аксиом о существовании обратных модулей, порядков идеалов и соотношении понятий «сильно простой» → «неделимый».) § 4. Полные арифметики. Теоремы разложения Артина и Дедекинда. § 5. Дополнение к классической теории идеалов. Глава II. Исчерпывание классической теории идеалов. § 1. Исчерпывающие рамки полных арифметик. § 2. Законченные и исчерпывающие арифметики. Глава III. Проблема переноса. (Перенос некоторых понятий в исчерпывающих арифметиках. Теорема Э. Нетер—Артина—Ван-дер-Вардена. Распространение на некоммутативный случай принципа исключения Г. Грелля (Grell H., Math. Z., 1936, 40, 503.) Ю. В. Линник

116 К. Магические квадраты. Дельсалль (Carrés magiques. Delesalle Auguste. Paris, Gauthier—Villars, 1956, 71 p., ill., 800 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 24, 557 (франц.)

См. также: 237

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов*, *Г. Н. Поваров*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

117. Несколько обобщений соотношения Вандермонда. Гулд (Some generalizations of Vandermonde's convolution. Gould H. W.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 2, 84—91 (англ.)

Доказывается следующее бйномиальное тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha, \beta)\, A_{n-k}(\gamma, \beta) = A_n(\alpha+\gamma, \beta),$$

где

$$A_n(\alpha, \beta) = \binom{\alpha+\beta n}{n} \frac{\alpha}{\alpha+\beta n},$$

частными случаями которого при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ являются хорошо известное тождество (соотношение Вандермонда)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{r+q}{n}$$

и другое известное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k}\binom{\gamma+n-k}{n-k} = \binom{\alpha+\gamma+n+1}{n};$$

приводится также ряд иных формулировок и следствий полученного результата. Доказательство основывается на рассмотрении некоторых бесконечных рядов.

И. М. Яглом

118. Об одном достаточном условии, при котором уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни. Бочкарев Д., Уч. зап. Мордовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3 30—31

Пусть x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — корни многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $n \geqslant 2$ a_i — вещественны.

Доказывается очевидное утверждение:

Если $a_1^2 - 2a_0a_2 = a_0^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 0$. то не все x_i вещественны.

А. И. Ширшов

119. О корнях полиномов, определяемых рекуррентными формулами. Кегель (On the roots of polynomials defined by recurrence formulae. Kegel Günter), Anais Acad. brasil. cienc., 1956, 28, № 2, 165—178 (англ.; рез. порт.)

Рассматриваются полиномы $P_k(x)$, определяемые рекуррентными формулами: $P_0(x) = a_0$, $P_1(x) = (a_1x + b_1)P_0(x)$, $P_k(x) = (a_kx + b_k)P_{k-1}(x) - c_kP_{k-2}(x)$ ($k = 2, 3, \ldots, n$, где a_k, b_k и c_k — действительные числа.

Доказывается, что условие $a_{k-1}a_kc_k > 0$ для всех $k \leqslant m$ необходимо и достаточно для того, чтобы корни каждого полинома $P_n(x)$ были действительными, различными и разделялись корнями полинома $P_{n-1}(x)$, $n \leqslant m$.

При условии $a_k > 0$, $c_k > 0$ доказывается, что корни каждого полинома $P_n(x)$ будут положительными в том и только в том случае, когда $P_n(0) > 0$, а также находятся нижняя и верхняя границы корней таких полиномов. Нижней границей корней полинома $P_n(x)$ служит число $\max_{\lambda}[\min_{k} T_k(\lambda)]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$); $\lambda > 0$, где $T_1(\lambda) = (b_1\lambda - 1)a_1\lambda$, $T_k(\lambda) = (b_k\lambda - c_k\lambda^2 - 1)/a_k\lambda$ ($k = 2, 3, \ldots, n$). Аналогично определяется и верхняя граница корней. Метод применен для отыскания границ корней полиномов Эрмита и Лагерра.

Аналогичный метод был ранее указан Перроном для нахождения верхней границы модулей корней (Perron, Algebra, v. 2, 1951, Berlin, Satz 24).

В. Г. Калагастов

120. Применение метода Шио разложения определителя к локализации корней полинома. Пародди (Application de la méthode de Chiò de développement d'un déterminant, à la localisation des zéros d'un po-

lynôme. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 18, 2269—2270 (франц.)

Полином

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_n \neq 0)$$

записывается в виде определителя

$$f(z) = (-1)^n \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -z & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & -a_2 & (-a_1 - z) \end{vmatrix},$$

который $n-1$ способами преобразуется к определителям порядка $n-1$, после чего с помощью теоремы Адамара описывается некоторая область расположения корней полинома $f(z)$. В. С. Новоселов

121. Некоторые приемы исследования распределения корней алгебраических уравнений. Лабазин В. Г., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 188—193

Пусть $F(z, \tau)$ — аналитическая функция комплексного переменного z, дифференцируемая по действительному параметру τ. Для исследования распределения корней z уравнения $F(z, \tau) = 0$ в секторах вида $|\arg z| \leqslant \varphi$, $\pi - \alpha \leqslant \arg z \leqslant \pi + \alpha$ предлагается найти знак производной $\frac{d \arg z}{d\tau}$ (вычисленной как производная неявной функции) для значений параметра τ, при которых уравнение $F(z, \tau) = 0$ имеет корни на границе области, и значений z, равных этим корням.

Этот метод применяется к уравнению $F(z, \tau) \equiv \psi_1(z) + \tau\psi_2(z) = 0$, где $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ аналитические функции и к уравнению $F(z, \tau) = a_0 z^n + \tau(a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n) = 0$. М. А. Наймарк

122. Исследование билинейной системы при условии неравенства нулю основного инварианта. Кременева Ю. П., Тр. Ленингр. Воен.-механ. ин-та, 1956, № 5, 14—21

Работа посвящена вопросу о числе решений неоднородной билинейной системы

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_s^{ij} x_i y_j = b_s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, (m+n))$$

с коэффициентами a_s^{ij} и b_s (хотя бы одно из b_s отлично от нуля), принадлежащими полю K всех комплексных чисел, при условии, что при любом $c \neq 0$ решения

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n; \quad y_0, y_1, y_m) \text{ и}$$

$$\left(cx_0, cx_1, \ldots, cx_n; \frac{1}{c} y_0, \frac{1}{c} y_1, \ldots, \frac{1}{c} y_m\right)$$

не считаются различными.

Умножая каждое уравнение этой системы на все одночлены степени m от $x_0, x_1, \ldots, x_n$, автор получает новую систему из $r = \frac{(m+n+1)!}{m!\, n!}$ уравнений с r неизвестными $(x_i y_j) x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = m\right)$ и, ограничиваясь случаем, когда определитель последней отличен от нуля, разрешает ее по формулам Крамера относительно этих неизвестных. Далее, из коэффициентов полученных при этом выражений, линейных относительно одночленов $x_0^{\gamma_0} x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$ с фиксированными i и j, составляется матрица B_{ij} и доказывается, что число неприводимых представлений коммутативного кольца, порожденного матрицами B_{ij} над полем K, в поле K в точности совпадает с числом различных решений исходной системы уравнений.

С. Н. Черников

123. Классы положительно определенных унимодулярных циркулянтов. Ньюман, Таусски (Classes of positive definite unimodular circulants. Newman Morris, Taussky Olga), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 71—73 (англ.)

Приводится пример, показывающий, что требования симметрии и положительной определенности для квадратного унимодулярного циркулянта с целочисленными элементами:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_0 \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 8)$$

недостаточны для того, чтобы имело место равенство $C = A \cdot A'$ где A — целочисленная квадратная матрица, а A' получена из A транспонированием. Минковским существование матрицы A было доказано без предположений о целочисленности. (Minkowski H., Gesamm. Abhandl., 1911, 1, 3—144). А. Г. Школьник

124. Разложение матрицы с элементами из тела на простые. Казимирский П. С., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956 (1957), вып. 38, 110—111

Пусть K — тело и (A) — левый K-модуль, порожденный строками матрицы A с элементами из тела K. Матрица B называется простой слева, если она не является правым делителем нуля, а модуль (B) не имеет собственных надмодулей кроме (E), где E — единичная матрица.

Теорема 1. Каждая матрица A, не являющаяся правым делителем нуля, может быть представлена в виде $A = B_1 B_2 \ldots B_k$, где B_i — простые слева.

Матрицы B и C называются эквивалентными слева, если

$$(E)/(B) \cong (E)/(C).$$

Теорема 2. Если $A = B_1 B_2 \ldots B_k$,

$$A = C_1 C_2 \ldots C_l,$$

где $B_i C_i$ — простые слева, то $k = l$, и при некотором упорядочении индексов соответствующие множители эквивалентны слева. В. И. Шнейдмюллер

125. Представление вращений трехмерного пространства при помощи комплексных 2×2 матриц. Уокер (Representation of rotations in three-space by complex 2×2 matrices. Walker Marshall J.), Amer. J. Phys., 1956, 24, № 4, 205—208 (англ.)

Выводится и рассматривается известное представление вращений трехмерного пространства при помощи унитарных унимодулярных матриц второго порядка.

М. А. Наймарк

126. Характеристические корни полумагических квадратных матриц. Хан (Characteristic roots of semi-magic square matrices. Khan N. A.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 261—263 (англ.)

Пусть A_n — подалгебра полной матричной алгебры F_n над некоторым полем F, состоящая из всех матриц $C = (c_{ij})$, для которых $\sum_{r=1}^{n} c_{ri} = \sum_{r=1}^{n} c_{jr} = S(C)$ для всех i и j.

Доказано, что если $C \in A_n$ и $|C| \neq 0$, то и $C^{-1} \in A_n$. Доказано также, что если λ — любой характеристический корень матрицы $C \in A_n$ с положительными элементами, то $|\lambda| \leqslant S(C)$.

Обобщение последней теоремы, предлагаемое автором, некорректно (необходимо наложить ограничение на функцию $r(x)$). А. И. Ширшов

127. Об одном достаточном условии, при котором определитель равен нулю. Бочкарев Д., Уч. зап. Мордовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 27—29

Два доказательства некоторого достаточного условия равенства нулю определителя, которое является тривиальным следствием результата задачи № 210 «Сборника задач по высшей алгебре» Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского.

128. О матрицах инцидентности. Хан (On incidence matrices. Khan Nisar A.), Ganita, 1954, 5, № 2, 117—122 (англ.)

Квадратная матрица A порядка n, элементами которой служат 0 и 1, называется матрицей инцидентности, если она удовлетворяет соотношению $AA' = A'A = B$, где на главной диагонали матрицы B стоят k, а на остальных местах $\lambda = k(k-1)(n-1)$. Доказывается, что характеристические корни матрицы инцидентности удовлетворяют соотношению $\sqrt{k-\lambda} \leqslant |z| \leqslant k$, а из существования матрицы инцидентности для данных n и k вытекает существование $(n^2 - n + 2)/2$ линейно независимых матриц инцидентности для этих чисел. Л. А. Скорняков

129. Взвешенные разбиения для симметрических матриц в конечном поле. Ходжес (Weighted partitions for symmetric matrices in a finite field. Hodges John H.), Math. Z., 1956, 66, № 1, 13—24 (англ.)

Рассматривается сумма

$$S = \sum_{X'AX=B} e\{\sigma UX + X'U\}, \qquad (1)$$

где A — неособенная симметрическая матрица порядка m, B — симметрическая матрица порядка t, U — произвольная $m \times t$-матрица. Здесь $\sigma(A)$ означает сумму диагональных элементов матрицы A, $e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}$, $t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \ldots + \alpha^{p^{f-1}}$, $\alpha \in GF(q)$, а суммирование распространяется по всем $m \times t$-матрицам X, удовлетворяющим уравнению $X'AX = B$, причем элементы всех матриц принадлежат конечному полю $GF(q)$ из $q = p^f$ элементов, $p > 2$.

Основной результат автора состоит в доказательстве равенства

$$S = q^{-\frac{1}{2}t(t+1)}(S_1 + S_2 + S_3),$$

где S_1, S_2, S_3 — суммы вида (1). Сумма $S_1 = q^{mt}$, если $U = 0$ и $S_1 = 0$, если $U \neq 0$, S_2, S_3 выражаются через обобщенные суммы Клоостермана:

$$K_n(B, W) = \sum\nolimits_{|C|\neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\},$$

$$L_n(B, W) = \sum\nolimits_{|C|\neq 0} \lambda(C)\, e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\},$$

где B, W — симметрические матрицы порядка n, $\lambda(C)$ — инвариант матрицы C, определяемый как обобщенный символ Лежандра $\psi(\delta(C))$ от произведения $\delta(C)$ диагональных элементов матрицы C в ее диагональном представлении (см. также РЖМат, 1955, 1631).

В ряде теорем изучаются свойства обобщенных сумм Клостермана. В частности, даются явные выражения для $K_n(B, 0)$ и $L_n(B, 0)$. Б. М. Уразбаев

130. Матрицы с элементами в булевом кольце. Батсон (Matrices with elements in a Boolean ring. Butson A. T.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 47—59 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество квадратных матриц порядка n, элементы которых принадлежат булеву кольцу K с единицей. Матрица $U \in \mathfrak{M}$ называется унимодулярной, если существует матрица $V \in \mathfrak{M}$ такая, что $VU = I$, где I — единичная матрица. Две матрицы A и B называются лево-ассоциированными, если существует унимодулярная матрица U, что $UA = B$; матрица E называется элементарной, если $E^2 = I$.

В работе дана конструкция двух канонических форм для классов лево-ассоциированных матриц из $\mathfrak{M}$. В частности, доказано: 1) Для любой матрицы $A \in \mathfrak{M}$ существует единственная лево-ассоциированная с ней матрица H, имеющая следующие свойства: $h_{pq} = 0$ для $q > p$, $h_{pp}h_{qq} = 0$ и $h_{pq}h_{pp} = h_{pq}$ (первая каноническая форма). 2) Каждая унимодулярная матрица из $\mathfrak{M}$ есть произведение конечного числа элементарных матриц.

Достаточным условием лево-ассоциированности матриц A и B является существование таких матриц R и T, что $RA = B$ и $TB = A$. Вторая каноническая форма имеет более сложный вид. В. И. Шнейдмюллер

131. Нормированные линейные пространства. Грейветт (Valued linear spaces. Gravett K. A. H.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 24, 309—315 (англ.)

Вводится и изучается понятие нормированного линейного пространства, аналогичное понятию нормированного поля. Пусть L — линейное пространство над полем K и Δ — линейно упорядоченное множество с наименьшим элементом μ. Отображение d пространства L на Δ называется нормой для L (и I, точнее $\{L, \Delta, d\}$, называется нормированным линейным пространством), если для любых $x, y \in L$ (1) $d(x) = \mu$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, (2) $d(x) = d(kx)$ для любого ненулевого $k \in K$, (3) $d(x+y) \leqslant \max(d(x), d(y))$. Пусть $\{L_1, \Delta_1, d_1\}$ и $\{L_2, \Delta_2, d_2\}$ являются нормированными линейными пространствами. Изоморфизм f пространства L_1 в L_2 называется изоморфизмом по норме, если $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и $d_1(x) = d_2(f(x))$ для любого $x \in L_1$. Если $\{L, \Delta, d\}$ является нормированным линейным пространством и $\delta \in \Delta$ ($\delta \neq \mu$), обозначим через $A(\delta)$ совокупность тех $x \in L$, для которых $d(x) \leqslant \delta$ и через $B(\delta)$ совокупность тех $x \in L$, для которых $d(x) < \delta$. Положим, далее $A(\mu) = B(\mu) = 0$ и обозначим $A(\delta), B(\delta) = C(\delta)$. Пространство $\{L_2, \Delta_2, d_2\}$ называется расширением пространства $\{L_1, \Delta_1, d_1\}$, если L_1 является подпространством в L_2, $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и $d_1(x) = d_2(x)$ при любом $x \in L$. Расширение L_2 пространства L_1 называется непосредственным, если $\Delta_1 = \Delta_2$ и для любого $\delta \in \Delta_1$ $C_1(\delta) = C_2(\delta)$. Автор приводит без доказательства следующий результат: для любого нормированного линейного пространства существует одно и с точностью до изоморфизма по норме только одно максимальное непосредственное расширение.

Подмножество $S = \{x_r : r \in R\}$ пространства L, где индексы берутся из произвольного множества R, вполне упорядоченного по убыванию, называется псевдосходящимся, если при любых $r, s, t \in R$, где $r > s > t$, $d(x_r - x_s) > d(x_s - x_t)$. Отсюда следует, что $d(x_r - x_s) = d(x_r - x_t) = \delta_r$. Элемент $x \in L$ называется псевдопределом множества S, если при любом $r \in R$ $d(x_r = x) = \delta_r$. Пространство L называется псевдополным, если любое его псевдосходящееся множество имеет, по крайней мере, один псевдопредел в L. Устанавливается, что для того чтобы линейное пространство L было псевдополным, необходимо и достаточно, чтобы оно не имело собственных непосредственных расширений. Доказывается следующая теорема. Пусть 1) L_i и L_i' — нормированные линейные пространства, причем L_i' является непосредственным расширением для L_i ($i = 1, 2$), 2) f является изомор-

физмом по норме пространства L_1 на L_2; 3) L_2' псевдополно. Тогда существует изоморфизм по норме f' пространства L_1' в L_2', продолжающий изоморфизм f. Изоморфизм f' отображает L_1' на все L_2' тогда и только тогда, когда L_1' псевдополно. Пусть $\mathbf{L} = \{L_\delta : \delta_н \in \Delta\}$ является множеством линейных пространств, снабженных индексами из упорядоченного множества Δ с минимальным элементом μ, причем $L_\mu = \{0\}$. Обозначим через D, точнее через $D(\mathbf{L})$, полную прямую сумму пространств L_δ для всех $\delta \in \Delta$. Для элемента $x \in D$ назовем его нормой $d(x)$ наибольшее среди тех $\delta \in \Delta$, для которых соответствующая компонента $x(\delta) \neq 0$ (если она существует). Подпространство $E \subset D$ называется b-подпространством, если $d(x)$ существует для любого $x \in E$. Через $F(\mathbf{L})$ обозначим обычную прямую сумму пространств из $\mathbf{L}$. Автор доказывает, что любое максимальное b-подпространство в D является псевдополным. Если, далее, M_1 и M_2 являются максимальными b-подпространствами, содержащими F, то существует изоморфизм пространства M_1 на M_2 над F. Основной в работе является теорема: Пусть $\{L, \Delta, d\}$ — нормированное пространство и M является максимальным b-подпространством в $D(\{C(\delta) : \delta \in \Delta\})$, содержащим F. Тогда существует изоморфизм пространства L в M. Я. В. Хион

ГРУППЫ

132. Группы, порождаемые унитарными отражениями периода 2. Кокстер (Groups generated by unitary reflections of period two. Coxeter H. S. M.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 243—272 (англ.)

Исследуются группы $[111']^m$, заданные соотношениями

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_2R_3)^3 = (R_3R_1)^3 = (R_1R_2)^l = \\ = (R_1R_2R_3R_2)^m = 1. \qquad (1)$$

Порождающие элементы R_i могут быть геометрически истолкованы как отражения в унитарном трехмерном пространстве. Группа (1) оказывается конечной, если $2\cos\frac{2\pi}{l} + 2\cos\frac{2\pi}{m} < 1$. Исследование аналогичных групп в многомерном пространстве в значительной мере сводится к исследованию групп (1), поскольку диаграммы многомерных групп получаются из диаграмм групп (1) посредством добавления «хвостов» соответствующей длины. Для групп (1) и аналогичных многомерных групп найдены коммутанты и фактор-группы по центру, вычислены характеристические показатели. Отдельно рассмотрены некоторые частные типы конечных и бесконечных групп, а также связанные с этими группами геометрические образы (политопы для конечных групп и «медовые соты» для бесконечных). Приложены таблицы рассматриваемых групп и связанных с ними констант и комплексных политопов. В. К. Туркин

133. Об одной группе, связанной с пифагорейскими числами. Киршмер (Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe. Kirschmer G.), Elem. Math., 1957, **12**, № 3, 49—50 (нем.)

Рассматриваются тройки чисел (действительных или комплексных $A[a_1; a_2; a_3]$, удовлетворяющих условию $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2$. Доказывается, что совокупность таких троек является абелевой группой относительно «умножения», определяемого формулой

$$[a_1; a_2; a_3][b_1; b_2; b_3] = [a_1b_1 + a_2b_2; a_1b_2 + a_2b_1; a_3b_3].$$

Найден ряд подгрупп этой группы. Для некоторых из этих подгрупп числа, входящие в тройки, могут быть выражены через гиперболические или тригонометрические функции, причем групповое умножение сводится к сложению аргументов этих функций. В. К. Туркин

134. Существование подгрупп заданного порядка у конечных групп. Мак-Лейн (The existence of subgroups of given order in finite groups. Mc Lain D. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, **53**, № 2, 278—285 (англ.)

Для данной группы G и ее подгруппы H автор называет возможным порядком подгруппы, содержащей подгруппу H, всякое число, делящее порядок группы G и делящееся на порядок группы H. Основные результаты работы:

Теорема 2. Группа G в том и только в том случае сверхразрешима, когда между всякими ее двумя характеристическими подгруппами H и K ($H \subset K$) можно вставить подгруппу любого возможного порядка.

Теорема 3. Между всякими двумя подгруппами H и K ($H \subset K$) группы G тогда и только тогда можно вставить подгруппу любого возможного порядка, когда группа G имеет такой упорядоченный ряд Силова $1 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_r = G$, что для любого i ($0 \leqslant i < r$) фактор-группа G/N_i является прямым произведением группы N_{i+1}/N_i и некоторой другой группы, или же группа N_{i+1}/N_i абелева, и при любом внутреннем автоморфизме 0 группы G всякому элементу $xN_i \in N_{i+1}/N_i$ соответствует его степень x^nN_i, где $n = n(\theta)$ не зависит от x. В. К. Туркин

135. Теоремы счетности в бесконечных абелевых группах. Бойер (Enumeration theorems in infinite Abelian groups. Boyer D. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 565—570 (англ.)

1. Пусть G — счетная абелева группа, N — максимальное множество линейно независимых элементов группы G и B — свободная подгруппа группы G, порожденная элементами множества N. Группа G имеет $\aleph_0$ подгрупп, если выполняется условие: а) множество N является конечным и фактор-группа G/B разложима в прямую сумму конечной группы и конечного числа групп типа p^∞ с различными p. Группа G имеет $\aleph$ подгрупп, если условие (а) не выполняется.

2. Пусть M — модуль над кольцом главных идеалов S и $0(M) > 0(S)$, где $0(M)$ и $0(S)$ — соответственно мощности множеств M и S. Тогда мощность множества R всех подмодулей модуля M, имеющих мощность $0(M)$, равна $2^{0(M)}$, и пересечение всех подмодулей множества R есть единица модуля.

Эти теоремы являются обобщением теорем Скотта (Scott W. R., Amer. J. Math. 1952, **74**, 187—197).

3. Мощность группы автоморфизмов счетной периодической абелевой группы равна $\aleph$. Л. Я. Куликов

136. О некоторых структурно-упорядоченных группах. Жаффар (Sur certains groupes réticulés. Jaffard Paul), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 28—29 (франц.)

Пусть G — абелево расширение частично упорядоченной абелевой группы K при помощи частично упорядоченной абелевой группы Q. Если f — естественный гомоморфизм группы G на группу Q, то элемент $x \in G$ считается положительным, если $f(x) > 0$ или $f(x) = 0$ и x положителен в K. Полученная частично упорядоченная группа называется лексикографическим расширением группы K при помощи группы Q.

Вводится понятие класса для l-групп. К нулевому классу принадлежит лишь единичная группа. l-группа принадлежит к n-ому классу, если она является прямой суммой конечного числа лексикографических

расширений групп $(n-1)$-го класса при помощи упорядоченных групп.

Доказано, что l-группа тогда и только тогда имеет конечное число нитей (РЖМат, 1955, 3635), когда она принадлежит к одному из указанных классов.

Е. П. Шимбирева

137. Расширения упорядоченных групп. Конрад (Extensions of ordered groups. Conrad Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 516—528 (англ.)

Показано, что шрейеровская теория расширений с небольшими изменениями переносится на упорядоченные группы (o-группы).

Через Γ обозначается множество всех пар выпуклых подгрупп G^γ, G_γ o-группы G, где G^γ покрывает G_γ (т. е. $G^\gamma \supset G_\gamma$ и между ними нельзя вставить выпуклой подгруппы группы G). Группа G_γ нормальна в группе G^γ и факторы G^γ/G_γ называются компонентами группы G. Фактор-группа G^γ/G_γ o-изоморфна некоторой подгруппе R_γ аддитивной группы R всех действительных чисел. o-группа H называется архимедовым расширением o-группы G (a-расширением), если $H \supset G$ и для каждого положительного $h \in H$ найдутся положительный элемент $g \in G$ и натуральное число n, такие, что $ng \leqslant h \leqslant (h+1)g$. o-группа называется a-замкнутой, если она не допускает собственных a-расширений.

Доказано, что если все компоненты o-группы G полные, то существует a-замкнутое a-расширение группы g, у которого все компоненты o-изоморфны группе R. Для o-групп с вполне упорядоченным рангом доказано, что для полноты группы G необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если P — o-автоморфизм группы R_γ, индуцируемый внутренним автоморфизмом группы G, то $1+p+\ldots+p^n$ есть также o-автоморфизм группы R_γ для каждого $\gamma \in \Gamma$ и произвольного натурального числа n. Приводится пример, показывающий, что условие полной упорядоченности ранга нельзя опустить. Доказано, что любая a-замкнутая o-группа ранга 2 — полная и ее обе компоненты o-изоморфны группе R. Даны примеры: 1) не a-замкнутой полной o-группы, у которой все компоненты o-изоморфны R, и 2) o-группы, не имеющей полного a-расширения.

В заключение теория расширения o-групп применяется для исследования o-групп ранга 2.

Е. П. Шимбирева

138. Об алгебраических группах, определяемых нормами форм сепарабельных расширений. Оно (On algebraic groups defined by norm forms of separable extensions. Ono Takashi), Nagoya Math. J., 1957, **11**, 125—130 (англ.)

Пусть K — произвольное поле, L — конечное сепарабельное расширение поля K, V — векторное пространство над полем K, соответствующее полю L, $\mathfrak{E}(V)$ — пространство эндоморфизмов пространства V, N — функция норм V (т. е. $N(x)$ — норма элемента $x \in L$).

Пусть H — подгруппа мультипликативной группы K^* поля K, G_H — подгруппа элементов мультипликативной группы L^* поля L, нормы которых попадают в H, $\tilde{G}_H$ — подгруппа группы $\mathfrak{E}(V)$ линейных преобразований пространства V над K, соответствующая H, т. е.

$$\tilde{G}_H = \{s \in \mathfrak{E}(V),\ N(sx) = \Lambda(s)N(x),\ \Lambda(s) \in H,\ x \in V\}.$$

Изучается структура группы $\tilde{G}_H$. Доказывается, что если поле K бесконечно и $H \subset K^*$, то $G_H = \mu(G_H)\mathfrak{G}$, где $\mu(G_H)$ — подгруппа эндоморфизмов, определяемых элементами группы G_H, $\mathfrak{G}$ — группа автоморфизмов L/K, причем $\mu(G_H) \cap \mathfrak{G} = \{\varepsilon\}$, где ε — единичный эндоморфизм из $\mathfrak{E}(V)$.

Доказано, что если $H = K^*$, то группа $\tilde{G}_{K^*}$ линейных преобразований поля L, оставляющих полуинвариантной функцию N, образует алгебраическую группу векторного пространства V над полем K, а если $H = \{1\}$, K — бесконечно, L/K — сепарабельное расширение степени n, то группа $G_{\{1\}}$ оставляет инвариантной функцию N и образует алгебраическую группу измерения $n-1$.

Определяется также центр группы $\tilde{G}_H$.

Б. М. Уразбаев

139. Двойственность Таннака для групп и алгебр Ли. Картье (Dualité de Tannaka des groupes et des algèbres de Lie. Cartier Pierre), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 3, 322—325 (франц.)

Автор переносит теорию двойственности Таннака компактных групп Ли (Шевалле К., Теория групп Ли, Изд.-во. ин. лит., 1948, гл. VI, §§ VII—IX) на случай алгебраических групп над любым полем. При этом алгебраическая группа определяется как абстрактная группа G, на которой определена алгебра функций $\mathbf{O}(G)$ со значениями в поле K, причем требуется, чтобы $\mathbf{O}(G)$ удовлетворяла ряду естественных требований. Исходя из этого определения формулируются понятия алгебры Ли алгебраической группы, рационального представления и т. д. Автор указывает, что эти определения по сути совпадают с соответствующими определениями Шевалле (Chevalley, Théorie des groupes algebriques, 2, Paris, 1951). В рамках этих понятий формулируется ряд теорем двойственности между алгебраической группой и алгеброй ее рациональных представлений. Утверждается, что для случая алгебраически замкнутого поля характеристики 0 эти результаты обобщают некоторые результаты Хариш-Чандра. Доказательства не приводятся.

Л. А. Калужнин

140. Явное спинорное представление группы вращений. Фрёйденталь (Explizite Spindarstellung der Drehgruppe. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensh. 1956, **A59**, № 5, 515—522; Indagationes math., 1956, **18**, № 5, 515-522 (нем.)

Строится теория, с помощью которой находится явное выражение матриц спинорного представления группы ортогональных матриц по соответственным ортогональным матрицам. Основные результаты совпадают с упомянутыми в работе результатами референта, полученными им кустарными методами (Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу, МГУ, 1948, вып. 6, 506—514).

Б. А. Розенфельд

141. Алгебры Ли локально бикомпактных групп. Глушков В. М., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 137—142

Пусть G — локально бикомпактная топологическая группа, $A(G)$ — множество всех ее однопараметрических подгрупп. В множестве $A(G)$ естественным образом вводятся топология и операции умножения на вещественное число, сложение и коммутирование. Относительно этих операций $A(G)$ является вещественной алгеброй Ли; она называется алгеброй Ли группы G. Доказывается, что если N — нормальный делитель группы G, то алгебра $A(G/N)$ топологически изоморфна алгебре $A(G)/A(N)$. Далее, индуктивная размерность группы G совпадает с размерностью векторного пространства $A(G)$. Отсюда вытекает, что если N — нормальный делитель группы G, то $\dim G = \dim N + \dim G/N$. Произвольная алгебра

Ли является алгеброй Ли локально бикомпактной группы тогда и только тогда, когда она разлагается в топологическую прямую сумму конечномерных алгебр Ли, из которых все, кроме конечного числа, компактны или одномерны. Отсюда следует, что операции в алгебре Ли локально бикомпактной группы непрерывны. Доказывается также, что группа автоморфизмов группы G отождествляется с некоторой подгруппой группы автоморфизмов алгебры $A(G)$.

А. Л. Онищик

142. **Композиторы и анализаторы. Лазар** (Compositeurs et analiseurs. Lazard M.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 9, № 5, 1—7 (франц.)

Вводятся понятия композитора и анализатора (полного и неполного), рассматриваются некоторые их свойства (РЖМат, 1957, 2923).

Л. М. Глускин

143. **Теория построения конечных полугрупп. I. Тамура** (The theory of construction of finite semigroups. I. Tamura Takayuki), Osaka Math. J., 1956, 8, № 2, 243—262 (англ.)

Обозначим через μ совокупность условий, каждое из которых имеет вид: из системы равенств между словами от элементов полугруппы D вытекает еще одно равенство такого же типа. В частности, полугруппа D удовлетворяет условию c, если она коммутативна, условию i, если все ее элементы идемпотентны, условию s, если она является полуструктурой.

Пусть S — полугруппа, φ_δ — такой ее гомоморфизм, что $\varphi_\delta S$ удовлетворяет системе условий μ. Представление δ полугруппы S в виде суммы непересекающихся полных прообразов всех элементов полугруппы $\varphi_\delta S$ называется μ-разложением полугруппы S. Доказывается существование наиболее дробного μ-разложения δ полугруппы S. Полугруппа $\varphi_\delta S$ называется наибольшим μ-гомоморфным образом S. Если $\varphi_\delta S$ состоит из одного элемента, то S называется μ-неразложимой.

Если μ_3 — объединение систем условий μ_1 и μ_2, сохраняющихся при любом гомоморфизме, то наиболее дробное μ_3-разложение полугруппы S совпадает с наиболее дробным μ_2-разложением наибольшего μ_1-гомоморфного ее образа. В частности, наиболее дробное s-разложение полугруппы S совпадает с наиболее дробным C-разложением максимального i-гомоморфного ее образа и с наиболее дробным i-разложением максимального c-гомоморфного ее образа. Если S s-неразложима, то либо она c-неразложима, либо наибольший ее c-гомоморфный образ i-неразложим. s-разложение $S=\sum S_\tau$ полугруппы S тогда и только тогда является наиболее дробным, когда каждая полугруппа S_τ s-неразложима.

Любая конечная s-неразложимая полугруппа принадлежит одному из следующих классов: 1) c-неразложимые полугруппы, не являющиеся группами; 2) полугруппы, в которых нуль является единственным идемпотентом; 3) полугруппы без нуля с одним идемпотентом; 4) c-разложимые некоммутативные полугруппы, содержащие более одного идемпотента.

Л. М. Глускин

144. **О непрерывных умножениях на двумерной сфере. Мостерт, Шилдс** (On continuous multiplications on the two-sphere. Mostert Paul S., Shields Allen L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 942—947 (англ.)

Исследована структура полугруппы S, гомеоморфной сфере и содержащей подгруппу B, гомеоморфную окружности. Пусть $S\setminus B=A\cup C$, где A и C — подмножества, гомеоморфные открытым полусферам, и e — единица группы B. Доказано: 1) S обладает нулем 0 и $0\notin B$. 2) Если $0\in C$, то $Q=C\cup B$ — коммутативная полугруппа с единицей e. Q содержится в центре полугруппы S и является ее идеалом. 3) Существует такой элемент $a\in A$, $a\notin S^2$, что $ax=xa=0$ для всех элементов x полугруппы S. Приведены примеры таких полугрупп.

Л. М. Глускин

145. **Объединения полугрупп. Ямада** (Compositions of semigroups. Yamada Miyuki), Kodai Math. Semin. Repts., 1956, 8, № 3, 107—111 (англ.)

Пусть L — полуструктура, т. е. коммутативная полугруппа, все элементы которой идемпотентны. Пусть каждому элементу $\alpha\in L$ взаимно однозначно сопоставлена полугруппа S_α, содержащая по крайней мере один идемпотент e_α так, что при $\alpha\neq\beta$ S_α и S_β не имеют общих элементов. Доказано, что существует полугруппа $S=\bigcup_{\alpha\in L}S_\alpha$, являющаяся полуструктурой своих подполугрупп S_α (РЖМат, 1956, 1106), причем $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha\beta}$ для любых элементов $\alpha,\beta\in L$.

Дано полное описание строения полугруппы S в случае, когда каждый идемпотент e_α является единицей полугруппы S_α и ее единственным идемпотентом (теорема 2). Эта теорема является распространением результата Клиффорда о строении полуструктуры групп (Clifford A. H., Ann. Math., 1941, 42, № 4, 1037, Алгебраический реферативный сборник, Изд-во ин. лит., М., 1948, вып. III, стр. 11). Ссылки на этот результат Клиффорда в статье нет.

Примечание референта. Теорема 2 справедлива и без предположения о единственности идемпотента e_α.

Л. М. Глускин

146. **К аксиоматике полугрупп. Клейн-Бармен** (Zur Axiomatik der Semigruppen. Klein Barmen Fritz), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math. naturwiss. Kl., 1956 (1957), 287—294 (нем.)

Рассматриваются системы аксиом, приводящие к тем или иным множествам с одной операцией, в частности к некоторым видам полугрупп (полугруппам с левым делением, с левым сокращением и т. д.).

Л. М. Глускин

147. **Полугруппы с делением. Молинаро** (Demigroupes résidutifs. Molinaro I.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris. 1955—1956, 9, № 22, 1—16 (франц.)

Полугруппой с делением автор называет частично упорядоченную полугруппу. Частным $a:b$ элементов a, b коммутативной полугруппы с делением G называется множество всех элементов $x\in G$, для которых $xb\leqslant a$. В статье доказано большое число предложений о следующих эквивалентностях коммутативной полугруппы с делением G, ассоциированных с ее произвольным элементом $x:1$) $a\equiv b\,(A_x)$, если $x:a=x:b$, 2) $a\equiv b\,(F_x)$, если $xa=xb$, 3) $a\equiv b\,(B_x)$, если $a:x=b:x$.

Л. М. Глускин

148. **$\bar{D}$-представление полугрупп. Шютценбергер** ($\bar{D}$-représentation des demi-groupes. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 15, 1994—1996 (франц.)

D-класс D полугруппы S (РЖМат, 1957, 2924) называется классом элементарного типа, если для всяких двух элементов a, b любого L-класса $L\subset D$ (R-класса $R\subset D$) из $b\in aS$ (соответственно из $b\in Sa$) следует, что a и b содержатся в одном и том же H-классе. Пусть D — некоторый D-класс элементарного типа полугруппы S, I — множество всех L-классов, содержащихся в классе D, а J — множество всех его R-классов. Построена такая полугруппа $M(S)$ из $I\times J$-матриц над некоторой группой Γ (РЖМат, 1957, 2091), что для любых s_1, $s_2\in D$ из $s_1s_2\in D$ следует $M(s_1)M(s_2)=M(s_1s_2)$. Аналогично построена полугруппа $N(S)$ из $J\times J$-матриц над Γ. Если

класс D регулярен, то $M(S)$ и $N(S)$ сводятся к полугруппе $\mathfrak{M}$ Миллера и Клиффорда (РЖМат, 1957, 2924). В противном случае $M(S)$ и $N(S)$ состоят только из нулевой матрицы. Л. М. Глускин

149. Приложения $\bar{D}$-представлений к изучению гомоморфизмов полугрупп. Шютценбергер (Applications des $\bar{D}$-représentations à l'étude des homomorphismes des demi-groupes. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 17, 2219—2221 (франц.).

Результаты предыдущей статьи (реф. 148) использованы для доказательства двух теорем о гомоморфизмах θ полугруппы S. Определения и формулировки теорем слишком громоздки, чтобы приводить их здесь. Условия, наложенные на полугруппы S и θS, связаны с существованием минимальных идеалов у некоторых из их подполугрупп. Л. М. Глускин

150. Теория характеров коммутативных хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Шварц (The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups. Schwarz Štefan), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 3, 330—364 (англ., рез. русск.)

Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Гомоморфизм полугруппы S в мультипликативную полугруппу всех комплексных чисел называется характером S, если он является непрерывной функцией. Если для всякого $a \in S$ характеры χ_1, χ_2, χ_3 удовлетворяют соотношению $\chi_1(a) \cdot \chi_2(a) = \chi_3(a)$, то χ_3 называется произведением характеров χ_1 и χ_2. Совокупность S^*, состоящая из всех характеров полугруппы S, сама является полугруппой. В работе изучаются свойства полугруппы S^* и их связи со свойствами полугруппы S.

Идеал $\mathfrak{P}$ полугруппы S называется производящим, если 1) $\mathfrak{P}$ замкнут, 2) $S - \mathfrak{P}$ является подполугруппой полугруппы S, 3) существует такой характер χ, что $\chi(a) = 0$ равносильно $a \in \mathfrak{P}$. Совокупность всех характеров, удовлетворяющих последнему условию, обозначается через $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$. Показывается, что S^* является объединением всех $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$. Получен ряд свойств полугрупп $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$. Например, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$ является группой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}$ — открыто-замкнутое множество. В этом случае она изоморфна группе отличных от нуля характеров одной из максимальных групп, содержащихся в S. Если $\mathfrak{S}$ есть объединение групп, то и S^* есть объединение групп. Множество производящих идеалов, частично упорядоченное относительно включения, антиизоморфно частично упорядоченному множеству всех $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$, если $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_1} \leqslant \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_2}$ означает $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_1} \cdot \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}_1}$. Получен ряд свойств указанного частично упорядоченного множества.

Е. С. Ляпин

151. О монотетических полугруппах. Кох (On monothetic semigroups. Koch R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 397—401 (англ.)

Топологическая полугруппа S называется монотетической, если она содержит всюду плотную циклическую подполугруппу, порожденную некоторым элементом a, называемым образующим полугруппу S. Доказывается, что бикомпактная монотетическая полугруппа, обладающая двумя различными образующими, является группой. Если S локально бикомпактна, монотетична и содержит ядро (минимальный идеал), то она бикомпактна. Приведены некоторые другие результаты о монотетических полугруппах. Часть из них известна. Л. М. Глускин

152. Топологические группоиды. Шулька (Topologické grupoidy. Šulka Robert), Mat.-fys. časop., 1955, 5, № 1, 10—21 (словацк.; рез. русск.)

Пусть G — множество, удовлетворяющее следующим условиям: 1) оно является алгебраическим группоидом; 2) оно является топологическим пространством (в смысле Понтрягина Л. С., Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954, стр. 61); 3) умножение в g не прерывно. Тогда g назовем топологическим группоидом.

Систему непустых непересекающихся множеств из G, покрывающих G, называем разбиением G и обозначаем знаком $[G]$. Элементы из $[G]$ называем классами. Разбиение называем топологическим, если: а) каждый класс $X \in [G]$ замкнут как множество из G; б) U является окрестностью G, то теоретико-множественная сумма классов из $[G]$, пересечение которых с U не пусто, является открытым множеством из G. Следовательно, само $[G]$ можно считать топологическим пространством с естественным определением окрестностей.

Разбиение называем производящим, если кроме двух произвольных классов A, $B \in [G]$ существует такой класс $C \in [G]$, что $A \cdot B \subset C$. Если $[G]$ представляет собой производящее топологическое разбиение, то его можно считать топологическим группоидом (называемым фактороидом) с естественными топологией и операцией умножения.

Исследуются отображения топологического группоида на топологический фактороид, а также взаимные гомоморфные отображения двух топологических группоидов и выводятся аналоги известных теорем об изоморфизмах из теории топологических групп.

Št. Schwarz

153. Об основах теории квазигрупп. Стейн (On the foundations of quasigroups. Stein Sherman K.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 1, 228—256 (англ.)

Подробное изложение результатов, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1957, 2933). Статья содержит много сведений по истории развития теории квазигрупп; в конце статьи сформулировано 10 проблем. Библ. 49 назв. А. И. Ширшов

154. К. Бесконечные абелевы группы. Капланский (Infinite abelian groups. Kaplansky Irving. Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1954, V+91 pp., 2.00 doll.) (англ.)

В последние три десятилетия теория бесконечных абелевых групп получила быстрое и широкое развитие, которому мы обязаны многими фундаментальными результатами. В ходе этого развития выработались новые методы, вскоре начавшие играть важную роль также и в других современных ветвях математики. Но, несмотря на это, до сих пор не было монографии, посвященной систематическому изложению результатов теории бесконечных абелевых групп, рассеянных по отдельным работам. Единственной книгой, несколько исправлявшей положение, была «Теория групп» Куроша, 2-е издание которой (РЖМат, 1954, 3091 К) содержит большую, богатую содержанием главу о бесконечных абелевых группах. Теперь мы имеем первую монографию, целиком посвященную теории бесконечных абелевых групп.

Систематическое изложение этой теории было, несомненно, делом трудным, но Капланский мастерски справился с этим. Во введении Капланский отмечает, что его монография писалась с двумя целями: во-первых, сделать теорию бесконечных абелевых групп доступной широким математическим кругам; во-вторых, помочь студентам овладеть некоторыми методами, используемыми в современной бесконечной алгебре. Этой последней цели изучение бесконечных абелевых групп служит особенно хорошо, так как не требуется больших предварительных знаний, достаточно владения основными понятиями теории групп. В то же время имеется много возможностей использовать трансфинит-

ные методы, так как в теории бесконечных абелевых групп очень часты случаи типичного применения леммы Цорна.

Первое, что производит впечатление на читателя, это концентрация богатого материала в сравнительно небольшой по объему книге без ущерба для полноты или ясности изложения. Изложение иногда несколько сжато; значительная часть материала содержится в следующих друг за другом упражнениях и, кроме того, автору всегда удается сказать ровно столько, сколько нужно. Таким образом, его работа одновременно является и прекрасным пособием для начинающего и полным изложением предмета для подготовленного алгебраиста. Особо следует отметить умение автора выделять главное в излагаемом материале и пояснять значение этого.

Следующий пример характеризует мастерство, проявленное автором при введении абстрактных понятий, которые сначала могли бы показаться несколько искусственными. В его изложении удивительная по содержанию фундаментальная структурная теорема Ульма становится в некотором смысле более осязаемой и естественной. Как показать, что аддитивная абелева группа G, являющаяся прямой суммой циклических p-групп, допускает по существу только одно разложение в такую прямую сумму? Пусть P — подгруппа группы G, состоящая из всех элементов $x \in G$, удовлетворяющих условию $px = 0$, и пусть $P_\alpha = P \cap p^\alpha G$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$). Тогда фактор-группа $P_\alpha / P_{\alpha+1}$, как элементарная p-группа, разлагается в прямую сумму вполне определенного кардинального числа $f(\alpha)$ групп порядка p. Легко видеть, что $f(\alpha)$ есть как раз число циклических слагаемых порядка $p^{\alpha+1}$ в любом разложении группы G в прямую сумму циклических групп, что доказывает инвариантность кардинального числа таких слагаемых. Теперь, с другой стороны, теорема Ульма утверждает, что (соответствующим образом продолженная) трансфинитная последовательность «ульмовских инвариантов» $f(\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots$) однозначно определяет строение группы G также и в случае, когда G есть произвольная счетная абелева p-группа, не содержащая подгрупп типа p^∞. Замечательно, что в этой более удобной формулировке теоремы Ульма, данной Маккеем и Капланским, говорится об ульмовских инвариантах, каждый из которых задан одним кардинальным числом, тогда как в первоначальной формулировке каждый из «ульмовских факторов» описывается бесконечной системой кардинальных чисел.

После некоторых предварительных высказываний о прямых суммах, о важных типах абелевых групп (циклических группах, аддитивной группе всех рациональных чисел, группе типа p^∞), о периодических группах и изложения леммы Цорна в книге дается исчерпывающее описание полных групп. Показано, что полная группа служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы и что всякая полная группа есть прямая сумма групп, изоморфных аддитивной группе всех рациональных чисел, и групп типа p^∞. Что всякую группу можно вложить в полную группу, читатель может доказать самостоятельно, решив пример, для которого почва уже была хорошо подготовлена.

Прерывая в этом месте изложение, автор ставит вопрос: как узнать, имеем ли мы достаточно хорошую структурную теорему для определенных классов групп? Он предлагает в качестве критерия, имеющего как теоретическое, так и практическое значение, возможность решить с помощью доказанной структурной теоремы какие-нибудь определенные глубокие проблемы. Упоминаются три такие «пробные проблемы», одна из них: будут ли группы G и H изоморфными, если прямые суммы $G \dotplus G$ и $H \dotplus H$ изоморфны? Например, теорема Ульма оказывается, в силу этого критерия, достаточно хорошей, так как с ее помощью упомянутая пробная проблема для счетных периодических групп решается в положительном смысле.

Далее следует теория сервантных подгрупп Прюфера, данная в изящной современной обработке Куликова. Доказав теоремы о разложимости групп с ограниченными в совокупности порядками элементов, автор вводит фундаментальное понятие высоты и доказывает его основные свойства. Как непосредственное приложение этого он получает важные теоремы Куликова: смешанная группа не может быть неразложимой; неразложимая периодическая группа является или циклической p-группой, или группой типа p^∞. Затем следует теория прямых сумм циклических групп, в частности, фундаментальная теорема Прюфера о разложимости счетных p-групп без элементов бесконечной высоты в прямую сумму циклических групп и две фундаментальные теоремы Куликова: тогда и только тогда произвольная p-группа разлагается в прямую сумму циклических групп, когда подгруппа, состоящая из всех элементов порядка p этой группы, является объединением возрастающей последовательности подгрупп, в каждой из которых высоты элементов в совокупности ограничены; всякая подгруппа прямой суммы циклических групп сама является прямой суммой циклических групп. В следующем параграфе приведена структурная теория Ульма. Теорема существования Цыпина изложена очень ясно и изящно по методу Бэра.

В следующем параграфе все предыдущие результаты переносятся на модули над кольцами главных идеалов и прилагаются к теории линейных преобразований. Также получен целый ряд результатов, касающихся линейных преобразований бесконечномерных векторных пространств. Кратко поясняется, почему между этой алгебраической теорией линейных преобразований и теорией непрерывных линейных преобразований банаховых пространств связи фактически нет.

В следующих трех параграфах излагается теория модулей без кручения. Все теоремы автор доказывает в наибольшей возможной общности. Он приводит также ряд новых результатов, полученных им самим или его учениками. Прежде всего, дается очень короткое и изящное доказательство основной теоремы о модулях с конечным числом образующих над кольцом главных идеалов. Затем показывается, что аддитивная группа целых p-адических чисел неразложима. Существование неразложимых R-модулей без кручения ранга два доказано для произвольного кольца главных идеалов R, не являющегося полным кольцом дискретного нормирования. [Кольцо главных идеалов R называется кольцом дискретного нормирования, если оно содержит с точностью до делителей единицы ровно один простой элемент p. Говорят, что R — полное кольцо, если оно полно в топологии, определенной системой идеалов (p^n), взятой в качестве системы окрестностей нуля]. Если R — полное кольцо дискретного нормирования, то всякий R-модуль без кручения со счетным числом образующих является прямой суммой полного модуля и свободного модуля. Условие счетности здесь не может быть отброшено. Именно, если R — кольцо главных идеалов, но не поле, то полная прямая сумма счетного числа модулей, изоморфных R, не является свободным модулем. Если R — полное кольцо дискретного нормирования и M — R-модуль без элементов бесконечной высоты, полный в своей p-адической топологии, то M является пополнением прямой суммы циклических модулей. Для такого кольца R всякий редуцирован-

ный R-модуль обладает циклическим прямым слагаемым, а всякий неразложимый R-модуль изоморфен одному из следующих модулей: R, $R/(p^n)$, K, K/R, где K есть поле отношений кольца R. В качестве приложения автор находит все абелевы группы, в которых может быть введена компактная топология.

Следующие два параграфа содержат новые результаты автора, касающиеся характеристических и вполне характеристических подмодулей и кольца эндоморфизмов $E(M)$ примарного R-модуля M над полным кольцом дискретного нормирования R. Рассматриваемые подмодули описываются в терминах «ульмовской последовательности» элемента. Если M и N — примарные R-модули, осуществляющие точное представление кольца R, то всякий R-изоморфизм между $E(M)$ и $E(N)$ индуцируется изоморфизмом между M и N. Центр $E(M)$, совпадает с R. Всякий автоморфизм кольца $E(M)$, оставляющий каждый элемент центра на месте, является внутренним. Полученные результаты применяются также к теории линейных преобразований. Книга заканчивается ценным обзором литературы и библиографией, содержащей 9 книг и 145 статей.

Эта книга является богатым вкладом в литературу по современной алгебре. В ней изложены наиболее важные результаты теории бесконечных абелевых групп с наиболее современной точки зрения. Значительную часть материала составляет совершенно новые, ранее не опубликованные результаты автора и его учеников. Единственное критическое замечание, которое может сделать рецензент, состоит в том, что ничего не говорится о базисной подгруппе Куликова, которая, как доказано, является наиболее сильным орудием при изучении абелевых p-групп. Эта превосходная книга, конечно, положит начало новому развитию теории абелевых групп. T. Szele

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 444—446.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

155. Различные методы в теории локальных порядковых базисов и эквивалентных им нормальных функциональных базисов. Битти (Difference methods in the theory of local order bases and their equivalent normalized function bases. Beatty S.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1956, Sec. 3, **50**, June, 1—11 (англ.)

Изучается поведение элементов поля алгебраических функций, определяемого уравнением

$$F = u^n + u^{n-1}F_1 + \ldots + F_n = 0 \qquad (1)$$

в окрестности точки $z=0$, где F_i $(i=1, \ldots, n)$ — рациональные функции от z. Пусть корни уравнения (1) распадаются в окрестности точки $z=0$ на циклы разложений порядков $\nu_1, \ldots, \nu_r$, где $\nu_1 + \ldots + \nu_r = n$.

Всякая последовательность из r чисел (τ): $\tau_1, \ldots, \tau_r$, кратных соответственно числам $\frac{1}{\nu_1}, \ldots, \frac{1}{\nu_r}$, называется локальным порядковым базисом в точке $z=0$. Каждая рациональная функция от (z, u) имеет определенный порядковый базис (τ). Рациональные функции от (z, u) (W): $W_{n-1}, \ldots, W_0$ составляют, по определению, функциональный базис множества $R(z, u, (W))$ всех рациональных функций вида $I_{n-1}W_{n-1} + \ldots + I_0W_0$, если определитель D из коэффициентов при $u^{n-1}, \ldots, 1$ отличен от 0, где $I_{n-1}, \ldots, I_0$ пробегают всевозможные рациональные функции от z, порядки которых $\geqslant 0$. Если W_m $(m=0, \ldots, n-1)$ имеет степень m относительно u, то базис (W) называется нормальным функциональным.

Оказывается, что каков бы ни был порядковый базис (τ), всегда можно найти нормальный функциональный базис (W), эквивалентный (τ), $(\tau) \sim (W)$, т. е. $R(z, u, (\tau)) = R(z, u, (W))$, где $R(z, u, \tau)$ — совокупность всех рациональных функций от (z, u), имеющих порядковый базис (τ).

В работе строится нормальный функциональный базис (W), эквивалентный $(\tau) + \frac{1}{\nu}$ (теорема 1) и $(\tau) - \frac{1}{\nu}$ (теорема 2), исходя из нормального функционального базиса, эквивалентного (τ). Б. М. Уразбаев

156. Построение структуры дополняемых идеалов при помощи группы делителей единицы. Уайтситт (Construction of the lattice of complemented ideals within the unit group. Whitesitt J. Eldon), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 4, 779—794 (англ.)

Бэром (РЖМат, 1956, 5101) было установлено, что кольцо эндоморфизмов линейного пространства над телом P определяется его группой делителей единицы. Тот же результат для случая, когда P — регулярное кольцо, получен Эрлик (РЖМат, 1956, 7216 Д). Дается доказательство, пригодное для обоих случаев.

Л. А. Скорняков

157. О коммутирующих автоморфизмах колец. Дивинский (On commuting automorphisms of rings. Divinsky Nathan), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, **49**, June, 19—22 (англ.)

Автоморфизм $x \to x^T$ кольца A называется коммутирующим, если $xx^T = x^Tx$ для любого $x \in A$. Доказывается, что если простое ассоциативное кольцо с условием минимальности для правых идеалов обладает неединичным коммутирующим автоморфизмом, то оно коммутативно. Полупростое ассоциативное кольцо с условием минимальности для правых идеалов, обладающее неединичным коммутирующим автоморфизмом T, разлагается в прямую сумму полей и кольца, в котором T действует тривиально. Доказательства основаны на тождестве

$$(x^T - x)(xy - yx) = 0,$$

верном для любых $x, y \in A$ и для любого коммутирующего автоморфизма T кольца A. И. Р. Шафаревич

158. Элементарные доказательства коммутативности p-колец. Адил (Elementary proofs of the commutativity of p-rings. Adil Yaqub), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 4, 253—254 (англ.).

Пусть k — ассоциативное кольцо с единицей, в котором $x^p = x$ и $px = 0$ для любого $x \in k$ и некоторого простого числа p.

В заметке приводятся 2 простых и, в основном, совпадающих доказательства коммутативности кольца k. Это утверждение является частным случаем одной теоремы Джекобсона (Jacobson N., Ann. Math., 1945, 46, 695—707; Алгебр. рефер. сборник, М., 1948, реф. 290). А. И. Ширшов

159. О существовании V-кольца в бесконечном поле. Чудаков Н. Г., Науч. ежегодник за 1954 г., Саратовск. ун-т, Саратов, 1955, 675.

V-кольцом поля k автор называет кольцо, которое удовлетворяет требованиям: 1) $V \leqslant k$; 2) если $x \notin V$, то $x^{-1} \in V$ (здесь в работе опечатка). Дается эскиз доказательства известной теоремы о том, что всякое бесконечное поле содержит хотя бы одно V-кольцо.

Я. В. Хион

160. Полумагические квадраты и не полупростые алгебры. Мурасэ (Semimagic squares and nonsemisimple algebras. Murase Itiro.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 3, 168—173 (англ.)

Полностью описываются подалгебры полной матричной алгебры F_n над некоторым полем F, образованные

1) всеми матрицами $A=(a_{ij})$, у которых

$$\sum_{r=1}^{n} a_{kr}=\sum_{r=1}^{n} a_{tr} \text{ для любых } k \text{ и } t;$$

2) всеми матрицами $B=(b_{ij})$, у которых

$$\sum_{r=1}^{n} b_{pr}=\sum_{r=1}^{n} b_{rq} \text{ для любой } p \text{ и } q.$$

Первая из этих алгебр (а в случае, когда характеристика поля F делит число n, то и вторая) не полупроста. А. И. Ширшов

161. О простых идеалах произвольного кольца. Тьеррен (Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque. Thierrin Gabriel), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 3, 124—132 (франц.)

Пусть $M=R_0(M)$ — некоторый идеал кольца A; $R_i(M)$ — идеал кольца A, порожденный всеми элементами $x=x_1x_2\ldots x_n\in A$, для которых $x_1^2x_2^2\ldots x_n^2\in R_{i-1}(M)$. Множество $R(M)=\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k(M)$ называется сдавливающим радикалом идеала M. Радикал Мак-Коя идеала M (McCoy N. H., Amer J. Math., 1949, 71, № 4, 823—833) содержится в сдавливающем радикале идеала M. Сдавливающий радикал идеала M является пересечением всех простых идеалов P_α кольца A, содержащих M и не содержащих отличного от P_α простого идеала $P'_\alpha\supset M$. Доказывается, что кольцо A тогда и только тогда изоморфно подпрямой сумме колец без делителей нуля (McCoy, N. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, № 9, 856—877), когда для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n\in A$ из $a_1^2a_2^2\ldots a_n^2=0$ следует, что $a_1a_2\ldots a_n=0$. Л. М. Глускин

162. Кольца с теоремой сложения для нормы. Бергман (Über Ringe mit Normenadditionsformel. Bergmann Artur), Math. Nachr., 1956, 15, № 1, 55—76 (нем.)

Рассматривается кольцо M с единицей, в котором каждому элементу x сопоставлено такое целое число $[x]$, что выполнены условия:

1. $[xy]=[x][y]$.
2. $[x]\neq 0$ при $x\neq 0$.
3. Существует такое натуральное число n, что для любых $x_1, \ldots, x_{n+1}\in M$

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}(-1)^{n+1-\nu}\sum_{i_1,\ldots,i_\nu}[x_{i_1}+x_{i_\nu}]=0,$$

где суммирование во внутренней сумме распространено на все подмножества $(i_1, \ldots, i_\nu)$ множества $(1, \ldots, n+1)$.

Доказывается, что всякое кольцо, удовлетворяющее этим условиям, не имеет кручения и любой его элемент является целым алгебраическим степени $\leqslant n$. Если m — максимум степеней элементов кольца M, то M изоморфно или порядку в поле алгебраических чисел K/R степени m или порядку в алгебре с делением D степени m_1, над центром Z, являющимся полем алгебраических чисел степени m_2, причем $m_1m_2=m$. При этом функция $[x]$ совпадает с некоторой степенью нормы $N_{K/R}(x)$ или соответственно приведенной нормы $N_{D/R}(x)$. И. Р. Шафаревич

163. О квазиидеалах колец. Штейнфельд (Über die Quasiideale von Ringen. Steinfeld O.), Acta scient. math., 1956, 17, № 3-4, 170—180 (нем.)

Подмодуль A кольца R называется квазиидеалом, если $RA\cap AR\subseteq A$. Рассмотрен ряд свойств квазиидеалов колец. В частности показано, что каждый минимальный квазиидеал кольца R является либо нулем, либо телом. Л. М. Глускин

164. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах. Ширшов А. И., Матем. сб., 1957, 41, № 3, 381—394

Проблема Курош (Изв. АН СССР, сер. матем., 1941, 5, 233—240) может быть поставлена для любых колец с ассоциативными степенями. Ее решению для некоторых из таких колец и посвящена работа. Предполагается, что аддитивные группы всех рассматриваемых колец и алгебр не содержат элементов второго порядка. Сформулируем основные результаты: 1. Если альтернативная или специальная J-алгебра A является алгебраической алгеброй ограниченной степени, то она локально конечна, т. е. любое конечное множество ее элементов порождает алгебру конечного ранга; 2. Альтернативное ниль-кольцо ограниченного индекса локально нильпотентно; 3. Если полуспециальное J-кольцо I (т. е. кольцо, вложимое в некоторое ассоциативное кольцо $A_0(I)$ так, что множество элементов, соответствующих элементам кольца I, образует J-кольцо, изоморфное кольцу I относительно сложения и J-умножения: $a\circ b=ab+ba$) с конечным числом образующих является ниль-кольцом ограниченного индекса, то I — нильпотентно; 4. Всякое право-альтернативное ниль-кольцо ограниченного индекса локально право-нильпотентно относительно любого множества своих образующих (кольцо S называется право-нильпотентным относительно множества R своих образующих, если существует такое натуральное число n, что $(\ldots((x_1x_2)x_1)\ldots x_n)=0$, если $x_i\in R$). Из полученных результатов вытекают, в частности, соответствующие теоремы, доказанные для ассоциативного случая Джекобсоном (Jacobson N., Ann. Math., 1945, 46, 695—707) и Левицким (Levitzki I., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 1033—1035). Л. А. Скорняков

165. Слабо стандартные кольца. Сан-Суси (Weakly standard rings. San Soucie R. L.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 1, 80—86 (англ.)

Кольцо называется слабо стандартным, если в нем выполняются следующие тождества: $[a, b, a]=[[a, b], c, d]=[a, [b, c], d]=0$, где $[a, b, c]=(ab)c-a(bc)$, а $[a, b]=ab-ba$. Доказывается, что класс всех ассоциативных или коммутативных колец совпадает с каждым из следующих классов слабо стандартных колец: 1) первичные (т. е. такие, что произведение двух нулевых идеалов кольца всегда отлично от нуля); 2) простые; 3) примитивные (РЖМат, 1956, 5760); 4) простые кольца, в которых выполняются первые два тождества из определения слабой стандартности. Приведены примеры. Л. А. Скорняков

166. Число абсолютных точек корреляции. Гоффман, Ньюман, Штраус, Таусски (On the number of absolute points of a correlation. Hoffman A. J., Newman M., Straus E. C., Taussky O.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 83—96 (англ.)

К изучению указанного в заглавии вопроса привлекаются полиномы матрицы инцидентности. Это позволяет несколько обобщить некоторые результаты Бола (Ball R., Duke Math. J., 1948, 15, 929—940), а также дать для них более простые доказательства. Л. А. Скорняков

167. Замечание к представлению структуры при помощи разбиения множества. Колибиар (Poz-

námka k reprezentácii sväzu pomocou rozkladov množiny. Kolibiar M.), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 2, 79—80 (словацк.; рез. русск.)

Пусть S — структура, определенная на некотором множестве M. Каждому элементу $a \in S$ поставим в соответствие разбиение R^a множества M, при котором два элемента $x, y \in S$ тогда и только тогда принадлежат одному классу разбиений R^a, когда $a \cup x = a \cup y$. Автор доказывает, что структура $\mathfrak{S}$ всех разбиений множества H содержит подмножество X разбиений R^a, которое изоморфно первоначальной структуре S относительно одной структурной операции (пересечения). Если же S является дистрибутивной структурой, то подмножество X образует подструктуру структуры $\mathfrak{S}$, изоморфную структуре S в обычном смысле.

J. Škrášek

168. **О σ-структурах, компактных относительно (*o*)-сходимости. Берлинков М. Л.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 123—127

Последовательность $\{x_n\}$ элементов σ-структуры S (Биркгоф Г., Теория структур. М., 1952, стр. 86) называется (*o*)-сходящейся, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} x_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} x_r$. Если любая последовательность элементов из S содержит (*o*)-сходящуюся подпоследовательность, то структура называется компактной. Прямое произведение конечного или счетного множества компактных σ-структур является компактной σ-структурой. Однако если имеется множество $\mathfrak{M}$ мощности, не меньшей мощности континуума, структур, каждая из которых содержит не менее двух элементов, то прямое произведение этих структур не компактно. Доказываются два критерия компактности структур. Из полученных результатов вытекают многие теоремы предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 4265).

Л. А. Скорняков

169. **О некоторых свойствах пар структур. Якубик Я., Колибиар М.**, Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 1, 1—27 (рез. англ.)

Под производящим разбиением структуры S подразумевается разбиение, определенное некоторым отношением конгруэнтности в S. Если S — дистрибутивная структура с 0 и 1 и если существует дополнение к элементу $t \in S$, то отношение конгруэнтности α, определенное в S при помощи пары элементов $a, t \in S$ формулой $x \equiv y \Leftrightarrow (a, t, x) = (a, t, y)$, где $(a, b, c) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)$, определяет в S производящее разбиение, называемое главным производящим разбиением. Для элементов x, y некоторой структуры S символ $x \prec y$ выражает, что x покрывает y, или y покрывает x. О конечных структурах S, S' говорят, что они графически изоморфны, если существует такое взаимно однозначное отображение φ структуры S на структуру S', что $x \alpha y \Leftrightarrow (x\varphi) \alpha (y\varphi)$. Пусть M — множество, на котором определены структуры S_1, S_2. В работе рассматриваются следующие свойства структур S_1 и S_2:

A. В S_1 и S_2 совпадают все производящие разбиения.

A_1. В S_1 и S_2 совпадают все главные производящие разбиения.

B. В S_1 и S_2 совпадают все выпуклые подструктуры.

C. Структурные операции структуры S_1 взаимно дистрибутивны со структурными операциями структуры S_2.

D. Существуют структуры A и B такие, что $S_1 \simeq A \times B$, $S_2 \simeq \tilde{A} \times B$ ($\tilde{A}$ обозначает структуру, двойственную по отношению к структуре A).

E. Существуют такие элементы t, $t' \in S_1$ (t' есть дополнение к t в структуре S_1), что для структурных операций $\wedge$, $\vee$ в S_2 имеют место следующие отношения: $x \vee y = (x, t, y)$, $x \wedge y = (x, t', y)$ для произвольных $x, y \in M$.

Если M — конечное множество, то рассматривается также следующее свойство:

F. S_1 и S_2 графически изоморфны.

Доказано, что всегда имеют место следующие импликации: $C \Rightarrow B$, $D \Rightarrow A$. В дистрибутивных структурах свойства A, B, C, D эквивалентны. В дистрибутивных структурах с 0 и 1 все названные свойства, за исключением F, эквивалентны. В конечных структурах S_1, S_2 $D \Rightarrow F$, а в конечных дистрибутивных структурах все названные свойства эквивалентны. В дистрибутивных структурах с наименьшим и наибольшим элементом все производящие разбиения определены при помощи главных производящих разбиений. В недистрибутивных структурах $B \Rightarrow C$ может не иметь места.

P. Šik

170. **О графическом изоморфизме полудедекиндовых структур. Якубик** (O grafovom izomorfizme semimodulárnych svätzov. Jakubík Ján), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 3, 162—177 (словацк.; рез. русск.)

Решаются две проблемы, поставленные автором в другой статье (РЖМат, 1955, 4924). В настоящей статье рассматриваются лишь конечные структуры. Важную роль играют структуры, изоморфные структуре, образованной семью элементами $0, a, b, c, d, e, 1$ и содержащей только такие максимальные цепочки: $0 < a < b < 1$, $0 < c < d < 1$, $0 < a < e < 1$. $0 < c < e < 1$. Такие структуры автор называет структурами типа C. Доказывается, что каждая полудедекиндова структура, не являющаяся дедекиндовой, содержит подструктуру типа C.

Основной результат работы следующий (теорема 2): Пусть S, S' — полудедекиндовы графически изоморфные структуры (реф 169) и соответствующий графический изоморфизм сохраняет все подструктуры типа C структур S и S'. Следовательно, существуют такие структуры A и B, что $S \sim A \times B$, $S' \sim \tilde{A} \times B$, где $\sim$ обозначает структурный изоморфизм, $\tilde{A}$ — структуру, двойственную структуре A. На примере показано, что теорема, получающаяся из теоремы 2 опусканием условия о подструктурах типа C, вообще говоря, не имеет места. Этот пример решает первую из указанных проблем.

Вторая проблема решается следующей теоремой: структура S', графически изоморфная дедекиндовой структуре S, дедекиндова.

Для полудедекиндовых структур аналогичная теорема не имеет места.

M. Sekanina

171. **О пополнениях структур и операциях замыкания. Сампеи** (On lattice completions and closure operations. Sampei Yoemon), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1952—1953, I—II, 55—70 (англ.)

Пусть L обозначает структуру, $\mathfrak{L}$ — полную структуру, φ — изоморфное отображение L в $\mathfrak{L}$. Тогда пара $(\mathfrak{L}, \varphi)$ называется пополнением структуры L. Множество $\mathfrak{C}(L)$ всех пополнений структуры L квазиупорядочивается по правилу: $(\mathfrak{L}, \varphi) < (\mathfrak{M}, \psi)$, если существует такой порядковый изоморфизм π структуры $\mathfrak{L}$ в структуру $\mathfrak{M}$, что $\pi \cdot \varphi = \psi$. Если $(\mathfrak{L}, \varphi) < (\mathfrak{M}, \psi)$ по отношению к π и $(\mathfrak{M}, \psi) < (\mathfrak{L}, \varphi)$ по отношению ρ, то $(\mathfrak{L}, \varphi)$ и $(\mathfrak{M}, \psi)$ называются эквивалентными. Если, кроме того, отображения $\pi \cdot \rho$ и $\rho \cdot \pi$ тождественны, то $(\mathfrak{L}, \varphi)$ и $(\mathfrak{M}, \psi)$ называются изоморфными.

В работе изучается связь между пополнениями структур и так называемыми нормальными операциями замыкания в них. Под операцией a в множестве S понимается соответствие $X \to X^a$, отображающее мно-

жество всех подмножеств множества S в себя. Операция a называется операцией замыкания, если для любых подмножеств X и Y выполняются соотношения $X \subseteq X^a$, $X^{aa} = X^a$ и из $X \subseteq Y$ следует $X^a \subseteq Y^a$. Множество $C(S)$ всех операций замыкания, определенных на множестве S, образует полную структуру по отношению к частичному упорядочению: $a \leqslant b$, $a, b \in C(S)$, если $X^a \subseteq X^b$ для всех подмножеств $X \subseteq S$.

Операция замыкания m в структуре L определяется равенством $X^m = \{y | y \leqslant x$ для некоторого $x \in X\}$, $X \subseteq L$. Операция замыкания c в L называется нормальной, если $\{x, y\}^c = \{x \cup y\}^m$, $x, y \in L$. Множество $N(L)$ всех нормальных операций замыкания в L образует полную структуру, в которой наименьшая верхняя грань и наибольшая нижняя грань совпадают с таковыми в $C(L)$. В структуре $N(L)$ имеется наименьший элемент i, определяемый равенством $X^i = \{y | y \leqslant x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$, для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\}$.

Если $(\mathfrak{L}, \varphi)$ является пополнением структуры L, то операция $\mathfrak{L}/L$, определяемая соответствием $X \to \varphi^{-1}(\{\sup \varphi(x)\}^m)$ $(X \subseteq L)$, принадлежит $N(L)$.

Пусть $c \in N(L)$. Множество $L \times c$ всех c-замкнутых множеств структуры L образует полную структуру, являющуюся пополнением структуры L по отношению к функции $\varphi : x \to \{x\}^m$. Отображения $f : c \to L \times c$ и $g : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/L$ устанавливают связь Галуа между структурами $N(L)$ и $\mathfrak{C}(L)$ так, что $g \cdot f$ является тождественным отображением.

Пополнение структуры L называется нормальным, если оно эквивалентно пополнению $L \times c$ для некоторого $c \in N(L)$. Изучается класс $\mathfrak{N}(L)$ всех нормальных пополнений структуры L. Например, доказано, что пополнение $\mathfrak{L}$ структуры L нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L} < L \times i$; эквивалентные нормальные пополнения изоморфны и т. д.

Пусть $X^+ = \{y | y \geqslant x$, для всех $x \in X\}$ и $X^- = \{y | y \leqslant x$, для всех $x \in X\}$. Тогда операция $s : X \to X^{+-}$ является наибольшим элементом в $N(L)$. Так называемые макниловские сечения являются замкнутыми множествами по отношению к этой операции. Поэтому пополнения $L \times s$ называются макниловскими. В множестве $\mathfrak{C}(L)$ существуют наименьшие пополнения. Все они изоморфны пополнениям $L \times s$.

Полученные результаты позволяют автору решить две проблемы Фунаяма (Funayama N., Haibun-Soku no Kanbika ni tuite, Iso Sûgaku, Hokkaidô Univ., 1943, 5, № 1, 44—46): 1) среди всех дистрибутивных пополнений дистрибутивных структур найти наименьшее, 2) найти такой метод вложения дистрибутивной структуры в полную дистрибутивную структуру, при котором полная структура вкладывалась бы в себя.

Структура L называется полубесконечно дистрибутивной, если $x \cap \bigcup_\lambda y_\lambda = \bigcup_\lambda (x \cap y_\lambda)$. Доказывается, что для всякой дистрибутивной структуры существуют полубесконечно дистрибутивные пополнения. Среди таких пополнений имеется наименьшее.

Описки, исправления и дополнения к статье даны в последующей работе автора (реф. 172).

Г. Я. Арешкин

172. Дополнение к статье «О пополнениях структур и операциях замыкания». Сампеи (Supplement to the paper entitled «On lattice completions and closure operations». Sampei Yoemon), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1954, **3**, № 1, 28—40 (англ.)

Дается другое решение второй проблемы Фунаяма (реф. 171).

Г. Я. Арешкин

173. Сдвиги полуструктур. Сас (Die Translationen der Halbverbände. Szász G.), Acta scient. math., 1956, **17**, № 3—4, 165—169 нем.)

Однозначное отображение σ полуструктуры H называется сдвигом, если $\sigma(xy) = \sigma(x)\, y$. Устанавливается, что каждый сдвиг σ обладает свойствами: а) $x \leqslant \sigma(x)$; б) $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$; в) из $x \leqslant y$ следует $\sigma(x) \leqslant \sigma(y)$. Кроме того, доказывается теорема типа теоремы о гомоморфизмах.

Л. А. Скорняков

174. О групповой структуре булевых алгебр. Мори (On the group structure of Boolean lattices. Mori Tuyori), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 7, 423—425 (англ.)

Как известно, каждая булева алгебра B является группой относительно симметричной разности. Показывается, что неотрицательная функция μ, определенная на булевой алгебре B и удовлетворяющая условию $\mu(0) = 0$, тогда и только тогда является конечно аддитивной мерой, когда для каждого элемента $a \in B$ функция

$$f_a(x) = \mu(a) - 2\mu(x)$$

является положительно определенной на подгруппе $[x : x \subset a]$ группы B. Используя это предложение, автор доказывает, что полная булева алгебра измеримых множеств по модулю множеств лебеговой меры нуль, хотя и не имеет нетривиальных непрерывных характеров, но имеет нетривиальное непрерывное унитарное представление.

R. Sikorski

175. Обобщение отношения эквивалентности Артина. Молинаро (Généralisation de l'équivalence d'Artin. Molinaro Italico), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 18, 1767—1769 (франц.)

Пусть дана коммутативная с делением и с единицей e m-структура M (Биркгоф Г., Теория структур. М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. 13). Определяется отношение эквивалентности Артина A_x следующим образом: $a \equiv b\,(A_x)$ тогда и только тогда, когда $x : a = x : b$.

Элемент x называется номальным, если для любого μ, принадлежащего m-структуре M, имеем $\mu(x : x\mu) \equiv e\,(A_x)$, соответствующее отношение A_x называется номальным, а связка, содержащая номальный элемент, также называется номальной.

Даются различные необходимые и достаточные условия для номальности элементов, отношений и связок. Например, α — номальный элемент тогда и только тогда, когда $A_{\alpha : p} = A_\alpha$ для любых p (теорема 4), или, если существует такой элемент k, что $\alpha = \alpha : \alpha k$ (пункт 2 теоремы 5).

Во второй части обобщается понятие целозамкнутости связки, а именно: пусть имеется номальная связка с номальным элементом α, тогда она называется номально замкнутой, если $a : (\alpha : \alpha) \equiv a\,(A_\alpha)$ для всех a. Находится ряд необходимых и достаточных условий для номальной замкнутости связки, например номальная связка тогда и только тогда номальна замкнута, когда $e : (\alpha : \alpha) \equiv e\,(A_\alpha)$ (теорема 3), или для любого μ должно быть $\mu(a : \mu) \equiv a\,(A_\alpha)$ (теорема 5).

Доказываются также некоторые свойства номальных отношений в номально замкнутых связках. Отметим следующее: если $a \equiv a^*\,(A_\alpha)$ и $b \equiv b^*\,(A_\alpha)$, то $a : b = a^* : b^*\,(A_\alpha)$ (теорема 6).

В. Д. Белоусов

176. Некоторые теоремы о представлении для частично упорядоченных множеств. Волк (Some representation theorems for partially ordered sets. Wolk E. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 589—594 (англ.)

Пусть P — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом I. Если $A \subset P$, то через A^* и A^+ обозначим множества всех элементов $p \in P$, для которых соответственно $p \geqslant a$ или $p \leqslant a$ для всех $a \in A$. Согласно определению Фринка (РЖМат, 1955, 2583), множество $A \subset P$ называется двойственным идеалом (для краткости будем называть просто идеалом), если для всякого конечного подмножества $F \subset A$ справедливо включение $F^{+*} \subset A$

Идеал, отличный от $\{I\}$ и от P, называется собственным. Если он при этом не содержится в отличном от него собственном идеале, то он называется максимальным. Идеал, состоящий из всех таких элементов $q \in P$, что $q \geqslant p$, где $p \in P$, называется главным идеалом, порожденным элементом p. Идеал называется приводимым, когда он является пересечением некоторого множества максимальных идеалов. Наконец, идеал K называется простым, если для любых двух приводимых идеалов J_1 и J_2 из $K \supset J_1 \cap J_2$ вытекает, что $K \supset J_1$ или $K \supset J_2$.

Рассматривается совокупность Δ максимальных идеалов нашего частично упорядоченного множества P, обладающая тем свойством, что для каждого отличного от 0 элемента $p \in P$ существует такой идеал $M \in \Delta$, что $p \in M$. Такие совокупности называются накрывающими семействами для P. Если Δ задано, то каждому элементу $p \in P$ ставится в соответствие множество максимальных идеалов $\Omega_p \subset \Delta$. Такое отображение оказывается изоморфным отображением частично упорядоченного множества P в подмножество множества 2^{Δ} всех подмножеств множества Δ, если только P дизъюнктивно, т. е. для каждой пары элементов a, $b \in P$, $a \not\leqslant b$ существует такой элемент $c \in P$, что $\{a, c\}^{+} \neq \{0\}$, $\{b, c\}^{+} = \{0\}$.

Доказываются следующие теоремы: 1. Рассмотренное частично упорядоченное множество P тогда и только тогда изоморфно множеству всех подмножеств некоторого множества S, когда P дизъюнктивно и существует такое накрывающее семейство Δ для P, что $\bigcap_{M \in \Sigma} M$ есть главный собственный идеал для каждого непустого собственного подмножества $\sum \subset \Delta$. 2. Дизъюнктивное частично упорядоченное множество P, в котором каждый максимальный идеал прост, изоморфно базису замкнутых множеств некоторого компактного T_1-пространства (для доказательства этого в множество максимальных идеалов для P вводится подходящая топология). 3. Полная атомная дизъюнктивная структура с множеством точек S тогда и только тогда изоморфна структуре всех замкнутых множеств некоторого T_1-пространства, когда из $p \in S$ и $p \leqslant a \cup b$ вытекает, что $p \leqslant a$ или $p \leqslant b$. 4. Если B — допустимый базис замкнутых множеств компактного T_1-пространства X, т. е. такой, что любое непустое пересечение конечного числа элементов из B содержит элемент из B, то структура базиса B определяет пространство X с точностью до гомеоморфизма. М. Ф. Бокштейн

177. О плотных подструктурах нормированных булевских алгебр. Ривкинд Я. И., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, 1, 59—66

Подструктуру B^* булевой алгебры B автор называет плотной на B, если для каждого элемента $a \in B$ существует такой элемент $a^* \in B^*$ $(a^* \neq 0)$, что $a^* < a$ и подалгебра B_{a^*} всех элементов алгебры B, подчиненных элементу a^*, принадлежит подструктуре B^*. Доказывается, что пересечение счетного множества плотных подструктур является также плотной подструктурой. Устанавливается, что если B^* является плотной подструктурой нормированной булевой алгебры B, то для каждого $\varepsilon > 0$ и $a \in B$ существует такой элемент $a_{\varepsilon}^* \in B^*$, что $a_{\varepsilon}^* < a$ и $\mu(a - a_{\varepsilon}^*) < \varepsilon$, где $\mu(a)$ — норма элемента a. Автор указывает, как при помощи этих теорем можно получить известные теоремы Егорова и Лузина из теории функций.

Далее автор рассматривает нормированные булевы алгебры следующего специального вида. Берется множество Ω с выделенным борелевским телом подмножеств, на котором задана неотрицательная и счетно-аддитивная мера $\mu(E)$. Два подмножества E и F множества Ω имеют тот же метрический тип, если $\mu(E - F) + \mu(F - E) = 0$. Множество метрических типов множества Ω образует булеву алгебру $B(\Omega, \mu)$. Предполагается, что Ω и μ таковы, что 1. в $B(\Omega, \mu)$ нет атомов (наименьших ненулевых элементов), 2. в $B(\Omega, \mu)$ существует такое счетное подмножество, что борелевское тело, им порожденное, совпадает с $B(\Omega, \mu)$. Исследуется булева алгебра $B(\Omega, \mu)$ с выделенной плотной подструктурой $B^*(\Omega, \mu)$. Пусть на $B^*(\Omega, \mu)$ задана функция $\nu^*(E)$ элемента $E \in B^*(\Omega, \mu)$, причем из $\mu(E) = 0$ следует $\nu^*(E) = 0$. Образованию $\{B, \mu, B^*, \nu^*\}$ ставится в соответствие функция $\frac{\nu^*}{\mu}(E) = \frac{\nu^*(E)}{\mu(E)}$, называемая средней функцией. Доказывается теорема: если аддитивная функция $\nu^*(E)$, заданная на $B^*(\Omega, \mu)$, абсолютно непрерывна относительно $\mu(E)$, то $\nu^*(E) = \int_E f(P)\mu(dE_p)$ для $E \in B^*(\Omega, \mu)$. Функциями $\nu^*(E)$ и $\mu(E)$ функция $f(P)$ определяется однозначно с точностью до множеств μ-меры нуль. Таким образом, всякая средняя функция однозначно определяет измеримую функцию точки $f(P)$ в Ω. Верно и обратное: всякая измеримая функция $f(P)$ при заданной мере $\mu(E)$ однозначно определяет по той же формуле среднюю функцию $\frac{\nu^*}{\mu}(E)$ на плотной подструктуре $B^*(\Omega, \mu)$. Если для данной функции $f(P)$ и двух эквивалентных мер μ_1 и μ_2 построить средние, то они могут оказаться различными. Такие средние функции называются принадлежащими одному классу. Две функции $G_1(E)$ и $G_2(E)$, заданные на подструктуре $B^*(\Omega, \mu)$, называются эквивалентными на B^*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое плотное подмножество $M_{\varepsilon}^* \subset B^*$, что для всякого $E \in M_{\varepsilon}^*$ выполняется неравенство $|G_1(E) - G_2(E)| < \varepsilon$. Доказывается, что при $\mu_1 \sim \mu_2$ необходимым и достаточным условием для того, чтобы две средние $\frac{\nu_1^*}{\mu}(E)$ и $\frac{\nu_2^*}{\mu_2}(E)$, определенные на $B^*(\Omega, \mu)$, были средними того же класса, является эквивалентность этих средних на B^*. Я. В. Хион

178. О представлении квазибулевых алгебр. Бялыницкий-Бируля, Расёва (On the representation of quasi-Boolean algebras. Białynicki-Birula A., Rasiowa H.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 3, 259—261 (англ.; рез. русск.)

Абстрактная алгебра $\langle A, +, \cdot, \sim \rangle$ называется квазибулевой, если $\langle A, +, \cdot \rangle$ является дистрибутивной структурой с элементами 0 и 1, а $\sim$ — одноместная операция, удовлетворяющая условиям $\sim\sim a = a$ и $\sim(a \cdot b) = \sim a + \sim b$ для a, $b \in A$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное непустое множество, а g — такое взаимно однозначное отображение его на себя, что $g(g(x)) = x$ для всякого $x \in \mathfrak{X}$. Полагая $\sim X = \mathfrak{X} - g(X)$ для всякого подмножества $X \subset \mathfrak{X}$ и рассматривая произвольное семейство подмножеств множества $\mathfrak{X}$, замкнутое относительно операций $\sim$, и $+$, получаем некоторую квазибулеву алгебру; каждую такого рода алгебру назовем квазителом множеств.

Применяя метод Стоуна, авторы доказывают, что всякая квазибулева алгебра изоморфна некоторому квазителу множеств. Из резюме авторов

179. Подпрямые произведения моделей. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266

Теорема Биркгофа о разложимости любой абстрактной алгебры в подпрямое произведение далее нераз-

ложимых сомножителей относится к классу всех алгебр, хотя в некоторых случаях желательно иметь аналогичную теорему для более узких или для более широких классов. В работе указывается довольно широкая система классов, внутри которых теорема, аналогичная теореме Биркгофа, заведомо имеет место. При этом оказалось целесообразным перейти от алгебр к моделям. Рассматриваются классы таких моделей, в которых среди основных отношений находится и отношение равенства $\equiv$. Класс однотипных моделей называется абстрактным, если вместе с некоторой моделью он содержит и все изоморфные ей. Пусть $\langle A;\ P_1,\ P_2 \ldots\rangle$ и $\langle B;\ P_1,\ P_2 \ldots\rangle$ — две модели одинакового типа. Отношение σ на множествах A, B называется гомоморфизмом модели A на модель B, если

$$a_1 \sigma b_1 \,\&\, \ldots \,\&\, a_{n_s} \sigma b_{n_s} \,\&\, P_s(a_1, \ldots, a_{n_s}) \to P_s(b_1, \ldots, b_{n_s})$$
$$(a_i \in A,\ b_i \in B_i;\ s = 1, 2, \ldots;\ P_1 = \equiv).$$

Абстрактный класс моделей называется H-классом, если он вместе с некоторой моделью содержит и все ей гомоморфные. Доказывается, что для того чтобы абстрактный класс моделей был H-классом, необходимо и достаточно, чтобы он состоял из всех моделей, удовлетворяющих аксиомам вида

$$(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где Q_i — произвольные кванторы, а $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, составленная из выражений вида $P_s(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_s}})$ только при помощи операций &, $\vee$. Пусть K — некоторый абстрактный класс моделей. Модель M называется K-неразложимой, если в любом разложении модели M в подпрямое произведение моделей класса K одно из проектирований является изоморфизмом. Доказывается, что абстрактный класс K моделей тогда и только тогда содержит всевозможные подпрямые произведения своих моделей, когда в решетке $R(M)$ всех моделей типа K, определенных на произвольном множестве M, совокупность $K(M)$ моделей класса K является полной нижней подполугруппой в $R(M)$, т. е. когда $K(M)$ содержит произвольные произведения (в смысле произведений в $R(M)$) своих моделей. Доказывается, что для того чтобы модель A класса K была подпрямым произведением K-неразложимых K-моделей, необходимо и достаточно, чтобы для каждого основного отношения P_s и каждых $a_1, \ldots, a_s$ из A, обращающих в ложное утверждение $P_s(a_1, \ldots, a_{n_s})$, существовали такие $b_1, b_2, \ldots, b_{n_s}$ в A и такой предикат P_t, чтобы совокупность K-моделей, содержащих A и обращающих в ложное утверждение $P_t(b_1, \ldots, b_{n_t})$, имела хотя бы одну максимальную модель $A(s, b)$, в которой утверждение $P_s(a_1, \ldots, a_{n_s})$ было ложным. Имеет место следующая основная теорема: В любом классе K-моделей, характеризуемом произвольной системой аксиом вида (1) и произвольной системой аксиом вида

$$(x_1) \ldots (x_m)\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m), \qquad (2)$$

где $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ составлено из предложений вида $P_s(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_s}})$ при помощи операций &, $\vee$, $^-$, каждая модель может быть разложена в подпрямое произведение K-неразложимых K-моделей. В частности, теорема о разложимости справедлива для алгебр, удовлетворяющих произвольной системе универсальных аксиом вида (2). К таким классам, например, относятся классы колец, вложимых в тела, колец без делителей нуля, полугрупп, вложимых в группы, и т. п. В. А. Андрунакиевич

180. **Заметка о свободных алгебраических системах. Фудзивара** (Note on free algebraic systems. Fujiwara Tsuyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 9, 662—664 (англ.)

Доказано четыре простых предложения об алгебраических системах, заданных тождественными и определяющими соотношениями. Два первых предложения являются перенесением на случай общих алгебраических систем теоретико-групповой теоремы Дика и ей обратной. Ю. И. Соркин

181 К. **Геометрическая алгебра. Артин** (Geometric algebra. Artin Emil., New York — London, Interscience, 1957, X, 214 pp., ill., 48 sh.), Brit. Nat. Bubliogr., 1957, № 379, 10 (англ.)

См. также: 214, 376, 485, 615, 658, 659, 660, 661, 662, 690, 699, 706, 709, 713Д, 749, 750, 751, 752, 754, 759.

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

182. **Понятия общей топологии, способы задания топологических пространств. Пизо** (Notions de topologie générale, procédés de constructions d'espaces topologiques. Pisot Ch.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 185, 335—338 (франц.)

Приводятся определения основных понятий общей топологии и простейшие примеры. А. С. Шварц

183. **Теорема Гейне-Бореля. Хейс** (The Heine-Borel theorem. Hayes C. A., Jr), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 180—182 (англ.)

Дается доказательство теоремы Гейне-Бореля (о компактности замкнутых ограниченных подмножеств евклидова пространства), отличное от общепринятого. Л. Е. Майстров

184. **Теория кос. Артин** (組み糸の理論. Artin Emil 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 194 (японск.)

Определение и основные свойства группы кос.

185. **Перечисление графов с отмеченными вершинами и с отмеченными ребрами. Джилберт** (Enumeration of labelled graphs. Gilbert E. N.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 405—411 (англ.)

Число графов, натянутых на v фиксированных точек и имеющих λ ребер, равно, очевидно, $\binom{\frac{1}{2}v(v-1)}{\lambda}$. Если допускаются кратные ребра (т. е. ребра, имеющие общие вершины), то это число увеличивается до $\binom{\frac{1}{2}v(v-1)+\lambda-1}{\lambda}$. Автор рассматривает также совокупность графов с петлями (т. е. ребрами, имеющими единственную вершину), а также совокупность графов, имеющих и кратные ребра, и петли (в этом случае петли также могут быть кратными). Наконец,

автор рассматривает ориентированные графы (т. е. графы, каждое ребро которых снабжено ориентацией).

Обозначим через $T_{t,\lambda}$ число связных графов одного из упомянутых выше типов. Автор показывает, что $T_{t,\lambda} = v!a_{t,\lambda}$, где коэффициенты $a_{t,\lambda}$ определяются формальным равенством

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{t,\lambda}x^t y^\lambda = \log\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(1+\alpha y)^{\alpha\beta(i)}\frac{x^i}{i}\right),$$

причем $\alpha = -1$, если допускаются кратные ребра, $\alpha = 1$ в противном случае, $\beta(i) = \binom{i}{2}$ для графов без петель, $\beta(i) = \binom{i+1}{2}$ для графов с петлями, $\beta(i) = i(i-1)$ для ориентированных графов без петель. $\beta(i) = i^2$ для ориентированных графов с петлями.

Кроме того, автор доказывает аналогичные формулы для числа графов, имеющих λ отмеченных ребер и данное число вершин. J. Mycielski

186. **Группоиды Леви в применении к линейным графам. Сабидусси** (Loewy-groupoids related to linear graphs. Sabidussi Gert), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 477—487 (англ.)

Пусть H — подграф не имеющего петель графа G. Через $M(G, H)$ обозначим множество симплициальных отображений графа H в граф G, переводящих ребра в ребра, через $\mathfrak{H}$ — группу автоморфизмов графа H. Доказывается, что множество $M(G, H)$ относительно композиции преобразований является левым группоидом Леви с ядром $\mathfrak{H}$, т. е. что группа $\mathfrak{H}$ является максимальной подгруппой группоида $M(G, H)$, по которой этот группоид может быть разложен на левые классы смежности. Множество отображений $M(G, H)$ порождает множество $M_0(G, H)$ преобразований вершин и множество $M_1(G, H)$ преобразований ребер. Изучаются свойства этих множеств и их взаимоотношения с множеством $M(G, H)$.

Имеются некоторые другие результаты. Опечатка на стр. 478, строка 7 снизу: вместо $M(G, M)$ должно быть $M(G, H)$. А. А. Зыков

187. **Полные системы окрестностей множеств в общих топологических пространствах. Секанина** (Úplné systémy okolí množin v obecných topologických prostorech. Sekanina Milan), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1956, A13, B8, № 4, 185—192 (чешск.; рез. русск., франц.)

Если $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — две системы подмножеств множества P, то $\mathbf{N}$ называется полной системой относительно $\mathbf{M}$, когда для каждого множества $X \in \mathbf{M}$ найдется содержащееся в нем множество $X_1 \in \mathbf{N}$. Пусть каждому множеству $X \subset P$ придана система $\mathfrak{B}(X)$ подмножеств из P. Показывается, что наисильнейшая из всех топологий на множестве P, при которых для каждого множества $X \subset P$ все множества системы $\mathfrak{B}(X)$ будут окрестностями этого множества X, есть топология w, при которой за окрестности точки x принимаются множества, являющиеся элементами всех систем $\mathfrak{B}(X)$, для которых $x \in X$ (определения понятий топологии, упорядочения топологий и окрестности — см. РЖМат, 1957, 1217). Отсюда следует, что для существования топологии, при которой полными системами окрестностей множеств $X \subset P$ (т. е. системами окрестностей, полными относительно систем всех окрестностей множеств X) служат данные системы $\mathfrak{B}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом X система $\mathfrak{B}(X)$ была полной относительно системы всех окрестностей множества X в топологии w.

Далее рассматривается общее топологическое пространство, образованное множеством P с топологией u. Изучается система $\mathfrak{S}$ всех топологий v, для которых система всех окрестностей множеств $X \subset P$ в топологии u будет полной системой окрестностей X в топологии v. Определяется понятие sM-топологии — это такая топология, при которой для $M_1 \subset M_2 \subset P$ никогда не может иметь места строгое включение $(M_1)^i \supsetneq (M_2)^i$, где M^i есть внутренность множества M, т. е. множество $P \setminus u(P \setminus M)$. Доказываются некоторые свойства системы $\mathfrak{S}$, в частности, что максимальным (наисильнейшим) элементом из $\mathfrak{S}$ является топология u и что множество всех минимальных элементов из $\mathfrak{S}$ совпадает с множеством всех sM-топологий из $\mathfrak{S}$. М. Ф. Бокштейн

188. **Замечание о некоторых пространствах отображений. Рудина, Кли** (A note on certain function spaces. Rudin Mary Ellen, Klee V. L., Jr), Arch. Math., 1957, **7**, № 6, 469—470 (англ.)

Пусть X и Y — сепарабельные метрические пространства и $C(X, Y)$ — пространство непрерывных отображений пространства X в пространство Y с топологией поточечной сходимости. Доказывается, что всякое подмножество пространства $C(X, Y)$ совершенно нормально и финально компактно (Пространство называется финально компактным — обладает свойством Линделефа, в терминологии авторов, — если из любого открытого покрытия этого пространства можно выбрать счетное). А. С. Шварц

189. **Об одном методе изучения весьма общих абстрактных пространств. Жемона** (Su di un metodo per lo studio di spazi astratti molto generali. Geymonat Ludovico), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 3—4, 360—366 (итал.)

Первая из ряда статей автора и его последователей (РЖМат, 1955, 4296; 1956, 5147; 1957, 3865, 3866), в которых изучаются некоторые приемы изменения топологии общих топологических пространств. Здесь впервые определяется понятие сопряженной топологизации множества (РЖМат, 1956, 5147). Показывается, что если в данном пространстве выполняется аксиома невозрастания $\overline{E} \supset \overline{E \cup F}$, то сопряженное пространство будет V-пространством, т. е. в нем будет выполняться аксиома неубывания $\overline{E} \subset \overline{E \cup F}$. С другой стороны, показывается, что если в данном V-пространстве не все непустые множества имеют замыканием все пространство и если ни на одном дополнении к таким замыканиям не порождается топология, в которой множества совпадают со своими замыканиями, то пространство, сопряженное к данному пространству, не будет V-пространством. М. Ф. Бокштейн

190. **О некоторых классах топологических пространств. Хан Хен Гон**, Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 959—961

Автор для любого регулярного кардинального числа $\mathfrak{a} \geqslant \aleph_1$ называет топологическое пространство X пространством класса $R_{\mathfrak{a}}$, если оно имеет $(NS)_{\mathfrak{a}}$-базу, т. е. базу, представимую в виде суммы менее чем $\mathfrak{a}$ локально-конечных систем множеств. В работе доказывается, что нормальное пространство X тогда и только тогда является пространством класса $R_{\mathfrak{a}}$, если оно без изменения топологии может быть превращено в равномерное пространство равномерного веса $< \mathfrak{a}$ (при этом равномерным весом равномерного пространства называется наименьшая мощность конфинальной подструктуры равномерной структуры — как частично упорядоченного множества покрытий данного равно-

мерного пространства). Далее доказывается, что в пространствах класса $R_{\mathfrak{a}}$ некоторые известные свойства топологических пространств оказываются эквивалентными, а именно: свойство иметь вес $< \mathfrak{a}$, стационарность вполне упорядоченной по типу $\omega(\mathfrak{a})$ последовательности замкнутых (возрастающих или убывающих) множеств, отсутствие дизъюнктивной системы открытых множеств мощности $\mathfrak{a}$, финальная компактность, начиная с $\mathfrak{a}$ (из всякого открытого покрытия можно выбрать подпокрытие мощности $< \mathfrak{a}$), из всякого покрытия мощности $\mathfrak{a}$ можно выбрать покрытие меньшей мощности. При $\mathfrak{a} = \aleph_1$, как следует из метризационной теоремы Нагата—Смирнова, все эти свойства переходят в хорошо известные свойства метрических пространств. П. С. Александров

191. Равномерные пространства с единственной структурой. Ньюнс (Uniform spaces with unique structure. Newns W. F.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 1, 48—52 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Следующие свойства вполне регулярного пространства R эквивалентны: а) пространство R имеет только одну равномерную структуру; б) пространство R имеет только одну прекомпактную равномерную структуру; в) из каждой пары функционально отделимых замкнутых подмножеств пространства R по крайней мере одно бикомпактно; г) для каждого окружения V диагонали любой равномерной структуры, совместимой с топологией R, найдется множество $A \subset R$, имеющее в R бикомпактное дополнение и удовлетворяющее условию $A \times A \subset V$.

Всякое пространство R, имеющее единственную равномерную структуру, локально бикомпактно; если оно не бикомпактно, то его единственное бикомпактное расширение является расширением П. С. Александрова.

2. Нормальное пространство с единственной равномерной структурой компактно.

3. Всякое замкнутое множество нормального пространства с единственной равномерной структурой также имеет лишь одну равномерную структуру.

4. Если каждое замкнутое подмножество вполне регулярного пространства имеет лишь одну равномерную структуру, то пространство нормально.

5. Вполне регулярное пространство, являющееся непрерывным образом вполне регулярного пространства с единственной равномерной структурой, также имеет лишь одну равномерную структуру.

Указывается, что известное пространство А. Н. Тихонова имеет единственную равномерную структуру, но в то же время не компактно, вопреки утверждению Дикинсона (РЖМат, 1953, 626). Некоторые из приведенных утверждений доказаны ранее Дикинсоном и Доссом (Doss R., Amer. J. Math., 1949, 71, 19—23).

Примечание референта. Из рассуждений автора легко получить, что свойство псевдокомпактности (отсутствие неограниченных непрерывных функций) эквивалентно свойству а). Так как для нормальных пространств свойства псевдокомпактности и компактности эквиваленты, то теорема 2 обратима. Ю. М. Смирнов

192. Поправка к моей заметке «Относительно производных пределов и последовательностей множеств в полных метрических пространствах». Сюй Личжи. (關於完全度量空間中的誘導極限及點集序列》一文的修正. 徐治利(, 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 1, 166 (кит.; рез. англ.)

Незначительная поправка к указанной в заголовке заметке (Chinese J. Math., 1951, 1, 88—97).

А. С. Шварц

193. Пример, противоречащий теореме Гамильтона. Кейпел, Стротер (A theorem of Hamilton: counterexample. Capel C. E., Strother W. L.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 57 (англ.)

Поправка к теореме Гамильтона. Гамильтон (A theorem of Hamilton: correction. Hamilton O. H.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 59 (англ.)

Пример, противоречащий теореме Гамильтона (Duke Math. J., 1947, 14, 689—693), и поправка к этой теореме. А. С. Шварц

194. Новое доказательство основной теоремы гомологической теории размерности. Бокштейн М. Ф., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 13—44

Основная теорема гомологической теории размерности (т. е. теорема о совпадении урысоновской размерности с гомологической ∇-размерностью по группе целых чисел) доказывается заново для бикомпактов, причем доказываются и все вспомогательные предложения, так что работа предполагает лишь знание элементарного курса комбинаторной топологии.

П. С. Александров

195. К теории размерности для компактов в R^n. Бауэр (Zur Dimensionstheorie der Kompakten im R^n. Bauer Friedrich-Wilhelm), Math. Ann., 1956, 131, № 5, 393—410 (нем.)

Размерностной функцией автор называет всякую функцию $f_q(M)$ $(q = -1, 0, 1\ldots)$ от всех компактных подмножеств M данного множества, принимающую на них действительные неотрицательные значения, обращающуюся в нуль тогда и только тогда, когда $\dim M \leqslant q$, полунепрерывную, т. е. такую, что $\overline{\lim} f_q(M_i) = f_q(\lim M_i)$ для любой сходящейся последовательности множеств, и монотонную; в случае $q = -1$ $f_q(M)$ считается равной нулю для пустого и единице для непустого множества. Отмечается, что примером такой функции может служить операция, применяемая с той же целью, что и у автора, К. Ситниковым (Докл. АН СССР, 1951, № 2). Основным результатом работы является следующая теорема: Если φ — r-мерный компакт в R^n, а f_q — произвольная размерностная функция $(q = -1, 0, 1\ldots)$, то для каждой целочисленной p-мерной цепи c^p в R^n, граница которой лежит вне множества φ, и для каждого положительного числа ε в ε-окрестности этой цепи найдется такая гомологичная ей цепь c_1^p, для которой $f_{r+p-n}(\bar{c}_1^p \cap \varphi) < \varepsilon$; с другой стороны, найдется такая цепь c^p, граница которой лежит вне φ, и такое число $\gamma > 0$, что для всех гомологичных ей цепей c_1^p в ее γ-окрестности будет $f_{r+p-n-1}(\bar{c}_1^p \cap \varphi)^1 > \gamma$ (через $\bar{c}_1^p$ обозначен носитель цепи c_1^p). Показывается также (для первой половины теоремы), что это предложение остается справедливым и для некомпактных множеств, если обычные полиэдральные цепи заменить сходящимися последовательностями цепей. Отмечается, что из полученных автором результатов вытекают теоремы П. С. Александрова о препятствиях для компактов и для незамкнутых множеств в R^n (РЖМат, 1954, 2537). Подчеркивается отличие метода доказательства автора от методов Александрова и Ситникова, использующих гомологическую размерность, тогда как автор ведет доказательство по индукции, применяя непосредственно индуктивное определение размерности. М. Ф. Бокштейн

196. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. Ситников К., Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 4, 444—449 (рез. франц.)

Обзор результатов, содержащихся в работах автора (РЖМат, 1954, 4769; 1955, 2147; 1957, 2960).

П. С. Александров

197. Замечание о пространствах отображений. Морита (Note on mapping spaces. Morita Kiiti), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 9, 671—675 (англ.)

Множество непрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y условимся снабжать компактно открытой топологией и обозначать Y^X.

Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, Z — топологическое пространство. Непрерывному отображению f произведения $X \times Y$ в пространство Z поставим в соответствие отображение f^* пространства Y в пространство отображений Z^X с помощью формулы $[f^*(y)](x) = f(x, y)$. Соответствие $f \to f^*$ определяет мономорфное отображение $\theta : Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y$. Автор доказывает, что отображение θ всегда является гомеоморфным отображением $Z^{X\times I}$ в $(Z^X)^I$. Он показывает, что отображение θ является эпиморфизмом в каждом из следующих трех случаев: а) пространство X локально бикомпактно; б) пространства X и Y удовлетворяют первой аксиоме счетности, в) пространство X является CW-комплексом в смысле Уайтхеда. В первых двух случаях этот факт был доказан Фоксом (Fox, Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 429—432). А. С. Шварц

198. Локальная связность пространств отображений. Вада (Local connectivity of mapping spaces. Wada Hidekazu), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 419—425 (англ.)

Пространство X называется локально m-связным (в гомотопическом смысле), если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x можно найти окрестность V точки x, содержащуюся в окрестности U и асферическую в размерностях $0, 1, \ldots, m$. Пространство X называется полулокально m-связным, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x существует окрестность V точки x, содержащаяся в U, асферическая в размерностях $0, 1, \ldots, m-1$ и обладающая тем свойством, что всякое отображение m-мерной сферы в множество V гомотопно нулю в пространстве X.

Пусть P — n-мерный конечный полиэдр, X — хаусдорфово пространство, X^P — пространство непрерывных отображений полиэдра P в X с компактно-открытой топологией. Доказывается следующая теорема: если X локально m-связно, то X^P локально $(m-n)$-связно. Дается обобщение этой теоремы, оценивающее локальную связность подмножеств пространства X^P, состоящих из отображений $f : P \to X$, при которых данные подполиэдры полиэдра P отображаются в фиксированные замкнутые подмножества пространства X. Указывается, что аналогичные результаты имеют место, если вместо локальной m-связности рассматривать полулокальную m-связность. J. W. Jaworowski

199. О гомологиях пространств отображений. Мардешич (On the homology of function spaces. Mardešić Sibe), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 3—4, 169—242 (англ.; рез. сербохорв.)

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 8680; 1957, 2145). А. С. Шварц

200. Поправки к статье: «К общей теории точечных преобразований. Гуггенхеймер (Correzione alla nota: Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali. Guggenheimer H.), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 590 (итал.)

Отмечаются имеющиеся в приведенной статье неточности, указанные автору референтом (РЖМат, 1957, 1253). М. Ф. Бокштейн

201. Замечание об открытых отображениях. Смейл (A note on open maps. Smale Stephen), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 391—393 (англ.)

Рассмотрим тройку (X, p, Y), состоящую из двух топологических пространств X и Y и отображения $p : X \to Y$. Автор говорит, что тройка (X, p, Y) удовлетворяет условию A, если X — локально линейно связное хаусдорфово пространство, Y — полулокально односвязное метрическое пространство, p — такое открытое отображение X на Y, что прообраз всякого бикомпактного подмножества пространства Y бикомпактен. Доказывается следующая теорема: Пусть тройка (X, p, Y) удовлетворяет условию A. Тогда для любого пути f в пространстве Y и любой точки $q \in p^{-1}f(0)$ существует такой путь f в пространстве X, что $f(0) = q$, $pf(1) = f(1)$ и путь pf гомотопен пути f. Из этой теоремы выводится, что в случае, когда тройка (X, p, Y) удовлетворяет условию A, группа $p_*\pi_1(X)$ имеет в группе $\pi_1(Y)$ конечный индекс. А. С. Шварц

202. Гомотопические группы одномерных пространств. Кертис, Форт (Homotopy groups of one-dimensional spaces. Curtis M. L., Fort M. K., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 577—579 (англ.)

Пусть S — одномерное сепарабельное метрическое пространство. Доказывается, что гомотопические группы $\pi_k(S) = 0$ для всех $k > 1$. А. С. Шварц

203. i-произведения коцепей в сингулярной кубической теории. Васкес-Гарсия (Los productos-i de cocadenas en la teoria singular cubica. Vázquez García R.), Bol. Soc. mat. mexicana, 1954, 11, № 1—4, 9—32 (исп.)

Подробно строится теория i-произведений коцепей по модулю 2 в сингулярной кубической теории и показывается, что соответствующие квадраты классов когомологий пространства удовлетворяют условиям, характеризующим квадраты Стинрода.

Опечатки: Определение отображения T в начале стр. 13 следует читать так: $T(\zeta_1 \times \zeta_2) = (-)^{p_1 p_2} \zeta_2 \times \zeta_1$; при доказательстве 3.54 на стр. 29 ссылку на 3.37 следует заменить ссылкой на 3.27. М. Ф. Бокштейн

204. По поводу квадратов в многообразии Грассмана. Ву Вень-цзюнь (On squares in Grassmannian manifolds. Wu Wen-tsün), 中國科學, Чжунго кэсюэ, Acta sci. sinica, 1953, 2, № 2, 91—115 (англ.)

Подробное изложение результатов, опубликованных в C. r. Acad. sci., 1950, 230, 918—920. Вычисляется действие квадратов Стинрода в кольце когомологий многообразия Грассмана $G_{n,m}$ m-мерных подпространств в $(n+m)$-мерном евклидовом пространстве. Как известно, кольцо когомологий многообразия $G_{n,m}$ по модулю 2 порождается классами когомологий w^i размерностей $i = 1, 2, \ldots, m$ (Классам w^i соответствуют приведенные по модулю 2 характеристические классы Штифеля—Уитни косого произведения со структурной группой $SO(m)$). Доказывается следующая формула:

$$Sq^r w^s = \sum_{t=0}^{r} \binom{s-r+t-1}{t} w^{r-t} w^{s+t} \quad (s \geqslant r \geqslant 0).$$

Из этой формулы выводится, что все классы когомологий по модулю 2 многообразия $G_{n,m}$ выражаются с помощью произведения Колмогорова—Александера и квадратов Стинрода через классы w^{2^k}, где $0 \leqslant 2^k \leqslant m$. В то же время никакой из классов w^{2^k} не может быть выражен через остальные классы w^j с помощью про-

изведения Колмогорова—Александера и квадратов Стинрода. В. П. Бурдина

205. **Гомотопические группы групп Ли. I, II. Борель** (Groupes d'homotopie des groupes de Lie, I. II. Borel A.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), 2, № 12, 1—8; № 13, 1—3 (франц.)

После применения некоторых основных понятий теории групп Ли доказывается, что для простой несвязной компактной группы Ли фундаментальная группа конечна (теорема Вейля), вторая гомотопическая группа тривиальна (теорема Картана), а ранг третьей равен единице (теорема Косуля). Для классических групп (а также для исключительных групп G_2 и F_4) указаны значения их третьей, четвертой и пятой гомотопических групп (без доказательства). М. М. Постников

206. **Квадраты Стинрода. I, II. Картан** (Carrés de Steenrod. I, II. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), 2, № 14, 1—10; № 15, 1—10 (франц.)

Краткое, но достаточно полное изложение теории квадратов Стинрода. М. М. Постников

207. **Характеристические классы расслоенных пространств. I. Кольца когомологий многообразий Грассмана. Увень-цзюнь** (Les classes caractéristiques d'un espace fibré. I: Cohomologie des grassmanniennes. Wu Wen-Tsün), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), 2, № 17, 1—7 (франц.)

Изложено известное вычисление колец когомологий (по модулю 2) многообразий Грассмана (с помощью клеточных разбиений этих многообразий) и доказана теорема двойственности Уитни. М. М. Постников

208. **Характеристические классы расслоенных пространств. II. Увень-цзюнь** (Les classes caractéristiques d'un espace fibré. II. Wu Wen-Tsün), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), 2, № 18, 1—5 (франц.)

Излагается известная теория первого препятствия к распространению секущих поверхностей. Для пространств, расслоенных на сферы, доказываются некоторые элементарные свойства их характеристических классов Штифеля-Уитни (в частности, известная теорема Понтрягина). М. М. Постников

209. **О гомологических группах Эйленберга-Маклейна. Накамура** (Eilenberg—MacLane のホモロジー群について. 中村得之), 數學, Сугаку, 1955, 7, № 2, 89—98 (японск.)

Некоторые результаты о группах $H(\Pi, q, Z)$. Лю Чун Хо

210. **О категории Люстерника-Шнирельмана для абстрактных групп. Эйленберг, Ганя** (On the Lusternik—Schnirelmann category of abstract groups. Eilenberg Samuel, Ganea Tudor), Ann. Math., 1957, 65, № 3, 517—518 (англ.)

Пусть Π — абстрактная группа. Размерностью группы Π (обозначается $\dim \Pi$) называется наименьшее целое число n, удовлетворяющее условию $H^q(\Pi, A) = 0$ для всех $q > n$ и всех абелевых групп A, в которых действует группа Π. Геометрической размерностью (geom. $\dim \Pi$) группы Π называется наименьшая размерность связного клеточного комплекса K_Π, у которого фундаментальная группа изоморфна Π, а все остальные гомотопические группы тривиальны. Категорией ($\operatorname{cat} \Pi$) группы Π называется категория комплекса K_Π в смысле Люстерника—Шнирельмана.

Теорема. Для любой группы Π, категория которой не равна 3, имеют место равенства $\dim \Pi = \operatorname{cat} \Pi - 1 = \text{geom. } \dim \Pi$. Если $\operatorname{cat} \Pi = 3$, то возможны следующие четыре случая: 1) $\dim \Pi = 1$, geom. $\dim \Pi = 2$; 2) $\dim \Pi = 1$, geom. $\dim \Pi = 3$; 3) $\dim \Pi = 2$, geom. $\dim \Pi = 3$; 4) $\dim \Pi = \text{geom. } \dim \Pi = 2$.

Неизвестно, имеет ли на самом деле место какой-либо из случаев 1)—3). А. С. Шварц

211. **Вторые препятствия для секущих поверхностей. Болтянский В. Г.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 1, 99—136

Пусть P — косое произведение с $(r-1)$-связным ($r \geqslant 2$) слоем C, для которого первое препятствие (к распространению секущих поверхностей) тривиально. Предполагается, что группа G преобразований слоя (эффективная и транзитивная) обладает локальной секущей поверхностью, а ее стабильная подгруппа Γ (в некоторой точке $c \in C$) линейно связна. Пусть s — секущая поверхность произведения P над $(r+1)$-мерным остовом B^{r+1} его базы B и пусть Γ_x — множество всех допустимых отображений $C \to C_x$, переводящих точку C в точку $s(x)$. Множества Γ_x естественным образом определяются как слои некоторого косого произведения с базой B^{r+1}. Пусть $\tilde{y}^2_s \in H^2(B, \pi_1)$ — первое препятствие этого косого произведения (как показывается, для $r > 2$ этот класс не зависит от s). Основной результат: класс когомологий $z^{r+2} \in H^{r+2}(B, \pi_{r+1}(C))$ тогда и только тогда является вторым препятствием (к распространению некоторой секущей поверхности), когда существует такой класс когомологий $d^r \in H^r(B, \pi_r(C))$, что

$$z^{r+2} = z^{r+2}(s) + [d^r] + d^r \cup \tilde{y}^2_s,$$

где $z^{r+2}(s)$ — препятствие к распространению секущей поверхности s и $[d^r]$ (обозначение референта) — известное из теории непрерывных отображений (см., например, Постников М. М., Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 6, 1027—1028) выражение для 2-го препятствия непрерывного отображения $B \to C$ с характеристическим классом d^r. Участвующее в этой формуле умножение Александера—Колмогорова основано на спаривании $(\pi_r(C), \pi_1(\Gamma)) \to \pi_{r+1}(C)$, индуцированном следующей операцией для сфероидов: произведением сфероидов g: $(E^r, S^{r-1}) \to (C, c)$ и $\varphi : S^1 \to \Gamma$ называется сфероид ψ: $(E^2 \times E^r)^\cdot \to C$ где $E^2 = S^1$, определяемый формулой

$$\psi(a, x) = \begin{cases} \varphi(a)\, g(x), & \text{если } a \in S^1,\ x \in E^r \\ c, & \text{если } a \in E^2,\ x \in S^{r-1}. \end{cases}$$

В качестве приложений этого общего результата рассмотрены задачи о втором препятствии для векторных полей на многообразиях (РЖМат, 1957, 8687) и полей двумерных направлений на четырехмерном многообразии. М. М. Постников

212. **Сигнатура расслоенного многообразия. Чжэнь, Хирцебрух, Серр** (On the index of a fibered manifold. Chern S. S., Hirzebruch F., Serre J.-P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 587—596 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть (E, B, F, p) — расслоенное пространство, удовлетворяющее следующим условиям: а) E, B и F — связные компактные ориентированные многообразия; б) фундаментальная группа $\pi_1(B)$ тривиально действует в алгебре когомологий слоя F с действительными коэффициентами. Тогда при соответствующей ориентации многообразий E, B и F сигнатура многообразия E равна произведению сигнатур многообразий F и B. А. С. Шварц

213. Вещественные когомологии в косом произведении с келеровым слоем. Бланшар (La cohomologie réelle d'un espace fibré à fibre kählérienne Blanchard André), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 21, 1342—1343 (франц.)

Рассматривается компактное и связное расслоенное пространство (E, B, F, p). Предполагается, что слой F представляет собой связное $2n$-мерное пространство, в котором существует такой двумерный класс когомологий Q, что при $p < n$ умножение на Q^{n-p} порождает изоморфизм между группами $H^p(F)$ и $H^{2n-p}(F)$ (когомологии берутся с коэффициентами в поле вещественных чисел). Это условие выполнено, например, если F является келеровым многообразием. Предположим еще, что фундаментальная группа базы B тривиально действует в алгебре когомологий слоя F. Тогда 1) дифференциал d_2 спектральной последовательности расслоения (E, B, F, p) целиком определяется, если известен дифференциал d_2Q; 2) если $d_2x = 0$ для любого $x \in H^1(F)$, то спектральная последовательность расслоения (E, B, F, p) тривиальна, и, следовательно, числа Бетти пространства E равны числам Бетти пространства $B \times F$.

И. Р. Шафаревич

214. Приложение теории Морса к топологии групп Ли. Ботт (An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups. Bott Raoul), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 3, 251—281 (англ.)

Пусть G — односвязная компактная группа Ли, t — алгебра Ли ее максимального тора T, $X \in t$, $N(X)$ — множество элементов G, сопряженных элементу $\exp X$, P — регулярный элемент T. Основной результат работы: пространство путей в G, начинающихся в $N(X)$ и кончающихся в P, не имеет кручения и его ряд Пуанкаре имеет вид $\sum t^{2\lambda(s)}$, где суммирование ведется по всем прямолинейным отрезкам s в пространстве t, соединяющим образы элемента X при преобразованиях из группы Вейля с точками, проектирующимися в P, а $\lambda(s)$ есть число плоскостей диаграммы, пересеченных отрезком s. Доказательство основано на применении теории Морса к инвариантной римановой метрике на группе G; известные неравенства Морса оказываются в этом случае равенствами. Из этой теоремы выводится, что пространство петель $\Omega(G)$ группы G и пространства G/U, где U — централизатор некоторого тора, не имеют кручения, и вычисляются числа Бетти этих пространств в терминах диаграммы группы G.

Числа Бетти пространства $\Omega(G)$ могут быть выражены также через размерности $2m_1 - 1, \ldots, 2m_l - 1$ примитивных классов когомологий группы G. Сравнивая это выражение с вышеуказанной теоремой, автор доказывает, что если G — простая группа, $a_1, \ldots, a_l$ — коэффициенты суммы положительных корней, а $d_1, \ldots, d_l$ — коэффициенты старшего корня в разложении их по простым корням группы, то

$$l! \prod_{i=1}^{l} d_i \prod_{i=1}^{l} (m_i - 1) = \prod_{i=1}^{l} a_i.$$

Эта формула позволяет легко вычислить числа Бетти групп E_6, E_7, E_8.

А. Л. Онищик

215. Циклы Чжэн Шэн-шеня (Черна) комплексных квадратичных многообразий. Шварц (Classes de Chern des quadriques complexes: Schwartz Marie-Hélène), Bull. sci. math., 1956, 80, sept.-oct., 144—155 (франц.)

Путем построения векторных полей специального вида и подсчета индексов их особенностей вычисляются характеристические циклы Чжэн Шэн-шеня (Черна) невырожденной комплексной квадрики.

Более общая задача о вычислении циклов Чжэн Шэн-шеня (Черна) произвольного алгебраического многообразия с другой точки зрения решена в работе Р. В. Гамкрелидзе (РЖМат, 1954, 2061).

В. И. Бурдина

216. Компактные однородные квазикомплексные пространства положительной характеристики. Герман (Compact homogeneous almost complex spaces of positive characteristic. Hermann Robert), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 471—481 (англ.)

Перечисляются фактор-пространства G/L компактных связных групп Ли по связным замкнутым подгруппам максимального ранга, допускающие квазикомплексную структуру, инвариантную относительно G. Если группа G не проста, то G/L является прямым произведением пространств того же типа с простыми группами движений. Если группа G проста, то всегда, за исключением 12 случаев, группа L является централизатором некоторого тора группы G и, в силу результата Ван Сянь-чжуна (РЖМат, 1956, 3302) G/L допускает инвариантную комплексную структуру. Во всех 12 исключительных случаях группа G является особой, в трех из них группа L не полупроста, в остальных девяти группа L полупроста.

А. Л. Онищик

См. также: 299, 320 К, 700

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

17. О непрерывной сходимости. Стоилов (Asupra convergenței continue. Stoilow S.), Studii și cercetări mat., 1956, 7, № 3—4, 247—250 (рум.; рез. русск., франц.)

Ханом (Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, 1921) было дано определение непрерывной сходимости последовательности функций: последовательность произвольных функций $f_n(x)$ с действительными или комплексными значениями, определенных в метрическом пространстве X, сходится непрерывно в $x_0 \in X$, если для последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$, зависящий лишь от x_0.

Доказывается, что для того чтобы последовательность сходилась непрерывно в X, необходимо и достаточно, чтобы: 1) последовательность $f_n(x)$ равномерно сходилась внутри X и 2) предел был непрерывной функцией.

Ни одно из этих двух условий не является достаточным для непрерывной сходимости.

Б. М. Гагаев

218. Потенциалы на множестве емкости нуль. Последовательности потенциалов. Шоке (Potentiels sur un ensemble de capacité nulle. Suites de potentiels. Choquet Gustave), C. r. Acad sci., 1957, 244, № 13 1707—1710 (франц.)

Содержится ряд результатов о потенциалах с ньютоновым ядром $N = r^{2-p}$, а также с ядрами более общего вида (определения см. в РЖМат, 1957, 2978). Приводим один из них.

Пусть A — множество типа G_δ в евклидовом пространстве R^p, имеющее емкость нуль относительно ядра $N = r^{2-p}$. Тогда существует такая мера Радона $\lambda > 0$, порожденная множеством A (т. е. распределение положительных масс на этом множестве), что соответствующий потенциал с ядром N бесконечен на A и конечен на его дополнении. Ю. А. Шашкин

219. О производных неопределенных интегралов. Скорца-Драгони) Sulla derivazione degli integrali indefiniti. Scorza Dragoni Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 6, 711—714 (итал.)

Пусть функции $g(x)$ и $k(x)$ определены в n-мерном действительном пространстве R_n, измеримы и удовлетворяют неравенству $|g(x)| \leqslant k(x)$ в каждой точке $x \in R_n$. Если $g(x)$ и $k(x)$ определены только на измеримом множестве $E \subset R_n$, то их продолжают на все R_n, полагая равными нулю на дополнении.

Пусть функция $k(x)$ конечна и суммируема в каждой измеримой ограниченной части R_n, тогда тем же свойством обладает и функция $g(x)$.

Положим

$$\Gamma(E) = \int_E g(x)\,dx, \quad \mathrm{K}(E) = \int_E k(x)\,dx,$$

и для одномерного случая

$$\gamma(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \quad \varkappa(x) = \int_a^x k(t)\,dt,$$

где $E \subset R_n$ — измеримое ограниченное множество, a — фиксированное натуральное число; интегралы взяты в смысле Лебега; $\Gamma(E)$ и $\mathrm{K}(E)$ — функции множества, $\gamma(x)$ и $\varkappa(x)$ — функции точки. Доказываются теоремы:

1. Функция Г дифференцируема в обыкновенном смысле почти всюду и ее производная равна g в каждой точке, где k и g асимптотически непрерывны и обыкновенная производная функции К равна k.

Аналогичное имеет место и для одномерного случая.

2. В первом утверждении при некоторых условиях обыкновенное дифференцирование функций Г и К может быть заменено дифференцированием в сильном смысле (определение см. Сакс С., Теория интеграла, М., 1949).

Из предыдущих результатов автора (Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, 12, № 3, 55—61) получаются теоремы:

3. Функция Г дифференцируема в обыкновенном смысле и ее производная равна g в каждой точке x_0, где обобщенная производная функции К равна $k(x_0)$ и g продолжается на замкнутом множестве F, имеющем в точке x_0 плотность, равную единице.

4. Функция Г дифференцируема в обобщенном смысле и ее производная равна g в каждой точке x_0, в которой обобщенная производная функции К равна $k(x_0)$ и g продолжена на таком замкнутом множестве F, что неопределенный интеграл от характеристической функции множества F имеет в x_0 обобщенную производную, равную единице. Ф. И. Шмидов

220. О функциях Гамеля. Маркус (Despre funcţiile lui Hamel. Marcus S.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, 8, № 3, 517—528 (рум.: рез. русск., франц.)

Изучаются свойства разрывных решений функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Эти решения называются функциями Гамеля. Приводятся новые доказательства неизмеримости этих функций. Одно из доказательств использует понятие функции с ограниченным вторым изменением, введенное референтом (РЖМат, 1955, 3680). Из новых результатов отметим следующие: Функция Гамеля имеет в каждой точке верхние производные числа, равные $+\infty$, и нижние производные числа, равные $-\infty$. Существует функция Гамеля, график которой есть множество, неизмеримое в плоскости. Ф. И., Харшиладзе

221. Критерий для конечности функции, аддитивной снизу. Маркус (Un critère de finitude pour les fonctions sous-additives. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 17, 2221—2222 (франц.)

Множество действительных чисел называется полугруппой, если оно аддитивно. Действительная функция $f(x)$, определенная на полугруппе E, называется аддитивной снизу, если $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in E$. Для любого множества действительных чисел X положим: $S^0(X) = X$;

$$S^n(X) = \{x + y : x,\ y \in S^{n-1}(X)\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказывается теорема: Пусть $f(x)$ определена и аддитивна снизу на $(0, \infty)$ и пусть E — такое множество из $(0, \infty)$, что для каждого натурального числа n пересечение $(0, 1/n) \cap S^1(E)$ содержит интервал. Если $f(x) < \infty$ для всех $x \in E$, то $f(x) < \infty$ на $(0, \infty)$. Если, кроме того, существует такая точка $x_0 > 0$, что $f(x_0) > -\infty$, то $f(x)$ является конечной на $(0, x_0]$ (в статье ошибочно вместо $(0, x_0]$ стоит $(0, \infty)$. *Реф.*). Ш. С. Пхакадзе

222. Критерии для оценки функций, аддитивных снизу, выпуклых или промежуточнозначных. Маркус (Critères de majoration pour les fonctions sous-additives, convexes ou internes. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 18, 2270—2272 (франц.)

Действительная функция $f(x)$ называется выпуклой, если

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

и промежуточнозначной, если

$$\min[f(x),\ f(y)] \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \max[f(x),\ f(y)].$$

Определения функции, аддитивной снизу, и символов $S^n(X)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ см. в реф. 221.

Доказываются теоремы: 1) Пусть $f(x)$ определена и аддитивна снизу на $(0, \infty)$, а E — такое множество из $(0, \infty)$, что для каждого натурального числа n пересечение $(0, 1/n) \cap S^1(E)$ содержит интервал. Если $f(x)$ ограничена сверху на E, то $f(x)$ ограничена сверху на каждом сегменте из $(0, \infty)$. Если, кроме того, существует такая точка $x_0 > 0$, что $f(x_0) > -\infty$, то $f(x)$ ограничена на $(0, x_0]$ (в статье ошибочно вместо $(0, x_0]$ стоит $(0, \infty)$. *Реф.*)

2) Пусть функция $f(x)$ определена и выпукла на (a, b), а E — такое множество из (a, b), что для некоторого целого $n > 0$ $S^n(E)$ содержит интервал. Если $f(x)$ ограничена сверху на E, то $f(x)$ непрерывна на (a, b).

3) Пусть $f(x)$ определена, промежуточнозначна и немонотонна на (a, b), а E — такое множество из (a, b), что $S^1(E)$ содержит интервал. Если $f(x)$ ограничена сверху (снизу) на E, то $f(x)$ ограничена сверху (снизу) на (a, b) и ее границы на (a, b) и на E совпадают. Ш. С. Пхакадзе

223. О монотонных непрерывных функциях, графики которых имеют максимальную длину. Бечварж

(O monotonních spojitých funkcích, jejichž graf ma maximální délku. Bečvář Jiří), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 2, 172—181 (чешск.; рез. русск., франц.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Длина непрерывной кривой $y=\varphi(x)$, $x\in[a, b]$, является пределом длин ломаных $y=\varphi_n(x)$, вписанных в кривую $y=\varphi(x)$, если $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ в каждой точке $x\in[a, b]$.

2. Если M — пространство всех неубывающих функций φ, непрерывных в $[a, b]$, для которых $\varphi(a)=a'$, $\varphi(b)=b'$, с метрикой $\rho(\varphi_1, \varphi_2)=\max\limits_{x\in[a, b]}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$, и D^* (соответственно D) — множество всех возрастающих (строго) (соответственно неубывающих) $\varphi\in M$, имеющих максимальную длину (т. е. длину $(b-a)+(b'-a')$), то D^* (и тем более D) плотно в M.

Доказательство проведено путем непосредственного построения возрастающей функции, имеющей максимальную длину; одновременно плотность D в M доказана и на основе теоремы Бэра. I. Černý

224. О рядах Уолша-Фурье. Моргенталер (On Walsh-Fourier series. Morgenthaler George W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 2, 472—507 (англ.)

Проводится сравнение некоторых свойств рядов Фурье по функциям Уолша с известными свойствами тригонометрических рядов. Функции Уолша рассматриваются и как характеры прямой суммы циклических групп второго порядка с мерой Хара, и как функции на отрезке [0, 1] с обычной мерой Лебега.

Файн указал, что абсолютно непрерывная функция с коэффициентами b_k Уолша—Фурье, равными $o(1/k)$, должна быть константой. Автор доказывает, что для абсолютно непрерывной функции средние арифметические последовательности $\{k|b_k|\}$ стремятся к нулю; и если средние арифметические последовательности $\{k^2|b_k|\}$ стремятся к нулю, а функция дважды дифференцируема, то она должна быть константой.

Для функций из класса Lip α получены оценки модуля непрерывности частных сумм ряда Уолша—Фурье, аналогичные случаю тригонометрического ряда. Даны условия (выраженные через средние арифметические частных сумм ряда Уолша—Фурье) принадлежности функции к классу Lip α.

Приводятся аналоги теорем Рогозинского о поведении частных сумм ряда Фурье в точках, симметричных относительно данной точки. Доказывается, что

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{\varliminf_{n\to\infty} S_n(x)+\varlimsup_{n\to\infty} S_n(x)\right\}$$

почти всюду на множестве, на котором ограничены частные суммы $S_n(x)$ ряда Уолша—Фурье функции $f(x)$ (аналог результата Марцинкевича и Зигмунда). Устанавливаются условия принадлежности $f(x)$ к тому или иному классу на основании поведения ряда Уолша—Фурье, а также рассматриваются преобразования множителями ряда Уолша—Фурье из одного класса в другой.

Для лакунарных рядов Уолша даются: аналог теоремы Зигмунда о сходимости ряда из модулей коэффициентов, когда последовательность частных сумм лакунарного ряда имеет конечное колебание в каждой точке; аналог теоремы Сидона об абсолютной сходимости; аналоги теорем Банаха о существовании рядов Фурье с заданными коэффициентами на заданных лакунарных местах; аналог «центральной предельной теоремы» Салема и Зигмунда о лакунарных рядах.

Дается пример непрерывной функции с ограниченным изменением, для которой коэффициенты Уолша — Фурье—Стилтьеса не стремятся к нулю. А. А. Шнейдер

225. Одно обобщение функций Хара. Ватари (A generalization of Haar functions. Watari Chinami), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 3, 286—290 · англ.)

Рассматривается следующая система функций, заданных на [0, 1): $\chi_0(x)=1$,

$$\chi^{(\nu)}_{\lambda,\mu}(x)=\begin{cases}\alpha^{(\lambda-1)/2}\omega^{k\nu} & \text{для } \mu/\alpha^{\lambda-1}+k/\alpha^{\lambda}\leqslant x<\mu/\alpha^{\lambda-1}+\\ & +(k+1)/\alpha^{\lambda},\\ 0 & \text{в остальных точках,}\end{cases}$$

где α — натуральное число; ω — первообразный корень α-й степени из единицы; $k=0, 1, \ldots, \alpha-1$; $\nu=1, 2, \ldots, \alpha-1$; $\mu=0, 1, \ldots, \alpha^{\lambda-1}-1$; $\lambda=1, 2, \ldots$

Показывается, что эта система (обозначенная автором H_α) является полной ортонормированной системой с квазиположительным ядром. Между системой H_α и рассмотренной Крестенсоном системой W_α (являющейся аналогичным обобщением системы Уолша) имеется связь, аналогичная связи между системой Хара и системой Уолша: каждая функция одной из этих систем является линейной комбинацией функций другой системы, совпадают некоторые подпоследовательности ядер этих систем. А. А. Шнейдер

226. Ортогональные системы функций, производные которых также ортогональны. Гагаев Б. М., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 138—136

Пусть $q(x)$ и $p(x)$ — произвольные весовые функции и $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная на отрезке $[a, b]$ относительно $q(x)$ система функций, первые производные которых удовлетворяют условию

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_n'^2(x)\,dx<\infty.$$

Дается метод построения с помощью функций $\varphi_n(x)$ ортогональной относительно $q(x)$ системы функций $\{\psi_m(x)\}$, производные которых ортогональны относительно $p(x)$. Функции $\psi_m(x)$ находятся при этом в виде линейных комбинаций функций $\varphi_n(x)$ с коэффициентами, определяемыми из условий ортогональности. Замкнутость систем $\{\varphi_m(x)\}$ и $\{\varphi'_m(x)\}$ не предполагается. А. Л. Гаркави

227. Обобщения векторных пространств посредством интеграла Стилтьеса. Фернандес-Авила (Generalización de los espacios vectoriales mediante la integral de Stieljes. Fernández Avila Francisco Javier), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 1, 22—37 (исп.)

Статья является началом мемуара, посвященного систематическому изучению ортогональных систем на основе интеграла Лебега—Стилтьеса. В ней вводится пространство E_v функций с интегрируемым квадратом в интервале (a, b) с нормой

$$\|f\|=\int_a^b f^2(t)\,d\alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — заданная функция с ограниченным изменением. Для функций этого пространства устанавливается известный критерий линейной зависимости, дается понятие скалярного произведения и т. д. Полученные результаты формулируются затем для n-мерного евклидова пространства E_n и гильбертова пространства функций E_ω, являющихся частными случаями пространства E_v. Э. Апарисио

228. **О некотором классе непрерывных функций двух действительных переменных и их множествах уровня. I. Маркус** (Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota I. Marcus Solomon), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 1, 24—30 (франц.)

Продолжение исследований Адельсон-Вельского и Кронрода и автора о структуре множеств уровня функции двух переменных. Доказываются теоремы, аналогичные предыдущему результату автора (РЖМат, 1956, 1280) с заменой множества меры нуль на множество первой категории или счетное. Доказывается также следующая теорема: Пусть R — отрезок оси Ox, S — отрезок оси Oy и $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на $P = R \times S$. Если $f(x, y)$ обладает свойством (T_1) в смысле Банаха относительно x для всех y, принадлежащих множеству, плотному в S, и относительно y для всех x, принадлежащих множеству, плотному в R, то существует множество Ω, всюду плотное в $[m, M]$, где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции, такое, что для всех $t \in \Omega$ уровень E_t состоит исключительно из компонент трех следующих типов: простые дуги с концами на границе P, замкнутые простые кривые, точки. Аналогичная теорема имеет место при замене множества меры нуль множеством первой категории или счетным. Р. С. Гутер

229. **Поверхностный интеграл. Маржик** (The surface integral. Mařík Jan), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 4, 522—558 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается система $\mathfrak{A}$ ограниченных измеримых множеств m-мерного евклидова пространства, определяемая следующим образом. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m$ — многочлены, для которых $\sum_{i=1}^{m} v_i^2(x) \leqslant 1$ для всех $x \in A$. Множество $A \in \mathfrak{A}$, если $\|A\| < \infty$, где

$$\|A\| = \sup \int_A \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\, dx.$$

Даются условия для того, чтобы данное множество принадлежало системе $\mathfrak{A}$, а также устанавливаются некоторые свойства этой системы.

Доказывается теорема: Пусть $A \subset E_m$ — непустое ограниченное множество с границей D. Обозначим для каждого $\varepsilon > 0$ через $\Omega(D, \varepsilon)$ множество всех точек E_m, расстояние которых от D меньше ε, и допустим, что функция (мера $\Omega(D, \varepsilon)) \cdot \varepsilon^{-1}$ переменного ε ограничена при $0 < \varepsilon < 1$. Пусть функции $v_1, v_2, \ldots, v_m$ непрерывны на замыкании $\overline{A}$, а $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$ непрерывны на множестве внутренних точек A^0. Тогда $A \in \mathfrak{A}$ и справедливо равенство

$$\int_D \sum_{i=1}^{m} v_i \nu_i dp = \int_A \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\, dx,$$

если существует интеграл справа, где p — мера в D, для которой $p(D) = \|A\|$, а ν_i — измеримые функции с $\sum_{i=1}^{m} \nu_i^2(x) = 1$ для всех $x \in D$. Р. С. Гутер

230. **Теорема о сильной циклической аддитивности поверхностного интеграла. Нёйгебауэр** (A strong cyclic additivity theorem of a surface integral. Neugebauer Cristoph J.), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 3—5, 239—259 (англ.)

Пусть S — поверхность Фреше, представимая непрерывным отображением T единичного квадрата Q плоскости u, v в трехмерное евклидово пространство E_3. Для таких поверхностей с конечной лебеговой площадью Чезари определил поверхностный интеграл $J(T) = \int_S F d\sigma$. Доказывается теорема о сильной циклической аддитивности поверхностного интеграла, состоящая в следующем.

Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство Пеано и отображение T представимо в виде $T = sf$, где f — непрерывное отображение Q на $\mathfrak{M}$, а s — непрерывное отображение $\mathfrak{M}$ в E_3. Тогда $J(T) = \sum J(sr_c f)$, где сумма распространяется на циклические элементы $C \subset \mathfrak{M}$, а r_c означает сжатое отображение $\mathfrak{M}$ на соответствующий циклический элемент C.

Теорема обобщает аналогичный результат Микла и Радо (Mickle E. J., Radó T., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 347—365) об аддитивности лебеговой площади. Р. С. Гутер

231. **Функционалы, связанные с непрерывными отображениями. Майерс** (Functionals associated with a continuous transformation. Myers Wm. M., Jr), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 517—528 (англ.)

Рассматривается двумерная поверхность S, которая может быть получена непрерывным отображением T: $z = t(w)$ простой связной полигональной области евклидовой плоскости в трехмерное евклидово пространство. Для таких поверхностей доказывается совпадение нижней площади $a(T)$, введенной Радо (Radó T., Length and area. Amer. Math. Soc. Colloq. Publs, 30, New York, 1948, гл. V), и существенной площади $eA(S)$, введенной Рейхельдерфером (Reichelderfer P. V., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 251—291). Р. С. Гутер

232. **Представление обобщенных поверхностей как смесей. Флеминг, Янг** (Representations of generalized surfaces as mixtures. Fleming W. H., Young L. C.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 2, 117—144 (англ.)

Рассматриваются обобщенные поверхности в трехмерном пространстве. Улучшаются результаты предыдущих работ (см., например, РЖМат, 1956, 6503, 6627 и др.) о представлении обобщенных поверхностей при различных ограничениях, накладываемых на их обобщенные g-границы. Даются приложения полученных результатов к проблеме минимума функционала в вариационном исчислении для случая, когда топологический тип поверхностей сравнения не обязательно заранее фиксирован. Р. С. Гутер

233. **Неравенство Кавальери для k-мерной площади в смысле Лебега в n-мерном пространстве. Чеккони** (La disuguaglianza di Cavalieri per la k-area secondo Lebesgue in un n-spazio. Cecconi Jaurès), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 42, 189—204 (итал.)

Определяется k-мерная площадь $a_k[S]$ типа Лебега в n-мерном евклидовом пространстве. Доказывается неравенство

$$H \cdot a_k[S] \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} a_{k-1}[S(t)]\, dt,$$

где H — константа, а $S(t)$ — некоторое семейство, зависящее от действительного параметра t. Для $k = 2$, $n = 3$ неравенство было установлено Чезари (РЖМат, 1957, 6267К, гл. V) и использовалось в теории площади поверхности и в вариационном исчислении. Аналогичное неравенство для меры Хаусдорфа было доказано Эйленбергом и Безиковичем. Р. С. Гутер

234. **Характеристика лебеговой площади. Нёйгебауэр** (A characterization of the Lebesgue area. Neugebauer Christoph J.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 1, 73—79 (англ.)

Рассматривается класс $\mathfrak{T}$ непрерывных отображений (T, A) допустимых множеств $A \subset E_2$ в E_3. Пусть R означает множество внутренних точек конечной суммы жордановых конечносвязных областей. Отображение (T, A) из $\mathfrak{T}$ называется элементарным, если T допускает непрерывное расширение на $\overline{R}$ и существует квазилинейное отображение Фреше, эквивалентное $(T, \overline{R})$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс всех функционалов $\Phi(T, A)$, определенных для отображений (T, A) из класса $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющих условиям: а) $\Phi(T, A) \geqslant 0$ для $(T, A) \in \mathfrak{T}$; б) $\Phi(T, A)$ полунепрерывен снизу; в) $\Phi(FT, A) \leqslant \Phi(T, A)$ для $F \in \mathfrak{L}$ (принцип Колмогорова); г) если A' — допустимое подмножество A, то $\Phi(T, A') \leqslant \Phi(T, A)$; д) для элементарного отображения (T, R) справедливо равенство $\Phi(T, R) = L(T, R)$, где L означает лебегову площадь. Для каждого функционала $\Phi \in \mathfrak{F}$ обозначим через $\mathfrak{T}(\Phi)$ класс отображений $(T, A) \in \mathfrak{T}$, для которых $\Phi(T, A) = L(T, A)$. Наконец, полагаем $\mathfrak{T}^* = \bigcap \mathfrak{T}(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{F}$. Таким образом, для отображений класса $\mathfrak{T}^*$ функционал Φ, удовлетворяющий условиям а)—д), совпадает с лебеговой площадью.

Класс $\mathfrak{T}'$ состоит из таких отображений (T, A), для которых для каждого $\varepsilon > 0$ существует элементарное отображение (T', R) с $R \subset A$, удовлетворяющее условиям: 1) $|T'(w) - T'(w')| \leqslant |T(w) - T(w')|$, $w, w' \in R$, 2) $L(T, A) - L(T', R) < \varepsilon$, если $L(T, A) < \infty$, и $L(T', R) > \varepsilon^{-1}$, если $L(T, A) = +\infty$. Основным результатом работы является установление совпадения классов $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}^*$. Иначе говоря, при выполнении условий 1)—2) условия а)—д) однозначно определяют лебегову площадь. Р. С. Гутер

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

235. Несправедливое приписывание максимального принципа Цорну. Куэста (Injusta atribución a Zorn del principio maximal. Cuesta N.), Gac. mat., 1955, 7, № 7—8, 174—176 (исп.)

Отмечается, что известный под именем леммы Цорна принцип максимальности, изложенный им в 1935 г. применительно к структуре вложения множеств (а не к произвольным частично упорядоченным системам) (Zorn, Bull. Amer. Math. Soc., 1935, 41, 667—670), был ранее в столь же общем виде сформулирован и доказан Куратовским (Kuratowski, Fundam. math., 1922, 3, 76—108, особенно стр. 88—89), а именно в форме: Если E — данное множество, а A — его подмножество со свойством $\mathfrak{R}$ и если сумма каждого вполне упорядоченного класса возрастающих подмножеств множества E, обладающих свойством $\mathfrak{R}$ и содержащих A, сама обладает свойством $\mathfrak{R}$, то существует максимальное подмножество множества E, обладающее свойством $\mathfrak{R}$ и содержащее A, т. е. не содержащееся ни в каком другом таком подмножестве.

В более частных случаях этот принцип применялся и доказывался еще в 1911 г. Брауэром, в 1910 г. Янишевским (существование неприводимых подконтинуумов между двумя точками данного континуума), в 1907 и 1909 гг. Хаусдорфом (существование максимальных систем сравнимых между собой в смысле возрастания функций). М. Ф. Бокштейн

236. О стационарных множествах порядковых чисел и последовательности регрессивных функций. Блок (Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions régressives. Bloch Gérard), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 3, 265—268 (франц.)

Пусть Θ — множество всех порядковых чисел 1-го и 2-го классов с естественной топологией, Ω — первое число 3-го класса. Функция $f(x)$, определенная на $A \subset \Theta$ со значениями из Θ, называется регрессивной, если $f(x) \leqslant x$ для всех $x \in A$, причем равенство исключено, кроме случая $x = 1$, при $1 \in A$. Несчетное множество $A \subset \Theta$ называется стационарным, если всякая регрессивная функция, определенная на A, имеет предел $\lim f(x) < \Omega$.

Множество $A \subset \Theta$ стационарно тогда и только тогда, когда каждое замкнутое подмножество его дополнения не более чем счетно.

Далее изучается последовательность регрессивных функций. Доказательства не приводятся.

А. Д. Тайманов

237. О некоторых арифметических проблемах теории порядковых чисел. Серпинский (Sur quelques problèmes arithmétiques de la théorie des nombres ordinaux. Sierpiński Wacław), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 2, 161—163 (франц.; рез. русск.)

Приводятся примеры, в которых исследуется справедливость или несправедливость некоторых теорем, известных из теории чисел и сформулированных для трансфинитных порядковых чисел. Рассматриваются вопросы разложения на простые числа, существования делителей, распределения простых чисел, а также большая теорема Ферма, теорема Помпейю и др.

В. Я. Арсенин

238. О конгруэнтности множеств. Мыцельский Я н. (On the congruence of sets. Mycielski Jan), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1956, 4, № 7, 419—421 (англ.) О конгруэнции множеств, Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1956, 4, № 7, 411—413

Содержатся результаты, являющиеся продолжением более ранних исследований автора относительно конгруэнтности множеств. Сформулированы четыре теоремы, одна из которых следующая (является обобщением одного из более ранних результатов автора):

На сфере S $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ евклидова пространства E^3 существует такое множество E, что для произвольных не более чем счетных множеств A, $B \subset S$ будет

$$\Gamma \simeq (E - A) + B$$

(знак $\simeq$ обозначает конгруэнтность множеств, осуществляемую посредством поворота сферы вокруг ее центра). H. Fast

239. Об одном вопросе относительно конгруэнтности между точечными множествами. I, II. Виола (Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Noti I, II. Viola Tullio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 3, 290—293; № 4, 431—438 (итал.)

Несколько лет тому назад Серпинский поставил вопрос, можно ли в евклидовой плоскости построить такое множество точек E, которое оставалось бы конгруэнтным с E после удаления любой из его точек. Несколько позже на этот вопрос был дан отрицательный ответ. В реферируемой работе автор ставит аналогичный вопрос относительно гиперболической плоскости. Пользуясь известной интерпретацией гиперболической плоскости как полуплоскости $\mathrm{Im}(z) > 0$ комплексных чисел (при этом движения в гиперболической плоскости интерпретируются как сохраняющие полуплоскость $\mathrm{Im}(z) > 0$ дробно-линейные преобразования некоторого вида), автор в заметке I строит некоторое счетное множество E точек гиперболической плоскости.

В заметке II доказывается, что построенное множество E обладает нужным свойством, а именно: для любой точки p, $p \in E$, существует движение в гиперболической плоскости (в данной интерпретации —

дробно-линейное преобразование определенного вида), которое переводит множество E в множество $E-(p)$.
Н. Fast

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

240. Об асимптотическом поведении в окрестности нуля тригонометрических синус-рядов с монотонными коэффициентами. Алянчич, Боянич, Томич (Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones. Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, **10**, 101—120 (франц.)

Пусть $L(x)$ — функция медленного роста, т. е. непрерывная положительная функция, определенная для $x \geqslant 0$ и обладающая свойством: $L(tx)/L(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и любом фиксированном $t > 0$.

Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы при $0 < \alpha < 2$, $C > 0$, $\lambda_n \downarrow 0$ выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kx \sim \frac{C\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +0),$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_n \sim Cn^{-\alpha}L(n)$ $(n \to \infty)$, где $\sim$ означает асимптотическое равенство.

2. Для того чтобы при $C > 0$ и $\lambda_n \downarrow 0$ имело место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kx \sim \frac{C}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +0),$$

необходимо, а в случае выпуклости λ_n и достаточно, чтобы $\lambda_n \sim CL(n)$ $(n \to \infty)$.

Эти результаты являются развитием исследований Харди (Hardy G. H., J. London Math. Soc., 1928, **3**, 12—13), Харди и Рогозинского (Hardy G. H., Rogosinski W. W., J. London Math. Soc., 1943, **18**, 50), Хейвуда (РЖМат, 1955, 3154), а также авторов (РЖМат, 1956, 2100).

Имеются опечатки. Например, стр. 107, последняя строка, в числителе первой дроби вместо $-x^2\{(1-r)^2+x^2\}$ должно быть $-x^2(1-2r\cos x+r^2)$; стр. 108, строка 12 сверху, в знаменателе 2-й дроби вместо $(1-r)^2+x$ должно быть $(1-r)^2+x^2$; стр. 109, строка 8 сверху, вместо «des théorèmes 2 et 3» должно быть «des théorèmes 1 et 3».
И. М. Ганзбург

241. Некоторые теоремы о преобразованиях рядов Фурье. Скворцова М. Г., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 55—61

По определению, 1) тригонометрический ряд принадлежит классу A, если он является рядом Фурье функции этого класса; 2) последовательность $\{\lambda_k\}$ входит в класс (P, Q), если из принадлежности ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

классу P вытекает, что ряд

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

принадлежит классу Q.

Теорема 1. Чтобы $\{\lambda_k\} \in (L_p, V)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы для любой системы $\mathfrak{M}$ попарно не пересекающихся и содержащихся в $[0, 2\pi]$ интервалов (a_i, b_i) $(i = 1, \ldots, m)$ было

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{m} \{l_n(t-b_i) - l_n(t-a_i)\} \right|^q dt < K,$$

где $q = p/(p-1)$, $l_n(x)$ — средние Чезаро ряда

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kx \qquad (\Lambda)$$

и K не зависит ни от n, ни от $\mathfrak{M}$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(u)$, $u \geqslant 0$ — неотрицательная выпуклая функция, для которой $\varphi(u)/u \to +\infty$ при $u \to +\infty$. Тогда а) из $\{\lambda_k\} \in (L_\varphi, C)$ следует, что $(\Lambda) \in L$, б) из $(\Lambda) \in C$ следует, что $\{\lambda_k\} \in (L_\varphi, C)$.

Теорема 4. Если упомянутая в теореме 3 $\varphi(u)$ такова, что $\varphi(2u) \leqslant k\varphi(u)$, то из $(\Lambda) \in L_\varphi$ следует, что $\{\lambda_k\} \in (B, L_\varphi)$.

Примечание референта. Так как $B \subset L_\varphi \subset L$, то теорема 3 является частным случаем результатов Зигмунда и Верблюнского (Verblunsky S., Proc. London Math. Soc., 1932, **33**, 287—327). И. П. Натансон

242. Поправка и замечание к статье «Интегральные неравенства и некоторые приложения к рядам Фурье». Коидзуми (Correction and remark on the paper: On integral inequalities and certain of its applications to Fourier series. Koizumi Sumiyuki). Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 2, 235—243 (англ.)

В связи с ошибкой, допущенной автором в работе, приведенной в заглавии (РЖМат, 1956, 7263), устанавливается теорема:

Пусть регулярные в единичном круге функции $\varphi(z)$ принадлежат классу H^p $(p > 0)$, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\rho e^{i\theta})|^p d\theta = O(1) \quad (\rho \to 1-0), \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

Тогда при $p > 1$ и $2 \leqslant q < 2p$ выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{g_q^*(\theta)\}^p d\theta \leqslant A_{p,q} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

где

$$g_q^*(\theta) = \left\{\int_0^1 (1-\rho)^{q-1} \chi_q^q(\rho, \theta)\, d\rho\right\}^{1/q},$$

$$\chi_q(\rho, \theta) = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi'(\rho e^{i\theta+it})|^q P(\rho, t)\, dt\right\}^{1/q},$$

$P(\rho, t)$ — ядро Пуассона, $A_{p,q}$ — константа, зависящая лишь от p и q.

Кроме того, дается обобщение этой теоремы.
И. М. Ганзбург

243. О приближении чезаровскими средними рядов Фурье. Нисимура (On the approximation by Cesàro mean of Fourier series. Nishimura Isaki), Bull. Kyushu Inst. Technol. Math., Natur. Sci., 1955, № 1, 11—18 (англ.)

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, $\bar{f}(x)$ — сопряженная ей функция, $s_n(x)$ и $\bar{s}_n(x)$ — соответственно частные суммы их рядов Фурье, а $\sigma_n^r(x)$ и $\bar{\sigma}_n^r(x)$ — их (C, r)-средние.

1. Из соотношения: $\sigma_n^r(x) - f(x) = O(n^{-\alpha})$ равномерно по x следует равномерно относительно x:

$$\sigma_n^r(x) - \bar{f}(x) = O(n^{-\alpha}) \text{ при } 0 < \alpha < 1,\ r > -1, \qquad (1)$$

$$\bar{\sigma}_n^r(x) - f(x) = O(n^{-1}\log n) \text{ при } \alpha = 1,\ r > 0; \qquad (2)$$

причем логарифм в правой части (2) не может быть опущен.

2. Для того чтобы при $r>0$ и $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ имело место соотношение

$$f(x)-\sigma_n^r(x)=O(n^{-1}) \quad (n\to\infty)$$

равномерно относительно x, необходимо и достаточно, чтобы $\int_\delta^\pi t^{-2}\varphi_x(t)\,dt=O(1)$ $(\delta\to 0)$ равномерно относительно x, где $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

Установлен также аналог предложения 1 в метрике пространства L. И. М. Ганзбург

244. О суммируемости отрицательного порядка ряда Фурье. Бхатт (On negative order summability of a Fourier series. Bhatt S. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, A22, № 5, 298—304 (англ.)

Доказывается, что для суммируемости $(C,-1/\Delta)$, $\Delta>1$, ряда Фурье функции $f(t)$ к числу S в точке x достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\int_0^t \Phi(u)\,du=o\left(t^{\Delta+1-\frac{1}{\Delta}}\right),$$

$$\int_0^t \left|d\left\{u^{\Delta+\frac{1}{\Delta}-1}\Phi(u)\right\}\right|=O(t)$$

при $t\to 0$, где $\Phi(u)=\frac{1}{2}\{f(x+u)+f(x-u)-2S\}$.

Этот результат является дополнением к признаку суммируемости Харди и Литлвуда: при $\Delta=1$ указанные выше условия достаточны для суммируемости $(C,-1+\delta)$, $\delta>0$. А. А. Шнейдер

245. Множители суммируемости для рядов Фурье. Прасад, Бхатт (The summability factors of a Fourier series. Prasad B. N., Bhatt S. N.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 103—117 (англ.)

Рассматриваются достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов вида

$$\sum\{\log(n+1)\}^{-k}\lambda_n a_n, \tag{1}$$

$$\sum\{\log(n+1)\}^{-k}\lambda_n c_n(t), \tag{2}$$

$$\sum\lambda_n c_n(t), \tag{3}$$

где $\{\lambda_n\}$ — любая выпуклая последовательность со сходящимся рядом $\sum n^{-1}\lambda_n$, a_n — члены числового ряда (частные суммы которого ниже обозначены через s_ν), $c_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$ — члены ряда Фурье функции $f(t)\in L(-\pi,\pi)$. Вводятся обозначения:

$$\theta_n^\alpha=\begin{cases}|t_n^\alpha| & \text{при } \alpha=1,\\ \max\limits_{1\le\nu\le n}|t_\nu^\alpha| & \text{при } 0<\alpha<1,\end{cases}$$

где t_ν^α — (C,α)-средние последовательности $\{na_n\}$,

$$\varphi^*(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\},$$

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\},$$

$$\varphi_\alpha(t)=\alpha t^{-\alpha}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\varphi_0(u)\,du \quad (\alpha>0).$$

Доказываются теоремы:

1. Если $(C,1)$-средние последовательности $\{\theta_n^\alpha\}$ равны $O\{(\log n)^k\}$, $k\ge 0$, то ряд (1) суммируется $|C,\alpha|$, $0<\alpha\le 1$.

2. Если

$$\sum_{\nu=1}^n|s_\nu-s|=O\{n(\log n)^k\} \quad (k\ge 0),$$

то ряд (1) суммируется $|C,1|$.

3. Если

$$\int_0^t|\varphi^*(u)|\,du=O\left\{t\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta\right\} \quad (\beta\ge 0),$$

то ряд (2) при $k=\frac{1}{2}+\beta$ суммируется $|C,1|$ в точке $t=x$.

4. Если

$$\int_t^\delta\frac{|\varphi^*(u)|}{u}\,du=O\left\{\left(\log\frac{1}{t}\right)^k\right\} \quad (k>0,\ 0<\delta<\pi),$$

то ряд (2) суммируется $|C,1|$ в точке $t=x$.

5. Если $\varphi_\alpha(t)$ $(0\le\alpha\le 1)$ имеет ограниченное изменение на $(0,\pi)$, то ряд (3) суммируется $|C,\alpha|$ в точке $t=x$.

6 и 7. Если для $0<\alpha\le 1$

$$\int_0^t u\,|d\varphi_\alpha(u)|=O(t) \quad (0\le t\le\pi),$$

то в точке $t=x$ ряд (3) суммируется $|C,\beta|$ $(\beta>\alpha)$, а ряд (2) при $k=1$ суммируется $|C,\alpha|$.

Эти теоремы дополняют и обобщают результаты Пати, Чэн Минь-дэ и Чжоу Хун-цзина. Дан обзор вышедших ранее работ разных авторов по абсолютной суммируемости рядов (1)—(3). А. А. Шнейдер

246. Явление Гиббса для борелевских средних. Лорк (The Gibbs phenomenon for Borel means. Lorch Lee), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 81—84 (англ.)

Установлена теорема: Пусть $B_\alpha(t)$ — экспоненциальное или интегральное α-е борелевское среднее ряда Фурье

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\sin nx.$$

Тогда для данного T, $0<T\le\infty$,

$$\lim B_x(t_x)=\int_0^T\frac{\sin v}{v}\,dv,$$

где $t_x\to+0$, $xt_x\to T$.

Относительно борелевского метода суммирования см. Харди, Расходящиеся ряды. М., Изд-во ин. лит., 1951. И. И. Огиевецкий

247. Об аппроксимации функций многих переменных тригонометрическими полиномами. Чэн Минь дэ, Чэнь Юн-хэ (多元函數的三角多項式逼近. 程民德, 陳永和), 北京大學學報(自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 4, 411—428 (кит.; рез. англ.)

Пусть C^p означает класс всех периодических, периода 2π по каждой из переменных, функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные производные $\frac{\partial^p f(x,y)}{\partial x^\alpha\partial y^\beta}$ $(\alpha,\beta\ge 0,\ \alpha+\beta=p)$.

В качестве аппарата приближения рассматриваются полиномы:

$$S_k^{\delta}(f;\ x,\ y)=\sum_{\nu\leqslant R^2}\left(1-\frac{\nu}{R^2}\right)^{\delta}\sum_{m^2+n^2=\nu}C_{m,\,n}\,e^{i(mx+ny)},$$

$$\mu_{\frac{\lambda_0}{R}}(f;\ x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_R^{\delta}\left(f;\ x+\frac{\lambda_0}{R}\cos\theta,\ y+\frac{\lambda_0}{R}\sin\theta\right)d\theta,$$

$$S_R^{(k)}(f;\ x,\ y)=\sum_{\nu\leqslant R^2}\left(1-\frac{\nu^{k/2}}{R^k}\right)\sum_{m^2+n^2=\nu}C_{m,\,n}\,e^{i(mx+ny)},$$

где $C_{m,\,n}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x,\ y)$, λ_0 — положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$, k — натуральное число.

Устанавливаются следующие теоремы:

1. Если $f(x,\ y)\in C^p$ $(p=0,\ 1)$, то при $\delta>1/2$

$$S_R^{\delta}(f;\ x,\ y)-f(x,\ y)=O\left\{\frac{1}{R^p}\,\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

равномерно относительно $0\leqslant x,\ y\leqslant 2\pi$.

2. Если $f(x,\ y)\in C^p$ и $\omega_p(h)=O(h^{\gamma})$ $(0<\gamma\leqslant 1$, $p=0,\ 1)$, то при $\delta\geqslant 0$

$$\mu_{\frac{\lambda_0}{R}}(f;\ x,\ y)-f(x,\ y)=O\left(\frac{1}{R^{p+\gamma}}\right)$$

равномерно относительно $0\leqslant x,\ y\leqslant 2\pi$.

3. Если $f(x,\ y)\in C^p$, то

$$S_R^{(k)}(f;\ x,\ y)-f(x,\ y)=$$

$$=\begin{cases}O\left[\dfrac{1}{R^p}\,\omega_p\left(\dfrac{1}{R}\right)\right],\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2;\ p=k-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } k \text{ четном,} \\ O\left[\dfrac{\ln R}{R^p}\,\omega_p\left(\dfrac{1}{R}\right)\right],\ p=k-1 \text{ при } k \text{ нечетном,}\end{cases}$$

равномерно относительно $0\leqslant x,\ y\leqslant 2\pi$, где $\omega_p(h)=\max\limits_{\substack{\alpha,\,\beta\geqslant 0\\ \alpha+\beta=p}}\omega_{\alpha,\,\beta}(h)$, а $\omega_{\alpha,\,\beta}(h)$ — модуль непрерывности функции $\dfrac{\partial^p f(x,\ y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}$.

Теоремы 1 и 2 содержат результаты Чандрасекхарана и Минакшисундарама (Chandrasekharan K., Minakshisundaram S., Duke Math. J., 1947, 14, 731—753), а теорема 3 является обобщением теоремы Зигмунда (Zygmund A., Duke Math. J., 1945, 12, 695—704).

Примечание редакции. Реферат составлен на основании рефератов М. Ф. Тимана и L. C. Hsu.

248. **Дробные интегралы функций многих переменных с применениями к теории аппроксимации.** Чэн Минь-дэ, Чэнь Юн-хэ (в подлиннике Ченг Мин-тех, Ченг Юнг-ху), Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1956, 4, № 10, 629—632

Для непрерывных в m-мерном евклидовом пространстве функций $F(P)$ периода 1 по всем m переменным со средним значением, равным нулю, дается определение дробного интеграла $I_{\alpha}^{*}[F(P)]$ порядка α при помощи равенства

$$I_{\alpha}^{*}[F(P)]=\lim_{R\to\infty}{\sum}'\frac{A_{\nu}(P)}{(2\pi)^{\alpha}\nu^{\alpha/2}e^{\pi i\alpha/2}}\left(1-\frac{\nu}{R^2}\right)^{\sigma_m},$$

где $P(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ — точка m-мерного пространства, $\alpha\geqslant 0$,

$$\sigma_m=\left[\frac{m-1}{2}\right]+1,\quad A_{\nu}(P)=$$

$$=\sum_{n_1^2+\ \ldots\ +n_m^2=\nu}C_{n_1,\ \ldots,\ n_m}e^{2\pi i(n_1x_1+\ \ldots\ +n_mx_m)},$$

причем $C_{n_1,\ \ldots,\ n_m}$ — коэффициенты Фурье функции $F(P)$, а $\sum'$ означает, что при суммировании опускается член, соответствующий $n_1=\ \ldots\ =n_m=0$.

Формулируются теоремы, дающие некоторые свойства дробных интегралов. В частности, в теореме 1 указывается, что при $0<\alpha<1$ данное определение дробного интеграла совпадает с определением Рисса (Riesz M., Acta math., 1949, 81, 1—223). В теоремах 5 и 6 даются оценки приближений функций двух переменных некоторых классов при помощи определенных тригонометрических полиномов. Доказательства не приводятся. И. М. Ганзбург

249. **Два признака абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций.** Бредихина Е. А., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1957, вып. 3, 43—48

Приводятся две теоремы об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Более точные результаты содержатся в другой заметке автора (РЖМат, 1957, 6966). Б. М. Левитан

250. **О среднем смещении.** Досс (On mean motion. Doss Raouf), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 2, 389—396 (англ.)

Изучается аргумент тригонометрического полинома

$$p(t)=\sum_1^N a_n\exp(i\lambda_n t).$$

Через $\arg^{-}p(t)$ и $\arg^{+}p(t)$ обозначаются ветви $\arg p(t)$, которые непрерывны, исключая нулей $p(t)$, где они претерпевают соответственно скачки $-p\pi$ и $p\pi$ (p — кратность данного корня). Вводятся функции: $a^{+}(t)=\arg^{+}p(t+1)-\arg^{+}p(t)$ и $a^{-}(t)=\arg^{-}p(t+1)-\arg^{-}p(t)$.

Доказывается, что $a^{+}(t)$ и $a^{-}(t)$ — почти периодические в смысле Римана—Степанова (R. S. п. п.) (определение R. S. п. п. см. РЖМат, 1957, 3003).

Следствием этого предложения является следующее:

$$\arg^{+}p(t)=ct+\int_0^t\alpha(u)\,du+\psi(t),$$

где $c=\text{const}$, $\alpha(t)$ — почти периодическая по Бору со средним значением, равным нулю, а $\psi(t)$ — ограниченная почти периодическая функция Римана—Степанова. А. С. Кованько

См. также: 262, 421, 422, 438К, 451, 488

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

251. Замечания об истории общих уравнений гидродинамики. Труселл (Truesdell C.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 7, 443—458 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 3577.

252. К определению аналитической функции. Арсов (Arsove Maynard G.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 1, 22—25 (англ.)

Приводится новое доказательство следующего частного случая теоремы Ломана—Меньшова:

Теорема. Пусть $f(z)=u+iv$ — непрерывная функция, определенная на открытом множестве Ω плоскости z. Если: 1) для всех точек $z\in\Omega$

$$\limsup_{\zeta\to z}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<\infty,$$

исключая не более чем счетное их множество и 2) условия Коши—Римана

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y,\ \partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$$

выполнены почти всюду на Ω, то $f(z)$ аналитична на всем множестве Ω.

При доказательстве приведенной теоремы (как и всех теорем этого типа) прежде всего используется теорема Бэра о категориях; новым в доказательстве явилось применение интегральных средних:

$$u_n(x,y)=n^2\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}u(x+s,\ y+t)\,dsdt$$

и аналогично определяемых $v_n(x,y)$ в сочетании с методом предельного перехода под знаком интеграла.

Примечание референта. Нельзя согласиться с автором относительно «элементарности» его доказательства, так как доказательства свойств интегральных средних $u_n(\tau,y)$ и $u_n(x,y)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла отнюдь не проще доказательства лемм Д. Е. Меньшова (РЖМат, 1956, 2932), позволяющих получить гораздо более общее предложение Ломана—Меньшова (Сакс С., Теория интеграла, 1949, стр. 287). Ю. Ю. Трохимчук

253. Обобщение интеграла в смысле главного значения Коши. Фокс (A generalization of the Cauchy principal value. Fox Charles), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 110—117 (англ.)

Используя идею Адамара, автор определяет смысл расходящегося интеграла

$$\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{(x-u)^{n+1}}$$

(n — целое неотрицательное число) выделением его конечной части при помощи равенства

$$\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{(x-u)^{n+1}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_a^{u-\varepsilon}\frac{f(x)\,dx}{(x-u)^{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\int_{u+\varepsilon}^b\frac{f(x)\,dx}{(x-u)^{n+1}}-H_n(u,\varepsilon)\right\},$$

где $H_0(u,\varepsilon)=0$ при $n=0$,

$$H_n(u,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n-i}\frac{f^{(i)}(u)}{i!}\left\{\frac{1-(-1)^{n-i}}{(n-i)\,\varepsilon^{n-i}}\right\}\ \text{при}\ n>0.$$

Устанавливаются условия существования его (теорема 1) и некоторые простейшие свойства, аналогичные свойствам интеграла в смысле главного значения Коши (теоремы 2—4), приводятся два примера возможного применения в краевых задачах аналитических функций.

В условии теоремы 4 — опечатка: не $f(z)$ должна удовлетворять условию Гёльдера, а $f^{(n)}(z)$.

Примечание референта. Данное в работе обобщение интеграла в смысле главного значения Коши, а также результаты, выраженные в теоремах 1, 2 и 4, ранее были получены референтом (РЖМат, 1955, 2711). Л. А. Чикин

254. Дополнение к статье «О коэффициентах ряда Тейлора рациональных функций». Малер (On the Taylor coefficients of rational functions. Mahler K.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, 53, № 2, 544 (англ.)

Автор отмечает, что результаты его статьи (РЖМат, 1957, 332) были ранее доказаны Лехом в более общей форме (Lech C., Arkiv. Math., 1952, 2, 417—421). Лех использовал другой и довольно короткий метод доказательства, основанный на распространении одной оценки для более широкого поля.

255. Об остатке степенного ряда на границе круга сходимости. Риччи (Sul resto delle serie di potenze alla periferia del cerchio di convergenza. Ricci Giovanni), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 233—242 (итал.)

Доказывается следующая теорема.

Пусть сумма $f(z)$ степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ с радиусом сходимости 1 имеет в точке $\zeta=e^{i\theta}$ конечный предел $\Phi(\zeta)$, когда точка $z\to\zeta$ по всем путям, лежащим в круге $|z|<1$, и пусть, далее существуют три действительных числа $0<\alpha\leqslant1$, $\rho>0$, $K>0$ такие, что $|f'(z)|<K|z-\zeta|^{\alpha-1}$ для $|z|<1$, $|z-\zeta|<\rho$.

Если, кроме того, $|a_n|<cn^{-\gamma}$ ($\gamma>0$) для достаточно больших n, то для достаточно больших n справедливо неравенство:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\zeta^k-\Phi(\zeta)\right|<\begin{cases}\dfrac{c_1}{\alpha}\,n^{-\alpha\gamma/(2+\alpha)}, & \text{когда } 0<\gamma\leqslant1+\dfrac{\alpha}{2},\\[2ex] \dfrac{c}{\gamma-1}\,n^{-(\gamma-1)}, & \text{когда } 1+\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\gamma,\end{cases}$$

где c_1 зависит от c, но не зависит от n, α и γ.

Н. А. Давыдов

256. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора с переменным центром. Штепанек (Rozvoj analytické funkce v «Taylorovu» řadu s proměnným středem. Štěpánek Jiří), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 1, 38—42 (чешск.)

В статье определена область сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\zeta)(z-\zeta)^n$, где $f(z)$ — аналитическая

функция, переменные z и ζ взаимно связаны соотношением $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$, z_0 и t — фиксированные комплексные числа. J. Kùrzweil

257. Особенности на окружности круга сходимости. Пи-Кальеха (Singularities on the circumference of convergence. Pi Calleja Pedro. Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. Ser. 2. Revista, 1954, 5, № 1, 1—27) (англ.)

Собраны некоторые результаты, относящиеся к задаче о расположении особых точек аналитической функции, определенной рядом Тейлора, на окружности ее круга сходимости.

Получен ряд теорем, например, следующая:

Пусть $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $z = -1$ была особой для $f(z) = \sum a_n z^n$ будет: $\limsup_n |\Delta^n a_k|^{1/n} = 2$ для некоторого положительного числа k.

Случай $k = 1$ рассмотрен у Титчмарша (Titchmarsh, The theory of functions, 2 nd ed, Oxford, 1939, стр. 216—217).

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 3, 231.

V. F. Cowling

258. Об особенностях рядов Дирихле. Танака (On the singularities of Dirichlet series. Tanaka Chuji), Comment. math. helv., 1957, **31**, № 3, 184—194 (англ.)

Для ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n s)$ ($0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$), имеющего абсциссу сходимости σ_c, доказываются следующие теоремы.

1. Существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ ($\varepsilon_n = \pm 1$), что для функции $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \exp(-\lambda_n s)$ прямая $\operatorname{Re} s = \sigma_c$ является естественной границей.

2. Существует такая последовательность $\{b_n\}$, причем $|b_n| = |a_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} (\arg b_n - \arg a_n) = 0$ или $\arg b_n = \arg a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{a_n}\right| = 1$, что для функции $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\lambda_n s)$ прямая $\operatorname{Re} s = \sigma_c$ является естественной границей.

Г. Л. Лунц

259. Заметка о рядах Дирихле (XVI). О кривых Бореля для целых функций, определенных рядами Дирихле. Танака (Note on Dirichlet series (XVI). On Borel-curves of the integral functions defined by Dirichlet series. Tanaka Chuji), Yokohama Math. J., 1955, **3**, № 1—2, 127—140 (англ.)

Пусть ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it,\ 0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n \to \infty)$$

равномерно сходится в любой полуплоскости $\sigma > \alpha$ и определяет целую функцию $F(s)$ порядка ρ, причем

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} [1/(-\sigma)] \cdot \ln^+ \ln^+ M(\sigma),$$

$$M(\sigma) = \sup_{-\infty<t<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

Пусть C — кривая, простирающаяся от $\sigma = +\infty$ до $\sigma = -\infty$, и $D(R, C)$ — криволинейная полоса, описываемая кругом радиуса R при движении центра вдоль кривой C. Кривая C называется кривой Бореля для функции $F(s)$, если порядок последовательности $(s_n = \sigma_n + it_n)$ нулей функции $F(s) - a$ в полосе $D(\varepsilon, C)$, где $\varepsilon > 0$ — любое, равен ρ (т. е. ряд $\sum \exp(\sigma_n \alpha)$ сходится при $\alpha > \rho$ и расходится при $\alpha < \rho$) для всех значений a, за исключением, быть может, двух, включая ∞. Обозначим через $C(r, \theta, p)$ кривую вида C, которая содержится в полосе $D(r, L)$, причем L есть прямая $\sigma\cos\theta + t\sin\theta = p$, $\theta \neq 0$. Основной результат автора состоит в следующем: Пусть функция $F(s)$ в полосе $D(R, C)$, $C = C(r, \theta, p)$ имеет тот же порядок роста (равный ρ), что и во всей плоскости. Если

$$\left\{R > \Delta\, 1 + \left(1 + \frac{2r}{\Delta}\right)^{1/2}\right\},\ \Delta = \frac{\pi}{4\rho(\sin\theta)},$$

то в полосе $D(R, C)$ имеется по крайней мере одна кривая Бореля для $F(s)$.

Как установлено автором (РЖМат, 1955, 1719), функция $F(s)$ при условии $\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, согласно которому, в частности, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \delta \leqslant 1/h$, имеет порядок ρ в полосе $D[\pi(\delta + \varepsilon), C]$. Комбинируя основной результат с последним результатом, а также с другими результатами, автор в качестве следствий приводит ряд других теорем. Заметим, что понятие кривой Бореля является обобщением понятия направления Бореля (по поводу направлений Бореля см. РЖМат, 1956, 6553; Yu Chia-Yung, Ann. scient. École norm. supér, 1951, 68, 65—104; Valiron G. Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A, 1934, **20**, 211—215).

А. Ф. Леонтьев

260. Расходимость интерполяционных процессов. I, II, III. Какэхаси (The divergence of interpolations. I, II, III. Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 741—745; № 9, 820—824; № 10, 963—964 (англ.)

Обозначим через C_R окружность $|z| = R > 0$. Пусть $\varphi(t)$ — аналитическая функция на C_R; «ограниченная часть» интеграла

$$\int_{C_R} \varphi(t)(t - a)^{m-1}\, dt,\ a = Re^{i\vartheta} \in C_R,$$

существующего для $\operatorname{Re}(m) > 0$, при $\operatorname{Re}(m) \leqslant 0$ определяется так:

$$\operatorname{Pf.} \int_{C_R} \varphi(t)(t - a)^{m-1}\, dt = \int_{C_R} \psi(t)(t - a)^{m+p}\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(t - a)^k + (t - a)^{p+1}\psi(t)$$

и p — наибольшее целое положительное число такое, что $\operatorname{Re}(m + p) \leqslant 0$.

Обозначим

$$Y_m(\varphi; a) = \frac{\Gamma(1 - m)}{2\pi i} \operatorname{Pf.} \int_{C_R} \varphi(t)(t - a)^{m-1}\, dt,$$

когда m — нецелое, и

$$Y_m(\varphi; a) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int_{C_R} \varphi(t) L_m(t - a)\, dt,$$

когда m — целое число.

Здесь для

$$L_1(t) = \ln t,\ L_k(t) =$$

$$= \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left(\ln t - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{k-1}\right),\ k > 1$$

$\ln t$ и $(t - a)^{m-1}$ берутся главные значения.

Обозначим через $y_m(z;\ a)$ выражение:

$$Y_m\left(\frac{1}{t-z};\ a\right)=\begin{cases}\Gamma(1-m)(z-a)^{m-1}, & m\neq 1,\ 2,\ \ldots\\ L_m(z-a), & m=1,\ 2,\ \ldots\end{cases}$$

Если $\varphi(t)$ — аналитическая функция внутри и на C_R, то $Y_m\left(\frac{\varphi(t)}{t-z},\ a\right)$ представляет собой функцию, аналитическую внутри C_R, а в точке $a\in C_R$ имеет либо полюс, либо точку разветвления.

Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_k(z)$ — аналитические функции внутри и на C_R и точки $a\in C_R$, $a_k\in C_R$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ N$ (a_k не обязательно различны).

В работе доказано, что ряд, составленный из частных сумм $P_n(z,\ \varphi y_m)$ степенного ряда $\varphi(z)\,y_m(z;\ a)$, и ряд, составленный из частных сумм $P_n(z;\ f)$ степенного ряда функции

$$f(z)=\varphi(z)+\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\,y_{m_k}(z;\ a_k),\qquad(1)$$

расходятся во всякой точке z вне C_R.

Точнее, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^m\left(\frac{a}{z}\right)^n P_n(z;\ \varphi y_m)=A\neq 0$$

для всякого, z, где A зависит от a, z, φ, и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n^p\left(\frac{R}{z}\right)^n P_n(z,\ f)\right|>0$ для $|z|>R$, где p — наименьшая действительная часть чисел m_k.

Пусть $W_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — последовательность полиномов n-ой степени, не обращающихся в нуль вне круга $|z|=1$, такая что в области $|z|\geqslant r>1$ имеем равномерно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n(z)}{z^n}=\lambda(z)\neq 0 \text{ для любого } r>1.$$

Обозначим через $S_n(z,\ f)$ полином степени n, полученный интерполированием $f(z)$, когда узлы интерполяции есть корни полинома $W_{n+1}(z)$.

При тех же, что и раньше, предположениях о $\varphi(z)$ и $\varphi_k(z)$ доказывается, что ряды $S_n(z;\ \varphi y_m)$ и $S_n(z,\ f)$, где f — функция (1), расходятся для любого z вне C_R.

Точнее, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^m\left(\frac{a}{z}\right)^n S_n(z,\ \varphi y_m)=B\neq 0$$

для любого z и

$$\lim_{n\to\infty}\left|n^p\left(\frac{R}{z}\right)^n S_n(z;\ f)\right|>0,\quad |z|>R>1,$$

где p было определено ранее.

Пусть D — ограниченная замкнутая область, дополнение K которой есть связная область в расширенной плоскости и которая регулярна в том смысле, что имеет функцию Грина с полюсом $z=\infty$.

Пусть $w=\varphi(z)$ отображает K конформно на область $|w|>1$ так, что бесконечно-удаленная точка переходит сама в себя. Пусть Γ_R — образ окружности $|w|=R>1$.

Для функции вида

$$f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{N} g_k(z)\,y_{m_k}(\varphi(z),\ a_k),\qquad(2)$$

где $g(z)$ и $g_k(z)$ аналитичны внутри и на Γ_R и точки a_k лежат на Γ_R, получен результат, аналогичный приведенному для интерполяционных полиномов, построенных для функции вида (1). Л. Илиев

261. **Об индуцированных базисных множествах полиномов. Макар** (On induced basic sets of polynomials. Makar Ragy H. Phys. Soc. Egypt, 1953 (1954), 5, № 1, 41—46) (англ.)

262. **Весовые приближения многочленами. Мергелян С. Н.,** Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 107—152

Излагается обзор результатов, установленных в последнее время, относящихся к решению проблемы С. Н. Бернштейна, заключающейся в нахождении условий для h(x), при которых система полиномов полна с весом h(x) в данном множестве. При этом рассматривается как приближение на вещественной оси, так и на любом замкнутом, нигде не плотном множестве. В работе значительное место занимают результаты С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера, А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна и самого автора.

Приведем далее некоторые результаты, полученные автором и подробно изложенные в реферируемой статье. Краткое изложение части из них было дано ранее автором (РЖМат, 1956, 3750, 3756).

Через $\mathfrak{M}_h$ обозначается совокупность всех полиномов от x, удовлетворяющих неравенству $h(x)\,|P(x)|\leqslant 1$ $(-\infty<x<\infty)$ и $M_h(z)=\sup|P(z)|$, причем верхняя грань берется в классе $\mathfrak{M}_h$.

Отмечается ряд свойств функции $M_h(z)$.

Доказывается, что какова бы ни была функция $h(x)$, $0\leqslant h(x)\leqslant 1$ возможны лишь два случая: или $M_h(z)=\infty$, $\operatorname{Im} z\neq 0$, или существует функция $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$ такая, что $M_h(z)<Ae^{r\varepsilon(r)}$, где A не зависит от r, $|z|=r$.

Ряд важных критериев полноты системы полиномов дается посредством функции $M_h(z)$ при любом $h(z)$. Отметим, например, следующее утверждение:

Для полноты системы полиномов с весом $h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $M_{\frac{h}{1+|x|}}(z)=\infty$, $\operatorname{Im} z\neq 0$ или в классе $\mathfrak{M}_{\frac{h}{1+|x|}}$ имело место условие

$$\sup\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|P(x)|}{1+x^2}\,dx=\infty,$$

или расходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sup\ln|P(x)|}{1+x^2}\,dx.$$

Далее в работе даются критерии полноты полиномов на замкнутых множествах.

Пусть E — произвольное замкнутое, нигде не плотное и не ограниченное множество. Дополнение к E относительно всей плоскости состоит из конечного или счетного множества областей G_0, G_1, G_2, ... Отметим следующие утверждения:

1. Пусть целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям $|G(z)|\leqslant 1$, $z\in E$, $\sup|G(z)|>1$, $z\in G_k(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и $H(r)=\max|G(z)|$, $|z|\leqslant 2r$.

Если весовая функция $h(z)$ такова, что при любом $p>0$,

$$\lim h(z)\,[H(|z|)]^p=0,$$

то система полиномов полна на E с весом $h(x)$ в классе всех непрерывных на E функций $f(x)$ с условием $\lim_{z\to\infty} h(z) f(z) = 0$.

2. Для полноты системы полиномов необходимо и достаточно, чтобы в каждой из дополнительных к E областей

$$M_{\frac{h}{1+|z|}} = \infty,$$

Наконец, полагая

$$p_n = \min_{|z-a|\leqslant r} M_{n,\frac{h}{1+|t|}}(z),$$

где $M_{n,h}(z) = \sup |P(z)|$ в подклассе $\mathfrak{M}_h$, состоящем из полиномов степени $\leqslant n$, автор доказывает ряд утверждений, из которых следует, что те свойства веса, которые влияют на быстроту наилучшего весового приближения определяются скоростью возрастания чисел p_n при $n\to\infty$. И. И. Ибрагимов

263. **О решении уравнения $f(f(z)) = e^z - 1$ и его области регулярности. Осс ерман** (On the solution of $f(f(z)) = e^z - 1$ and its domain of regularity. Osserman Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 262—263 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть Ω — бесконечная полоса $|y| < b$ плоскости $z = x + iy$ при $b > \pi$ и функция $f(z)$ определена в такой области D, что $\Omega \subset D$ и $f(\Omega) \subset D$. Если $f(z)$ удовлетворяет указанному в заголовке уравнению всюду в D, то она не может быть аналитической всюду в Ω и, в частности, имеет особую точку на прямой $y = \pi$. Ю. А. Шашкин

264. **Простой круг в теории нормальных семейств. Сюн Цзин-лай** (Un cycle simple dans la théorie des familles normales. Hiang King-Lai), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 11, 1440—1443 (франц.)

В условиях теорем, доказанных автором (РЖМат, 1956, 7293), отбрасываются многочисленные ограничения. Это позволяет доказать следующую теорему I: Семейство функций $f(z)$, голоморфных в $|z| < 1$, таких, что $f(0) = c_0 \neq 1$, 0 является пикаровским исключительным значением, а 1 — равномерным исключительным значением B (определение см. РЖМат, 1956, 7293) для $f(z)$, является нормальным семейством в $|z| < 1$.

Из других теорем приведем теорему II: Если $f(z)$ голоморфна в $|z| < 1$, $f(0) \neq 1$, $f(z) \neq 0$ в $|z| < 1$ и $N(r, 1, f) < -\lambda \ln(1-r)$ при $0 < r < 1$, то для $0 < r < 1$ имеет место неравенство

$$\ln M(r, f) < (1-r)^{-3}\{H(|\ln c_0| - \ln r) - K \ln[2(1-r)]\},$$

где H и K зависят только от λ. А. А. Гольдберг

265. **О близости жордановых кривых. Кёлер** (A note on neighboring Jordan curve. Koehler F.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 184—185 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть C и C^1 — замкнутые жордановы кривые в комплексной плоскости z, удовлетворяющие следующим условиям: 1) внутри C' содержится начало координат $z = 0$; 2) внутри C содержится круг $|z| \leqslant b > 0$; 3) если $z_1, z_2 \in C$, то одна из дуг кривой C, соединяющих z_1 и z_2, лежит внутри круга с диаметром $d = c|z_1 - z_2|$, где c — фиксированная постоянная (при этом необходимо, чтобы $c > 1$).

Тогда, если C' лежит в ε-окрестности кривой C, где $\varepsilon < b/2c$, то C лежит в ε_1-окрестности кривой C' для всех $\varepsilon_1 > (2c+1)\varepsilon$.

Эта теорема, как указывает автор, может иметь значение при конформных отображениях близких областей. Ю. Ю. Трохимчук

266. **Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях. Хавинсон** (Extremal problems for certain classes of analytic functions in finitely connected regions. Havinson S. Ya.), Amer. Math. Soc., Translat., 1957, 5. 1—33 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 8735.

267. **Асимптотические значения целых функций. Суньер-Балагер** (Valores asintóticos de las funciones enteras. Sunyer Balaguer F.), Collect. math., 1955—1956, 8, 187—211 (исп.)

Основные результаты первой главы были анонсированы автором ранее (РЖМат, 1954, 5546; в этом реферате в определении b должно стоять $\underline{\lim}$ вместо $\lim$. *Ред.*).

Во второй главе рассматриваются целые функции $f(z)$ бесконечного порядка. Доказаны следующие теоремы.

Теорема VI. Если существуют n кривых L_k, рассекающих кольцо $r \leqslant |z| \leqslant R$ таких, что на L_k $\ln|f(z) - a_k| < -\theta \ln M(r, f)$, где a_k — числа, удовлетворяющие условию $\ln|a_k - a_m| > -\theta_1 \ln M(r, f)$ ($\theta_1 < \theta$, $m \neq k$), то выполняется неравенство

$$n \leqslant c[\ln M(R, f)/\ln M(r, f)]^2 \ln^{-1} R/r,$$

где c — постоянная, зависящая только от θ и θ_1. Если $R = r[1 + (\ln\ln M(r, f))^{-1-\eta}]$, $\eta > 0$, то, за возможным исключением интервалов конечной суммарной длины, выполняется неравенство

$$n \leqslant c_1 r [\ln\ln M(r, f)]^{-1+\eta}.$$

Для $f(z)$ вводится уточненный порядок $\rho(r)$, как возрастающая функция, удовлетворяющая следующим условиям. Если $W(r) = r^{\rho(r)}$, то $\overline{\lim}_{r\to\infty} [W(r)]^{-1} \times \ln M(r, f) = 1$ и $W[r + \omega(W(r))] < \Omega W(r)$, где $\omega(x)$ — некоторая убывающая функция, для которой

$$\int^{\infty} \omega(x)\, d\ln x < \infty.$$

Теорема VII. Пусть $f(z)$ — целая функция с уточненным порядком $\rho(r)$. Если существуют n кривых L_k, рассекающих кольцо $r \leqslant |z| \leqslant r + \omega(W(r))$, таких, что на L_k $\ln|f(z) - a_k| < -\theta W(r))$, где a_k — числа, удовлетворяющие условию $\ln|a_k - a_m| > -\theta_1 W(r)$ ($\theta_1 < \theta$, $m \neq k$), то выполняется неравенство $n \leqslant c\Omega^2 r \times [\omega(W(r))]^{-1}$, где c зависит только от θ и θ_1. А. А. Гольдберг

268. **О целых функциях, представимых в виде интегралов Лапласа. Рабинович Ю. Л.**, Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 199—221

К функциям вида

$$f(z) = z^{\beta-1} e^{-az^{\alpha}} \psi(z),$$

где $\alpha > 1$, $a > 0$, $\beta > 0$ и $\psi(z)$ регулярна в некотором углу с вершиной в начале координат, причем в этом углу

$$|\psi(z)| < Be^{b|z|^{\alpha_1}},\ \alpha_1 < \alpha,$$

применяется преобразование Лапласа

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(\xi)\, e^{z\xi} d\xi.$$

$F(z)$ — целая функция. Показывается, что $F(z)$ имеет порядок $\nu = \alpha/(\alpha-1)$. Причем в некотором углу D с вершиной в начале

$$|F(z)| < B_1/|z|^{\beta}, \qquad (1)$$

функция $f(\xi)$ выражается через $F(z)$ по известной формуле

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(z)\, e^{z\xi} dz,$$

где L — граница угла D. Если с самого начала исходить не из функции $f(z)$, а из целой функции $F(z)$ порядка $\nu > 1$, удовлетворяющей в некотором углу условию (1), и с помощью ее построить по последней формуле $f(\xi)$, то показывается, что $f(\xi)$ при этом будет в некотором углу вести себя как $e^{-a|z|^{\alpha}}$, где α и ν связаны прежней зависимостью $\nu = \alpha/(\alpha-1)$. Указывается, кроме этого, как ведет себя асимптотически $F(z)$ при $z \to \infty$ в углу D в зависимости от того, как ведет себя $f(\xi)$ в окрестности начала.

Примечание референта. Выведенная формула (28) из § 1 для определения порядка целой функции через ее тейлоровские коэффициенты является хорошо известной (см., например., Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950, стр. 503). Сложное доказательство того (лемма 1), что функция

$$\varphi(z, \lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

имеет порядок $1/\lambda$, тип $\geqslant \lambda$, а при рациональном λ тип равен λ, является излишним. По известной формуле для определения типа через коэффициенты (см. указанную выше книгу, стр. 504) сразу можно подсчитать, что при любом $\lambda > 0$ тип равен λ.

А. Ф. Леонтьев

269. О сходимости подпоследовательности частных сумм одного ряда к целой функции конечного порядка. Трошин Г. Д., Матем. сб., 1956, 39, № 4, 433—446

В статье Репина И. И. (РЖМат, 1956, 5199) было показано, что если $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел с показателем сходимости $\rho_1 > \rho$,

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj} f(\lambda_j z) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

— последовательность порядка ω, сходящаяся во всей плоскости к функции $F(z)$, то тогда при условии

$$\frac{1}{\omega} > \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}$$

существуют пределы $\lim_{n\to\infty} \gamma_{nj} = \gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и при некотором дополнительном условии к функции $F(z)$ сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j f(\lambda_j z)$.

В реферируемой статье доказывается, что если это дополнительное условие не выполняется, то тогда существует зависящая только от $\{\lambda_n\}$ такая подпоследовательность целых положительных чисел $\{n_m\}$, что во всей плоскости

$$F(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\gamma=1}^{n_m} \gamma_j f(\lambda; z).$$

А. Ф. Леонтьев

270. Обобщение теории Нёрлунда о главном решении линейного разностного уравнения. I. Сиккема (A generalization of Nörlund's theory of principal solutions of linear difference equations. I. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1955, A58, № 5, 608—620; Indagationes math., 1955, **17**, № 5, 608—620 (англ.)

В порядке обобщения результата Нёрлюнда о том, что уравнение

$$y(x+\omega) + y(x) = h(x),$$

где $h(x)$ — целая функция, растущая не быстрее целой функции первого порядка минимального типа, имеет решение

$$h(x) = \lim_{\beta\to 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s h(x + s\omega)\, e^{-\beta(x+s\omega)}, \quad \beta > 0$$

(называемое главным решением), которое является целой функцией, также растущей не быстрее целой функции первого порядка минимального типа, ставится вопрос об определении частного решения более общего уравнения:

$$\sum_0^{\infty} a_n y^{(n)}(x) = h(x), \qquad (1)$$

имеющего тот же рост, что и правая часть $h(x)$. Рассматриваются случаи: а) $h(x)$ — целая функция порядка σ $(0 < \sigma \leqslant 1)$ минимального типа, функция

$$G(z) = \sum_0^{\infty} (n!)^{-1/\sigma} a_n z^n$$

— целая из класса $[1, \infty)$ (т. е. растет не быстрее целой функции первого порядка нормального типа); б) $h(x)$ — целая функция порядка σ $(0 < \sigma < 1)$ нормального типа τ, $G(z)$ принадлежит классу $[1, (\sigma\tau)^{-1/\sigma})$; в) $h(x)$ — целая функция порядка σ $(0 < \sigma < 1)$ максимального типа, $G(z)$ — целая функция порядка меньшего единицы; г) $h(x)$ целая функция порядка нуль, $G(z)$ — целая функция порядка нуль, удовлетворяющая, кроме того, еще одному дополнительному условию. Из предыдущих результатов автора (РЖМат, 1956, 3817 К) следует (теорема 1), что уравнение (1) во всех перечисленных случаях имеет решение $\eta(x)$ того же роста, что и $h(x)$ (единственное такого рода, если $a_0 \neq 0$). Автор ставит затем целью показать, в каком виде следует находить соответствующее решение $\eta(x)$. В случае б) показывается (теорема 2), что если $a_0 \neq 0$, то

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^{(n)}(x),$$

где коэффициенты b_n находятся из уравнений

$$a_0 b_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(если бы ряд $\sum_0^{\infty} a_n z^n = F(z)$ сходился, то тогда бы мы имели $\frac{1}{F(z)} = \sum_0^{\infty} b_n z^n$).

А. Ф. Леонтьев

271. Рост целых и субгармонических функций. Хейман (The growth of entire and subharmonic functions. Hayman W. K.), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michgan Press, 1955, 187—198 (англ.)

Обзорная статья, посвященная обсуждению основных результатов и нерешенных вопросов, которые группируются вокруг двух основных проблем. Первая из рассмотренных проблем заключается в изучении связи между $B(r) = \max_{|z|=r} u(z)$ и $A(r) = \min_{|z|=r} u(z)$, где $u(z) = \ln|f(z)|$, $f(z)$ — целая функция, или, при более общей постановке задачи,

$u(z)$ — произвольная субгармоническая функция (в статье при определении $A(r)$ и $B(r)$ на стр. 187 допущена опечатка. *Реф*). Если порядок $f(z)$ $k<1$, то основной результат $\overline{\lim}_{r\to\infty} A(r)/B(r) \geqslant \cos\pi k$ был получен еще в 1913—1915 гг. Валироном и Виманом, а затем уточнялся Безиковичем, Хейнсом и др. Указано, что эти теоремы переносятся и на общий случай, когда $u(z)$ — произвольная субгармоническая в $z\neq\infty$ функция, но не отмечено, что этот результат получен Хубером (Huber A., Comment math. helv., 1952, **26**, 91—116). В случае $k\geqslant 1$ и $\lambda<\infty$, где λ — нижний порядок $f(z)$, известно (Литтльвуд, 1908), что $\overline{\lim} A(r)/B(r) \geqslant -C(\lambda)$; автор показал (Proc. London Math. Soc., 1952, **2**, 469—512), что $C(\lambda)$ растет как $\ln\lambda$, а также получил оценку в случае бесконечного порядка, но эти оценки точны лишь в смысле порядка. При дополнительном предположении, что $A(r)=u(-r)$, Бёрлинг (Beurling A., Duke Math. J., 1949, **16**, 355—359) получил точное значение $C(\lambda)\equiv 1$. Вторая из рассмотренных автором проблем посвящена изучению асимптотических значений. Указываются обобщения теоремы Данжуа—Карлемана—Альфорса, связанные с дополнительными ограничениями на λ, полученные Хейнсом (Heins M. H., Ann. Math., 1948, **49**, 200—213, 533—537) и Кеннеди (РЖМат, 1956, 2935). Затем рассказано о примерах дефектных значений, не являющихся асимптотическими. Не упомянуто, что первый пример мероморфной функции с дефектным неасимптотическим значением построен Тейхмюллером (Teichmüller O., Dtsch. Math., 1939, **4**, 163—190) за 2 года до Шварц, названной в статье. Сравнительно подробно рассмотрен пример, принадлежащий автору (РЖМат, 1955, 702). Библ. 25 назв.

А. А. Гольдберг

272. О функциональном уравнении Римана. Бохнер, Чандрасекхаран (On Riemann's functional equation. Bochner S., Chandrasekharan K.), Ann. Math., 1956, **63**, № 2, 336—360 (англ.)

Рассматривается вопрос о возможных решениях уравнения

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\varphi(s)=\pi^{-1/2(\delta-s)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(\delta-s)\right]\times$$
$$\times\psi(\delta-s),\quad \delta>0 \qquad (1)$$

(при $\delta=1$ и $\varphi(s)=\psi(s)$ — это уравнение для дзета-функции Римана) вида

$$\varphi(s)=\sum_1^\infty a_n\lambda_n^{-s}\ (\lambda_n\uparrow\infty),$$

$$\psi(s)=\sum_1^\infty b_n\mu_n^{-s}\ (\mu_n\uparrow\infty),$$

причем при некоторых $\alpha>0$ и $\beta>0$

$$\sum|a_n|\lambda_n^{-\alpha}<\infty,\quad \sum|b_n|\mu_n^{-\beta}<\infty.$$

Пусть $D_\lambda=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}$ — нижняя плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ и $D(\lambda)$ — ее аналитическая плотность, т. е. величина, обладающая свойством: из предположения, что функция

$$f(s)=\sum_1^\infty c_n e^{-\lambda_n s}$$

аналитически продолжима из полуплоскости $R(s)>\sigma_c$, сходимости ряда через некоторый интервал длины большей $D(\lambda)$ прямой сходимости в левую полуплоскость $R(s)<\sigma_c$, следует, что $f(s)$ — целая функция (если, например, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant h>0$, то $D(\lambda)\leqslant 2\pi/h$). Величину $d_\lambda=\max(D_\lambda,\ D(\lambda))$ авторы называют модулярной плотностью последовательности $\{\lambda_n\}$. При фиксированных $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ доказывается, что: 1) если $d_\mu<\infty$, то количество линейно независимых решений уравнения (1) не превосходит минимума числа точек из $\{\lambda_n\}$, расположенных в интервале (в любом интервале) длины большей d_μ; 2) $d_\lambda\cdot d_\mu\geqslant 1$; 3) если $d_\lambda\cdot d_\mu<k+1$, то число решений уравнения (1) не превосходит k; 4) если $d_\lambda=d_\mu=1$ и $\mu_{n+1}-\mu_n=1$ для $n>n_0$, то $\delta=1$ или $\delta=3$, причем в случае $\delta=1$ единственными решениями уравнения (1) будут

$$\varphi(s)=\zeta(s),\quad \psi(s)=\zeta(s)\quad(\lambda_n=n,\ \mu_n=n),$$
$$\varphi(s)=(2^s-1)\zeta(s),\quad \psi(s)=(2^{1-s}-1)\zeta(s)$$
$$(\lambda_n=n-1/2,\ \mu_n=n),$$
$$\varphi(s)=(2^{1-s}-1)\zeta(s),\quad \psi(s)=(2^s-1)\zeta(s)$$
$$(\lambda_n=n,\ \mu_n=n-1/2).$$

Доказательства основаны на использовании получаемого из уравнения (1) соотношения

$$\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\delta+1)\right]}{\pi^{1/2(\delta+1)}}\sum_1^\infty\frac{a_n t}{\left(t^2+\lambda_n^2\right)^{1/2(\delta+1)}}-$$
$$-K_0(t)=\sum_1^\infty b_n e^{-2\pi\mu_n t},$$

где $K_0(t)$ регулярна на римановой поверхности функции $\ln t$ и $K_0(t)=O(|t|^{1-\eta})$, $\eta>0$, при $t\to\infty$ в каждом углу $|\arg z|\leqslant\theta_0$. Результаты относятся к кругу вопросов, рассмотренных Гамбургером и Зигелем (см., например, Титчмарш, РЖМат, 1954, 5058 к.

А. Ф. Леонтьев

273. О функциональном уравнении Римана. Чандрасекхаран, Мандельбройт (Sur l'équation fonctionnelle de Riemann. Chandrasekharan Komaravolu, Mandelbrojt Szolem), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 24, 2793—2796 (франц.)

Рассматривается то же функциональное уравнение, что и в статье Бохнера и Чандрасекхарана (реф. 272), уравнение (1). Указываются некоторые условия, которым должны подчиняться $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ для того, чтобы функции $\Phi(s)$ и $\psi(s)$ удовлетворяли уравнению (1).

Пусть $D=\overline{\lim_{n\to\infty}} n/\mu_n$, $h=\underline{\lim_{n\to\infty}}(\mu_{n+1}-\mu_n)$, $N_\lambda(x)$ — число λ_n, меньших x. Пусть далее функции $\Phi(s)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют уравнению (1), причем в этом уравнении $\delta=1$ или $\delta=3$. Тогда для всякой пары чисел $0<a<b$ с $b-a>(D+1/h)$ имеем $N_\lambda(b)-N_\lambda(a)>0$; любое λ_n есть линейная комбинация с целыми коэффициентами членов из $\{\lambda_n\}$, расположенных в $[a,\ b]$. Функция $f(s)=\sum_1^\infty b_n e^{-2\pi\mu_n s}$ (ряд сходится для $\sigma=\mathrm{Re}(s)>0$) регулярна и однозначна во всей плоскости, кроме точек $\pm i\lambda_n$ — полюсов и возможно, начала координат, причем в полуплоскости, $\sigma<0$ она представляется в виде

$$\sum_1^\infty c_n e^{2\pi\mu_{-n}s}\ (0<\mu_{-n}\uparrow\infty).$$

А. Ф. Леонтьев

274. Полигональное представление римановых поверхностей. Неванлинна (Polygonal repre-

sentation of Riemann surfaces. Nevanlinna Rolf), Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 65—70 (англ.)

Пусть PQ_2Q_1 — жорданов треугольник, у которого аналитически отождествлены стороны PQ_1 и PQ_2. Этот треугольник конформно эквивалентен кольцу $1<|\omega|<\rho\leqslant\infty$. Точка P называется гиперболической или параболической, если $\rho<\infty$ или $\rho=\infty$. Треугольник PQ_2Q_1 квазиконформно отображается на полуполосу $s>0$, $0<t<1$ в $s+it$-плоскости. Даются достаточные условия для параболического типа. Например, если $\delta(s_0)$ — максимальное значение характеристики квазиконформного отображения на отрезке $s=s_0$, то для параболичности достаточна расходимость интеграла $\int^{\infty}\delta^{-1}(s)\,ds$. Приведены также обобщения теорем искажения Грётша и Альфорса. Много примеров. Имеются опечатки.

Совершенно отсутствуют ссылки на литературу по этому вопросу. Между тем все приведенные теоремы известны или представляют легкую модификацию известных теорем (Волковыский Л. И., Тр. матем. ин-та им. Стеклова, 1950, **34**; Kakutani S., Japan. J. Math., 1937, **13**, 375—392). А. А. Гольдберг

275. **Об оценке $T(r, f)$ без привлечения полюсов. Сюн Цзин-лай** (Sur la limitation de $T(r, f)$ sans intervention des pôles. Hiong King Lai), Bull. sci. math., 1956, **80**, nov.-déc., 175—190 (франц.)

Приводятся оценки сверху для $T(r, f)$ через функции $N(r, a, f^{(k)})$, причем новым обстоятельством является отсутствие в оценке членов $N(r, \infty)$. Основным результатом является

Теорема 1. Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z|<R\leqslant\infty$; a, b, c — три числа такие, что сферические расстояния $[\infty, a]$, $[0, b]$, $[0, c]$, $[b, c]\geqslant\delta>0$, $f(0)\neq a, \infty$; $f^{(k)}(0)\neq 0$, b, c и $f^{(k+1)}(0)\neq 0$. Тогда для $|z|=r<\rho<R$ справедливо неравенство

$$T(r, f)<N(r, a, f)+N(r, b, f^{(k)})+N(r, c, f^{(k)})-$$
$$-N_1(r, \infty, f)-N_1(r, 0, f^{(k+1)})+S_k(r, f).$$

Здесь $S_k(r, f)\leqslant A_k-30\ln\delta+\ln^+|f(0)|+$
$$+\ln^+|f^{(k)}(0)|+|\ln|f^{(k)}(0)||+B_k\ln^+r^{-1}+$$
$$+B_k'\ln\rho r^{-1}+B_k''\ln\rho(\rho-r)^{-1}+$$
$$+C_k\ln^+T(\rho, f),$$

где $A_k, \ldots, C_k$ — числовые постоянные, зависящие только от k.

Из приложений отметим следующий результат.

Теорема 3. Если $f(z)\not\equiv\text{const}$ мероморфна в $z\neq\infty$, $a\neq\infty$, $b\neq c$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, то имеет место неравенство

$$\delta(a, f)+(k+1)[\delta(b, f^{(k)})+\delta(c, f^{(k)})]\leqslant 2(k+1).$$

Получены также обобщения на случай, когда вместо $f^{(k)}(z)$ рассматривается $f_k(z)=\sum_{n=0}^{k}a_n(z)f^{(n)}(z)$. Имеются приложения и для случая функций, мероморфных в единичном круге. А. А. Гольдберг

276. **О голоморфных функциях без нулей, производные которых имеют исключительное значение. Сюн Цзин-лай** (Sur les fonctions holomorphes sans zéros dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle. Hiong King-Lai), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 16, 2125—2127 (франц.)

Обобщены теоремы, полученные автором ранее (реф. 264). Оказывается, что утверждения теорем I и II остаются справедливыми, если в теореме I требовать, чтобы 1 была равномерным исключительным значением B не для $f(z)$, а для $f^{(k)}(z)$, а в условии теоремы II неравенство $N(r, 1, f)<-\lambda\ln(1-r)$ заменить неравенством $N(r, 1, f^{(k)})<-\lambda\ln(1-r)$, при этом постоянные H и K будут зависеть от k.

А. А. Гольдберг

277. **К теоремам Шотки и Пикара. Шагинян А. Л.**, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 1, 9—19 (рез. арм.)

Пусть Ω — некоторая риманова поверхность (полная или неполная), $S(\Omega)$ — ее граница, 0 — фиксированная точка на Ω, лежащая над началом координат, P — произвольная точка на Ω, L — спрямляемая кривая на Ω, соединяющая P с 0, s — длина участка L от 0 до некоторой точки $Q\in L$, $\rho(s)$ — расстояние от Q до $S(\Omega)$. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая функция, заданная на Ω. Доказано следующее обобщение теоремы Шоттки.

Теорема 1. Если в Ω функция $w=f(z)$ не принимает конечных значений a и b, то в любой точке $P\in S$ имеет место оценка:

$$\ln\left|\frac{f(z)-a}{b-a}\right|<k\exp\left[2\int_L\frac{ds}{\rho(s)}\right]+C, \qquad (1)$$

где C — абсолютная постоянная, а k зависит только от $(f(0)-a):(b-a)$.

Из теоремы 1 получается следующее обобщение теоремы Пикара:

Теорема 2. Если

$$\sup_{z\in\Omega}\left\{\ln|f(z)|\exp\left[-2\int_L\frac{ds}{\rho(s)}\right]\right\}=\infty, \qquad (2)$$

где sup берется по всем $z\in\Omega$ и по всем дугам L, соединяющим 0 с z, то $f(z)$ принимает в Ω все конечные значения, кроме, быть может, одного.

Получены различные обобщения и следствия из этих двух теорем, относящиеся к гармоническим функциям в n-мерном пространстве, направлениям Жюлиа и случаю, когда Ω является однолистной областью.

В работе имеются мелкие неточности и опечатки. Так, по мнению референта, нуждается в уточнении высказывание на стр. 13 о том, что пятиугольник $\alpha\beta\gamma\delta\mu$ покрывает область D. В примере на стр. 16 должно быть $f(z)=\exp\{\exp[z\ln(z-\pi i)]\}$.

А. А. Гольдберг

278. **Модулярные функции, определяемые с помощью отклоняющего отображения. Коэн** (Modular functions defined by perturbation mappings. Cohn Harvey), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 341—348 (англ.)

Приводится основанный на конформном отображении метод построения модулярной формы $E_4(z)=\sum_{p/q}(pz+q)^{-4}$, где p/q — приведенные дроби (положительные, отрицательные, 0/1 и 1/0). С этой целью из фундаментальной области модулярной группы отрезается часть $\operatorname{Im} z>1/\varepsilon$. Оставшаяся часть и все ее отображения, получаемые с помощью подстановок группы, образуют односвязную область Π_ε (область $0<\operatorname{Im} z<1/\varepsilon$, из которой выкинуты круги диаметра ε/q^2, касающиеся действительной оси в точках p/q). Автор ищет отображение Π_ε на верхнюю полуплоскость плоскости ζ с помощью суперпозиции отображений $\tau_\varepsilon^{p/q}(z)$ областей $\operatorname{Im} z>0$, $|z-p/q-i\varepsilon/q^2|>\varepsilon/q^2$

при условии неподвижности точки i и сохранения в ней направления. Найдя

$$\frac{\zeta_\varepsilon^{p/q}(z)-i}{\zeta_\varepsilon^{p'q}(z)+i}=\frac{qi-p}{-qi-p}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\varepsilon(z-i)}{2(qz-p)(qi-p)}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\varepsilon(z+i)}{2(qz-p)(-qi-p)}}$$

и замечая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\zeta_\varepsilon^{p/q}-z}{\varepsilon^2}=-\frac{\pi^2}{12}\frac{(1+z^2)(q+pz)}{(p-qz)(p^2+q^2)^2},$$

автор полагает

$$\zeta_\varepsilon(z)=z-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{12}P(z),\quad P(z)=$$

$$=\sum_{p/q}\frac{(z^2+1)(q+pz)}{(p-qz)(p^2+q^2)^2}$$

и показывает (§ 4—7), что

$$P(z)=z^3-\frac{5}{2}z-\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p/q}q^{-3}(p+qz)^{-1},$$

откуда $d^3P(z):dz^3=6E_4(z)$.

Примечание референта. В формулах (7), (8) статьи имеются описки (пропущен множитель ε под знаком sh и изменен знак суммы). Г. П. Боев

279. **О классе нормально исчерпываемых римановых поверхностей и его связях с другими классами.** Андреян-Казаку (Sur la classe des surfaces de Riemann normalement exhaustibles et ses relations avec d'autres classes. Andreian Cazacu Cabiria), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 19, 2281—2283 (франц.)

Сообщение о теоремах, доказанных ранее автором (РЖМат, 1956, 7304). А. А. Гольдберг

280. **Мероморфные дифференциалы на открытых римановых поверхностях.** Мюрберг (Différentielles méromorphes sur des surfaces de Riemann ouvertes. Myrberg Lauri), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 18, 1194—1195 (франц.)

Пусть Φ — мероморфный дифференциал на открытой римановой поверхности S, $\{S_n\}$ — исчерпание S, φ_n — компонента Φ, представляющая мероморфный дифференциал на S_n, имеющий там те же периоды и особенности, что Φ и ортогональный ко всем дифференциалам первого рода на S_n (интегрирование — в смысле главного значения). Вводится класс F мероморфных дифференциалов Φ, удовлетворяющих условию $\limsup_{n\to\infty}\|\Phi-\varphi_n\|_{S_n}<\infty$. Все дифференциалы первого рода с ограниченной нормой входят в F; всякий точный дифференциал первого рода из F имеет ограниченную норму. Это приводит к теореме: если $S\in O_{AD}$ (РЖМат, 1955, 3172), то дифференциалы класса F определяются своими периодами и особенностями.

Заметка представляет модификацию теории мероморфных дифференциалов, построенную Баде (реф. 281), исходя из работы Альфорса (Ahlfors L., Comment. math. helv., 1950, 24, № 2, 100—134).

Л. И. Волковыский

281. **Функции с полярными особенностями на компактных областях и открытых римановых поверхностях.** Баде (Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Riemann ouvertes. Bader Roger), Ann. scient. École norm. supér., 1954, 71, № 3, 243—300 (франц.)

Главным предметом настоящей работы является изучение дифференциалов второго и третьего порядков, имеющих несколько полярных особенностей (в общем случае бесконечное число) на открытой римановой поверхности S. С этой целью автор рассматривает сначала случай компактных областей, например Альфорса, который занимался аналогичным вопросом, посвященным дифференциалам первого порядка с конечной нормой (Ahlfors, Comment. math. Helv., 1950, 24, № 2, 100—134). Автор пользуется здесь замкнутой поверхностью $\hat{D}$ Шоттки, соответствующей области D, компактной на S ($\hat{D}$—дубль D; определение дубля см., например, РЖМат, 1956, 7312К). Мероморфные дифференциалы на D (не имеющие полюсов на границе D), которые продолжены также на $\hat{D}$, автор называет дифференциалами Шоттки—Альфорса (Schottky—Ahlfors). Эти дифференциалы обладают важными минимизирующими свойствами.

Доказано, что любой мероморфный дифференциал на D является суммой дифференциала Шоттки—Альфорса и аналитического дифференциала первого порядка, интеграл которого однозначен на D (точный дифференциал) и норма которого конечна.

Подобная теорема разлагает все дифференциалы, мероморфные на открытой поверхности S, на сумму предела дифференциалов Шоттки—Альфорса относительно некоторых компактных областей, исчерпывающих S, и точного аналитического дифференциала первого порядка конечной нормы. Затем автор рассматривает представляющий особый интерес класс мероморфных дифференциалов на S, которые могут иметь бесконечное число полюсов. Эти дифференциалы определены их периодами и их сингулярными частями на S типа O_{AD}.

В следующей главе даны аналогичные теоремы для гармонических полярных дифференциалов.

Наконец, рассматриваются мероморфные функции, так называемые мультипликативные на D или на S.

Значения этих функций при продолжении по замкнутому пути находятся путем умножения на константу, зависящую от класса гомологии этого пути. Здесь дана теорема разложения на два элемента, один из которых по своему модулю равен 1 на контуре D, тогда как другой не имеет ни нулей, ни полюсов. В заключение дается частное распространение теоремы Абеля для определенного класса мультипликативных функций на параболической поверхности S. S. Stoïlow

282. **Соотношение между гармоническими размерностями.** Курамоти (Relations between harmonic dimensions. Kuramochi Zenjiro), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 7, 576—580 (англ.)

Пусть F — открытая риманова поверхность, D — некомпактная область F с относительной границей, образованной самое большее из счетного множества аналитических кривых, и $S(z)$ — гармоническая положительная функция в D, равная нулю на границе D. При помощи операции «экстремизации» функции $S(z)$ осуществляется построение гармонической положительной функции на всей поверхности $F-F_0$ (F_0 — компактная круговая область без общих точек с D); пользуясь языком приближения, можно сказать, что эта функция является нулевой на границе F_0 и на части идеальной границы F, не содержащейся в D, и равна $S(z)$ на части идеальной границы F, содержащейся в D. Операция экстремизации всегда возможна, если $S(z)$ удовлетворяет определенным условиям, которые выполняются, например, для обобщенных функций Грина (пределы функций Грина, когда полюс стремится к идеальной границе). Понятие функции, экстремизированной данной функцией, представляющее интерес само по себе, введено автором для того, чтобы ответить на вопрос, постав-

ленный ранее М. Одзава (РЖМат, 1957, 376). Ответ носит более общий характер, чем поставленная задача, и выражен следующим образом: если $\dim^* D$ — число линейно независимых функций $S(z)$, удовлетворяющих указанным условиям, а $\dim(F-F_0)$ — число линейно независимых гармонических функций в $F-F_0$, обращающихся в нуль на границе F_0, то $\dim^* D \leqslant \dim^*(F-F_0)$. Если D_1, D_2 — две области того же типа, что и область D с $D_1 \cap D_2 = \Phi$, то $\dim^* D_1 + \dim^* D_2 \leqslant \dim(F-F_0)$. C. Constantinesku

283. Определение меры линейных множеств. К у р а м о т и (An estimation of the measure of linear sets. K u r a m o c h i Z e n j i r o.), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 2, 105—110 (англ.)

Известна следующая теорема Пфлугера и Мори (Pfluger A., C. r. Acad. sci. 1950, 230, 166—168; Mori A., J. Math. Soc. Japan, 1951, 3, 285—289). Пусть R — открытая риманова поверхность и пусть $\{R_n\}$ — исчерпывающая последовательность областей R, причем граница β_n в области R_n состоит из конечного числа $\nu(n)$ простых замкнутых кривых. Открытое множество $R_n - \bar{R}_{n-1}$ состоит из конечносвязных компонент G_{ni}. Пусть $w_{ni}(z)$ — гармоническая мера $\beta_n \cap F_r G_{ni}$ относительно G_{ni}. Предположим, что $\mu_{ni} = 1/D(\omega_{ni})$, где $D[\omega(z)]$ — интеграл Дирихле $\omega(z)$, $\mu_n = \min_i \mu_{ni}$ и $N(n) = \max_{j \leqslant n} \nu(j)$. Тогда, если

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j - \frac{1}{2}\ln N(n)\right) = +\infty,$$

то поверхность R принадлежит к классу O_{AB}, т. е. на R не существует ограниченных однозначных аналитических функций, за исключением констант.

Автор рассматривает частный случай, когда R является областью в плоскости (z), имеющей границу β, расположенную на действительной оси, и доказывает следующий критерий, не зависящий от $N(n)$.

Если любая связная компонента величины β_n является выпуклой кривой и если

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\mu_n}} = \infty,$$

то β является нулевой линейной мерой, т. е. $R \in O_{AB}$.

M. Jurchescu

284. Локальные представления мероморфных функций двух переменных. М и н ь С ы - х а о, Д у н Х у а й - ю н ь (二元半純函數的局部展開式. 閔嗣鶴, 董懷允), 北京大學 學報 (自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 1, 25—38 (кит.; рез. англ.)

Пусть $f(w, z)$ — мероморфная функция в области G. Доказывается, что функция $f(w, z)$ может быть представлена в окрестности любой точки $(w_1, z_1) \in G$ (если эта точка не есть точка разветвления) или разложением вида

$$f(w, z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k(z)}{(w-\varphi(z))^k} + R(w, z), \qquad (1)$$

или разложением

$$f(w, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(w)}{(z-z_1)^k} + R_1(w, z), \qquad (2)$$

где $\varphi(z)$, $c_k(z)$ — регулярные функции в окрестности точки z_1, функции $d_k(w)$ — регулярны в окрестности точки w_1 и $R(w, z)$, $R_1(w, z)$ — аналитические функции в окрестности точки (w_1, z_1). Если (w_1, z_1) — регулярная точка $f(w, z)$, то считаются $m=0$, $n=0$ и суммы в формулах (1) и (2) принимаются равными нулю. Дается представление подобного же типа для функции $f(w, z)$ и в окрестности точки разветвления.

Эти представления являются аналогом представления Лорана для функций одного комплексного переменного. А. А. Темляков

285. Распространение теоремы Привалова. Л у Ц и к э н, Ч ж у н Т у н - д э (Привалов 定理的拓廣. 陸啓鏘, 鍾同德), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 1, 144—165 (кит.; рез. англ.)

Пусть $z_\alpha = u_\alpha + iu_{n+\alpha}$, $n \geqslant 2$, $\alpha = 1, \ldots, n$ и D — $2n$-мерная область пространства переменных $u_1, \ldots, u_{2n}$, граница Ω которой есть $(2n-1)$-мерное гладкое, ориентируемое многообразие класса C^2, определяемое уравнением

$$F(u_1, \ldots, u_{2n}) = 0.$$

Пусть

$$K_{2n-1}(z, \zeta) = \delta \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \frac{1}{[r(r-\zeta)]^{2n-1}} \times$$

$$\times\, dz_1 \ldots dz_n d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_{\alpha-1} d\bar{z}_{\alpha+1} \ldots d\bar{z}_n,$$

где

$$r(z-\zeta) = \sqrt{|z_1-\zeta|^2 + \ldots + |z_n-\zeta_n|^2}$$

и

$$\delta = (n-2)!/(2\pi i)^n.$$

Известно, что если $f(z)$ регулярна в области D и на ее границе, то имеет место интегральное представление Мартинелли—Бохнера

$$f(w) = \delta \int_\Omega f(z) K_{(2n-1)}(z, w), \quad z \in D.$$

Результаты, полученные авторами, выражаются следующими теоремами.

Т е о р е м а 1. Если $z_0 \in \Omega$, тогда главное значение (г. з.) интеграла от $K_{(2n-1)}(z, z_0)$ по Ω существует и

$$\text{г. з.} \int_\Omega K_{(2n-1)}(z, z_0) = \frac{1}{2}.$$

С л е д с т в и е. Если $f(z)$ определена на Ω и удовлетворяет условию Гёльдера, $z_0 \in \Omega$, тогда

$$\text{г. з.} \int_\Omega f(z) K_{(2n-1)}(z, z_0)$$

существует.

Т е о р е м а 2. Если функция $f(z)$ определена и непрерывна на Ω, удовлетворяет условию Гёльдера, определяет в области D функцию

$$F(w) = \int_\Omega f(z) K_{(2n-1)}(z, w)$$

и если w_0 — произвольная точка на Ω, тогда

$$F_i(w_0) = \text{г. з.} \int_\Omega f(z) K_{(2n-1)}(z, w_0) + \frac{1}{2} f(w_0),$$

$$F_l(w_0) = \text{г. з.} \int_\Omega f(z) K_{(2n-1)}(z, w_0) - \frac{1}{2} f(w_0),$$

где $F_i(w_0)$ и $F_l(w_0)$ обозначают предельные значения $F(w)$, когда w приближается к w_0 соответственно, с внутренней и с внешней стороны области D.

Т е о р е м а 3. Если $f(z)$ — регулярна в D и на ее границе, тогда $F_i(z_0) = f(z_0)$. А. А. Темляков

286. **Общие минимальные задачи и репрезентативные области. Одзаки, Оно, Умедзава** (General minimum problems and representative domains. Ozaki Shigeo, Ono Isao, Umezawa Toshio. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. 1955, A5 1—7) (англ.)

Авторы рассматривают аналитические функции $W = W(Z)$ в векторном пространстве, где $W \equiv (w_1, \ldots, w_k)'$ и $Z \equiv (z_1, \ldots, z_k)$ являются вектор-столбцами с k компонентами, а элементами w_i вектора W есть аналитические функции всех элементом z_i вектора Z в ограниченной области B из C_k. Авторы сначала определяют функцию $F(Z)$, которая минимизирует интеграл

$$J(F) \equiv \int_B F^*(Z) F(Z)\, d\omega = \|F\|^2$$

при условиях $W(t) = 0$, $[dW/dZ]_{Z=t} \equiv E_k$, где $F^*(Z)$ — преобразованный и сопряженный вектор $F(Z)$, $d\omega$ — элемент объема в B, t — данная точка в B, dW/dZ — матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial z_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial w_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_k}{\partial z_k} \end{bmatrix},$$

а E_k — единичная матрица порядка k. Они определяют минимизирующую функцию F в терминах полной ортонормальной системы $\{\varphi_\nu(Z)\}$ в $L^2(B)$. Имея эту минимизирующую функцию, авторы получают репрезентативную область Бергмана для этого класса векторных функций. W. T. Martin

Перевод из Math. Revs., 1956, **17**, № 2, 144.

287. **О непрерывности аналитических функций многих переменных. Попович** (Asupra continuităţii funcţiilor analitice de mai multe variabile. Popovici Constantin), Bul. ştiinţ. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 4, 477—480 (рум.)

В своей диссертации в 1905 г. Д. Помпейю (D. Pompeiu) построил однозначную аналитическую функцию, непрерывную на множестве ее особенностей, которое имеет положительную площадь. Автор, распространяя результаты Д. Помпейю, строит аналитическую функцию от n комплексных переменных, непрерывную на множестве ее особенностей ненулевой меры, размерности q 2, где $q \leqslant n$. C. Constantinescu

288. **О голоморфно-сепарабельных и голоморфно-выпуклых аналитических пространствах. Реммерт** (Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. Remmert Reinhold.), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 2, 118—121 (франц.)

Пусть X — аналитическое пространство, $R(X)$ — кольцо функций, голоморфных в X (все рассматриваемые пространства предполагаются связными). Пространство X называется голоморфно-сепарабельным, если для двух точек x, $x' \in X$, $x \neq x'$, существует такая функция $f(x) \in R(X)$, что $f(x) \neq f(x')$. Известно (РЖМат, 1956, 6543), что всякое K-полное аналитическое пространство комплексной размерности n аналитически изоморфно области, расположенной в C^n. На основании этого предложения и того, что всякое голоморфно-сепарабельное пространство есть K-полное, высказывается теорема: если X голоморфно-сепарабельное пространство размерности n, то существует голоморфное и взаимно однозначное отображение τ пространства X в C^{2n+1}. Из этой теоремы как непосредственное следствие вытекает: если X — голоморфно-полное пространство (т. е. если оно K-полное и голоморфно-выпуклое), то существует собственное, голоморфное и взаимно однозначное отображение пространства X в C^N (N — достаточно большое).

Вообще аналитическое пространство не является голоморфно-сепарабельным (например, компактное аналитическое пространство). Но в некоторых случаях оказывается возможным ассоциировать аналитическому пространству голоморфно-сепарабельное пространство. Это делается с помощью понятия «ядра» аналитического пространства: пара (X^*, τ) называется ядром пространства X, если выполняются следующие условия:

1) X^* — голоморфно-сепарабельное пространство, τ — голоморфное отображение X на X^*;

2) голоморфизм $\tau^*: R(X^*) \to R(X)$, порожденный отображением τ, есть изоморфизм.

Далее формулируется теорема: если X — голоморфно-выпуклое комплексное аналитическое многообразие (соответственно, голоморфно-выпуклое аналитическое пространство с $k > n-2$ аналитически независимыми функциями в $R(X)$), то существует ядро (X^*, τ). X^* — голоморфно-полное аналитическое пространство, размерность которого больше числа аналитически независимых функций в $R(X)$. При доказательстве этого предложения, по словам автора, используются недавно полученные Штейном результаты об аналитическом разложении аналитических пространств (РЖМат, 1957, 8591). Автор предполагает справедливой эту теорему для голоморфно-выпуклых пространств, но для ее доказательства результаты Штейна нуждаются в принципиальном обобщении. Как следствия этой теоремы автор получает, например, следующие предложения: всякое комплексное голоморфно-выпуклое многообразие есть соединение счетного числа компактов; теорема об апроксимации Вейля-Ока справедлива для всех голоморфно-выпуклых аналитических многообразий. Доказательства в статье не приводятся. А. В. Лебедев

289. **Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. Потапов В. П.**, Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, **4**, 125—236; Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 185—186

Прописными буквами обозначаются квадратные матрицы порядка m, через J обозначается диагональная матрица $\|\varepsilon_j \delta_{jk}\|_1^m$, у которой $\varepsilon_j = 1$ при $j = 1, 2, \ldots, p$ и $\varepsilon_j = -1$ при $j = p+1, \ldots, m$ ($p + q = m$, $p, q \geqslant 0$). Матрица U называется J-унитарной, если $U^* J U = J$, где U^* — матрица, транспонированная и комплексно-сопряженная к U ($U^* = \bar{U}'$). Матрица W называется J-нерастягивающей, если $W^* J W \leqslant J$ (неравенство $A \geqslant 0$ означает, что A — эрмитово-неотрицательная матрица; неравенство $A \geqslant B$, — что $A - B \geqslant 0$).

Рассматривается класс $\mathfrak{R}_J$ всех матриц-функций $W(\zeta)$ J-нерастягивающих и мероморфных в круге $|\zeta| < 1$. Основная задача исследования состоит в установлении общего вида $W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$. На этом пути устанавливается:

I. Общий вид J-нерастягивающей матрицы-функции $W_0(\zeta)$, голоморфной в круге $|\zeta| < 1$ и имеющей там всюду отличный от нуля определитель, дается мультипликативным интегралом

$$W_0(\zeta) = U \overrightarrow{\int_0^l} \exp\left(\frac{\zeta + e^{i\vartheta(t)}}{\zeta - e^{i\vartheta(t)}} H(t) J dt\right), \qquad (1)$$

где $\vartheta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l, \quad 0 \leqslant \vartheta(t) \leqslant 2\pi)$ — неубывающая функция, $H(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — суммируемая эрмитово-неотрицательная матрица-функция со следом $\equiv 1$,

а U — постоянная J-унитарная матрица. Доказывается, что множество всех точек $\zeta = \exp(i\vartheta(t \pm 0))$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ на единичной окружности является дополнительным ко множеству всех точек этой окружности, в которых $W(\zeta)$ регулярна и J-унитарна. Отсюда следует

II. Общий вид целой матрицы-функции $Y(\lambda)$, J-унитарной на вещественной оси и J-нерастягивающей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, дается мультипликативным интегралом

$$Y(\lambda) = Y(0)\int_0^l e^{i\lambda H(t)\,Jdt}, \qquad (2)$$

где $H(t)$ — матрица-функция, указанная в теореме I. Равенство (2) иначе означает, что $Y(\lambda) = Z(l;\lambda)$, где $Z(t;\lambda)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$ — решение дифференциальной системы

$$dZ/dt = i\lambda ZH(t)J, \quad Z(0;\lambda) = Y(0).$$

Таким образом, предложение II дает критерий разрешимости некоторой обратной задачи для дифференциальной системы $dz/dt = \lambda zH(t)J$ (z — m-мерный вектор). К последней, заметим, может быть сведена любая линейная самосопряженная система дифференциальных уравнений какого-либо порядка с линейно входящим параметром λ.

Весьма тонкими рассуждениями показывается, что если у функции $W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$ имеется полюс $\zeta = \beta$, то всегда возможно построить элементарный множитель (э. м.) $B_\beta(\zeta)$ вида

$$B_\beta(r) = U\begin{pmatrix} I_{m-q'} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\bar\beta\zeta}{\beta-\zeta}\dfrac{\beta}{|\beta|}I_{q'} \end{pmatrix}U^{-1}\left(I_r = \|\delta_{jk}\|_1^r\right),$$

где $q' \leqslant q$, а U — некоторая J-унитарная матрица, так чтобы $B_\beta^{-1}(\zeta)W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$. Пусть $\{\beta_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — конечная или бесконечная последовательность всех полюсов функции $W(\zeta)$ внутри единичного круга, содержащая каждый полюс столько раз, какова его кратность. Построим для β_1 э. м. $B_{\beta_1}(\zeta)$ так, чтобы $W_1(\zeta) = B_{\beta_1}^{-1}(\zeta)W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$, затем э. м. $B_{\beta_2}(\zeta)$ так, чтобы $W_2(\zeta) = B_{\beta_2}^{-1}(\zeta)W_1(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$ и т. д. Образуем произведение $\mathfrak{B}_\infty(\zeta) = B_{\beta_1}(\zeta)B_{\beta_2}(\zeta)\ldots$ Если оно бесконечно, то доказывается, что оно сходится равномерно на каждой замкнутой части круга $|\zeta| < 1$, не содержащей полюсов β. Замечательно, что произведение $\mathfrak{B}_\infty(\zeta)$ с точностью до J-унитарного множителя справа не зависит от порядка нумерации полюсов β. Функция $W_\infty(\zeta) = \mathfrak{B}_\infty^{-1}(\zeta)W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$ и уже голоморфна в круге $|\zeta| < 1$. Аналогичным образом по нулям $\{\alpha_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ определителя $\det W_\infty(z)$ в круге $|\zeta| < 1$ выделяется конечное или бесконечное произведение $\mathfrak{B}_0(\zeta) = B_{1/\alpha}(\zeta)B_{1/\alpha_2}(\zeta)\ldots$ так, чтобы функция $W_0(\zeta) = \mathfrak{B}_0^{-1}(\zeta)W_\infty(\zeta)$ была голоморфной в круге и имела там всюду определитель, отличный от нуля. Элементарный множитель $B_{1/\alpha_k}(\zeta)$ имеет вид:

$$B_{1/\alpha_k}(\zeta) = V_k\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar\alpha_k\zeta}\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k}I_{p_k'} & 0 \\ 0 & I_{m-p_k'} \end{pmatrix}V_k^{-1},$$

где $p_k' \leqslant p_k$, а V_k — некоторая J-унитарная матрица. Функция $\mathfrak{B}_0(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$ также не зависит от порядка нумерации нулей α с точностью до J-унитарного множителя справа. Таким образом, в самом общем случае (при единственном условии, что $\det W(\zeta)$ не есть тождественный нуль) матрица-функция $W(\zeta) \in \mathfrak{R}_J$ представима в виде $W(\zeta) = \mathfrak{B}_\infty(\zeta)\mathfrak{B}_0(\zeta)W_0(\zeta)$, где $W_0(\zeta)$ имеет выражение (1).

В частном случае, когда $J = I_m$ $(q = 0)$ и, следовательно, $W^*(\zeta)W(\zeta) \leqslant I_m$, функция $W(\zeta)$ $(\in \mathfrak{R}_J$ не может иметь полюсов в круге $|\zeta| < 1$ и в указанном выше ее представлении произведение $\mathfrak{B}_\infty(\zeta)$ будет отсутствовать.

Во введении автор указывает роль его исследования в теории М. С. Лившица (РЖМат, 1954, 5660) спектральных свойств несамосопряженных операторов. В приложении излагается понятие мультипликативного интеграла Стилтьеса, устанавливаются для него аналоги теорем Хэлли и другие предложения, широко используемые в статье.

Для установления перечисленных выше основных предложений понадобилось большое количество вспомогательных предложений, многие из которых представляют самостоятельный интерес для теории матриц и теории аналитических матриц-функций. Так, для нерастягивающих матриц-функций $W(\zeta)$ $(\in \mathfrak{S}_{I_m})$ найдены тонкие аналоги классических лемм Шварца и Жюлиа об аналитических функциях, отображающих единичный круг в себя. Устанавливается «полярное» представление J-нерастягивающей матрицы T, согласно которому $T = RU$, где U — J-унитарная матрица, а R — J-эрмитова матрица $(JR = R^*J)$ с неотрицательными собственными числами. Доказывается, что бесконечное произведение ΠT_k J-нерастягивающих матриц T_k $(k = 1, 2, \ldots)$ всегда сходится, если сходится произведение ΠR_k, составленное из «модулей» R_k $(k = 1, 2, \ldots)$ этих матриц и др.

В настоящее время отдельные звенья этого трудного исследования удалось упростить (см. предыдущую ссылку и Бродский М. С. Матем. сб., 1956, 39, № 2, 179—200). М. Г. Крейн

290. О регуляризации последовательностей и функций по Мандельбройту. Пастидес (Sur la régularisation des suites et des fonctions de M. S. Mandelbrojt. Pastidès Nicolas), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 2, 132—204 (франц.)

По содержанию работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается класс функций $f(x)$ таких, что они имеют производные всех порядков, причем $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определена на $-g_n < x < g_n$ и на этом интервале $|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n$. Ставится задача о возможности замены чисел M_n для некоторых n меньшими числами без изменения рассматриваемого класса функций. Отличие от классического случая в том, что интервалы $-g_n < x < g_n$ являются переменными. Пусть $\mu_n = \ln M_n$ и $\{\mu_n^\omega\}$ — последовательность (регуляризованная последовательность), полученная из $\{\mu_n\}$ методом регуляризации с помощью функции $\omega(t)$ (по поводу регуляризации последовательностей см. РЖМат, 1956, 6553К). Положим $M_n^\omega = e^{\mu_n\omega}$ (для бесконечно многих значений n имеем $M_n^\omega = M_n$). Первая теорема утверждает, что если $g_n \to 0$ при $n \to \infty$ и функция $\omega(t)$ такова, что

$$\omega(\ln n/g_n) < n, \quad n > g_n,$$

то при некотором постоянном k для всех p

$$|f^{(p)}(0)| < k^p M_p^\omega.$$

Показывается, что эту теорему в некотором смысле улучшить нельзя. Затем рассматривается случай, когда $g_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В этом случае устанавливаются аналогичные результаты.

Во второй части рассматривается весьма подробно с геометрической точки зрения регуляризация функций с помощью функции $\omega(t)$. При этом автор исходит из аналогии между регуляризацией последовательностей и регуляризацией функций. Пусть $\{\mu_n\}$ — заданная последовательность, $\{\mu_n^{\omega}\}$ — регуляризованная последовательность. В случае, когда $\omega(t) \equiv \infty$, регуляризованная последовательность обладает (определяется) следующим простым геометрическим свойством: ломаная L с вершинами в точках $Q_n(n, \mu_n^{\omega})$ — выпукла вниз, ниже L нет ни одной точки $P_n(n, \mu_n)$, а на L таких точек — бесконечно много. Ломаная L (ее можно назвать регуляризованной ломаной) является самой высокой в классе выпуклых вниз ломаных, ниже которых нет точек $P_n(n, \mu_n)$. В случае $\omega(t) \not\equiv \infty$ регуляризованная ломаная (она вообще будет разрывной) также является самой высокой в некотором классе (зависящем от $\omega(t)$) выпуклых вниз разрывных ломаных, ниже которых нет точек $P_n(n, \mu_n)$. По аналогии с этим автор стремится и при рассмотрении регуляризации $F(x)$ функции $f(x)$ представить график $y = F(x)$ как самую высокую линию в некотором определяемом только посредством $\omega(t)$ классе функций. Линия $y = \varphi(x)$, $x \geqslant 0$, считается принадлежащей C_{ω}, если $\varphi(x+0) = \varphi(x)$ и если через каждую точку ее (x_1, y_1) можно провести по крайней мере одну прямую с угловым коэффициентом t_1, $\omega(t_1) \geqslant x_1$ такую, что все точки кривой с абсциссами $\leqslant \omega(t_1)$ лежат выше или на указанной прямой. Показывается, что если $F(x)$ — регуляризация функции $f(x)$ и $F(x+0) = F(x)$, то кривая $y = F(x)$ принадлежит к классу C_{ω} и является самой высокой среди линий из C_{ω}, ниже которых нет точек данной кривой $y = f(x)$. Если при некоторых x имеем $F(x+0) \neq F(x)$, то в этом случае кривая $y = \Phi(x) = F(x+0)$ — самая высокая среди линий из C_{ω}, ниже которых нет точек рассматриваемой кривой $y = f(x)$. Насколько класс C_{ω} естественен в изучаемом вопросе? С этой целью показывается, что если $F(x)$ — регуляризация $f(x)$, $\Phi(x) = F(x+0)$ и кривая $y = \Phi(x)$ всегда является самой высокой среди линий из некоторого фиксированного класса C, ниже которых нет точек кривой $y = f(x)$, то класс C обязательно совпадает с классом C_{ω}.

А. Ф. Леонтьев

291 К. Введение в теорию конформного отображения. Бибербах (Einführung in die konforme Abbildung. 5. erw. Aufl. Bieberbach Ludwig. Berlin, de Gruyter, 1956, 179 S., 4.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 9, 611 (нем.)

292 К. Исследования по однозначным аналитическим функциям. Витгих (Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Wittich Hans. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1955, 163 S., ill., 25.60 DM), Dtsch. Bibliogr., 1956, № 5, 266 (нем.)

См. также: 121, 217, 320 К, 449, 450, 466, 468, 469, 693

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

293. Метод неопределенных коэффициентов. Уэбстер (Method of undetermined coefficients. Webster M. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 271 (англ.)

294. Заметка о предельном переходе разностных уравнений в дифференциальные. Чермак (Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální. Čermák Jiří), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 2, 224—228 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор изучает систему разностных уравнений

$$\underset{\omega}{\Delta}\mu(x) = A\mu(x), \quad \underset{\omega}{\Delta}\mu(x) = \frac{\mu(x+\omega) - \mu(x)}{\omega},$$

где x — комплексное переменное, ω — комплексное число и A — квадратная матрица n-го порядка с комплексными элементами (постоянными).

В работе приводится достаточное условие для того, чтобы фундаментальная система решений данной системы разностных уравнений перешла при $\omega \to 0$ в фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений

$$d\mu/dx = A\mu(x).$$

I. Babuška

295. Об интегрируемости одного класса дифференциальных уравнений неосцилляционного типа посредством преобразования Лапласа. Винтнер (On the integrability of a class of non-oscillatory differential equations by means of Laplace transforms. Wintner A.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 301—305 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'' + f(t)\,x = 0 \quad (0 < t < \infty). \tag{1}$$

Функция $f(t)$ предполагается вполне монотонной на $(0, \infty)$, что, согласно теореме Бернштейна—Хаусдорфа, равносильно ее представимости в виде

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-ts}\,d\mu(s), \tag{2}$$

где $\mu(s)$ — неубывающая функция. Кроме того, предполагается, что уравнение (1) неосцилляционного типа; это означает, что хотя бы одно его вещественное решение (а стало быть, и все решения) имеет лишь конечное число нулей. В этих предположениях утверждается, что если $x(t)$ — любое вещественное решение уравнения (1), а t_0 — его последний нуль, то для $t > t_0$ имеет место формула

$$x^{-1}(t) = \int_0^{\infty} e^{-ts}\,d\mu'(s), \tag{3}$$

где $\mu'(s)$ — некоторая монотонная функция. В случае, если решение $x(t)$ не имеет нулей на полуоси, то формула (3) справедлива для всех $t > 0$.

Б. В. Лидский

296. Периодические состояния в системе с постоянными параметрами. Кожешник (Periodický stav v systému o stálých parametrech. Kožešník Jaroslav), Rozpr. Ceskosl. akad. věd., 1955, TV 65, № 5, 1—22 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автор приводит новый метод для численного нахождения периодического решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

где $f(t)$ — периодическая функция, при условии, что обеспечено существование такого решения. Этот метод можно применить в некоторых случаях и к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных. Наряду с известными автор выводит несколько новых результатов и проводит модификацию окончательных формул на случай системы с малым затуханием и системы с большим затуханием. Затем он приводит формулу, применимую при графическом решении. В конце работы на двух примерах показано, как пользоваться описанным методом на практике как в случае обыкновенного дифференциального уравнения, так и в случае дифференциального уравнения в частных производных. I. Vrkoč

297. Образование критерия приводимости линейных дифференциальных уравнений наперед заданных видов. Попов (Formation des critériums de réductibilité des équations différentielles linéaires ayant des formes données à l'avance. Popov Blagoj S. Fac. Philos. Univ. Skopje. Sect. Sci. Nat., 1952 (1954), 5, № 2, 68 p.) (франц.)

«Приведение» однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка в этой статье означает, что уравнение может быть записано в виде

$$(D+\chi)(\varphi D+\psi)y = 0, \qquad (a)$$

где $D = d/dx$ и φ, ψ, χ — однозначные функции x. Следуя приему Митриновича (Mitrinovitch D. S., C. R. Acad. sci., Paris, 1950, **230**, 1130—1132), автор определяет некоторые классы уравнений вида

$$y'' + (\alpha f + \beta)y' + (Af^2 + Bf + C)y = 0,$$

где α, β, A, B, C — константы, а f — функция от x, которые могут быть записаны в виде (*a*) с φ, ψ, χ заданными формулами

$$\varphi = f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_n,\ \psi = b_0 f^{n+1} + b_1 f^n + \ldots + b_{n+1},$$
$$\chi = c_0 f + c_1 \qquad (b)$$

(n — произвольное положительное целое число). Явные результаты получаются для случаев $f = x$, $f = x^{-1}$, $f = e^x$, $f = \tan x$, и они применяются к «сведению» многих классических уравнений. В каждом случае для сводимости утверждаются как необходимые, так и достаточные условия, между тем как необходимость сводимости доказана только при ограничительном условии (*b*) M. Golomb

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 476

298. Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности иррегулярно-особой точки. Костомаров Д. П., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 918—921

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$w_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z)\, w_j \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

с аналитическими коэффициентами, имеющими в окрестности бесконечно удаленной точки вид

$$a_{ij}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{ij}^{(m)}(z)\, z^{k-m},$$

где $a_{ij}^{(m)}(z)$ — постоянные, k — целое число.

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 2281) был указан вид фундаментальной системы формальных рядов, удовлетворяющих уравнениям (1). В настоящей работе автор утверждает, что всякому лучу $\arg z = \varphi_0$ принадлежит n линейно независимых истинных решений системы (1), для которых ранее найденные формальные ряды являются асимптотическими. Далее исследуется вопрос о величине тех угловых областей, содержащих исходный луч, в которых имеет место асимптотическое представление решений указанными рядами.

Автор, не ссылается на работы референта (РЖМат, 1955, 5006; 1957, 6341), в которых дан метод построения асимптотических представлений (вдоль вещественного луча) решений систем более общего вида, чем система (1). Нет также ссылки на работу Тричинского (Trjitzinsky W. I., Acta math., 1934, 62, 167—226), исследовавшего вопрос об асимптотическом представлении решений в комплексной области. В. П. Басов

299. О зависимости собственных значений самосопряженных краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений от краевых условий. Якубович В. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 201—206, 212—213 (рез. англ.)

Рассматривается каноническая система двух линейных уравнений

$$d\bar{x}/dt = IH(t, \lambda)\bar{x} \qquad (1)$$

($0 \leqslant t \leqslant \tau$) с самосопряженными краевыми условиями

$$\bar{x}(\tau) = C\bar{x}(0), \quad \det C = 1. \qquad (2)$$

В предположении, что любое решение системы (1) при $t = \tau$ монотонно вращается с возрастанием параметра λ, исследуется спектр краевой задачи (1), (2).

Выясняется относительное расположение точек спектра двух краевых задач, порождаемых одной и той же системой (1) и двумя разными матрицами C и C'. Исследования проводятся топологическими методами. Б. В. Лидский

300. Об обратных задачах типа задачи Штурма. Хорват (O obrátených úlohách Šturmovho typu. Horváth Ján), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 4 208—254 (словацк.)

Обзорная статья о новых результатах, касающихся обратной задачи Штурма, в особенности работ М. Г. Крейна. Метод изложения в некоторых местах новый. Вводится ряд математических определений и дается их механическая интерпретация. Št. Schwarz

301. Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной. Маслов В. П., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 977—980

Рассматривается дифференциальное уравнение Шредингера

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi + (u(x) - E_n)\psi = 0 \qquad (1)$$

($-\infty < x < +\infty$).

Предполагается, что уравнение (1) обладает дискретным спектром. При некоторых дополнительных предположениях относительно потенциала указывается способ, посредством которого могут быть получены следующие за квазиклассическим приближения для собственных значений и собственных функций уравнения (1) (при $h \to 0$).

Приближения для собственных значений извлекаются из формулы Бора с использованием асимптотических оценок для решений уравнений (1), полученных в статье А. А. Дородницына (Успехи матем. наук, 1952, **7**, вып. 6, 3—96). Б. В. Лидский

302. Осцилляционные свойства матриц сдвига. Манакин (Осциляційні властивості матриці зсуву. Манакін Л. О.), Наук. зап. Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ін-т, 1956, 2, 21—34 (укр.)

Рассматриваются определенные краевые задачи на интервале (ξ, x_1) для линейного однородного дифференциального уравнения вида

$$d^2u/dx^2 - (g(x) - \lambda)u = 0. \quad (1)$$

Определяя взаимное расположение на оси параметра λ соответствующих этим задачам собственных значений, автор исследует характер изменения матрицы сдвига в зависимости от изменения параметра λ. При этом матрицей сдвига автор называет матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_1) & \bar{u}_2(x_1) \\ \bar{u}_1'(x_1) & \bar{u}_2'(x_1) \end{bmatrix},$$

образованную из значений, которые принимают в точке x_1 решения уравнения (1), определяемые начальными условиями

$$\bar{u}_1(\xi) = 1, \qquad \bar{u}_2(\xi) = 0,$$
$$\bar{u}_1'(\xi) = 0, \qquad \bar{u}_2'(\xi) = 1.$$

И. Я. Лященко

303. Решения дифференциальных уравнений с дефектом, равным нулю. Виттих (Defektfreie Lösungen linearer Differentialgleichungen. Wittich Hans), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 459—464 (нем.)

Рассматривается однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\omega^{(m)} + a_{m-1}(z)\,\omega^{(m-1)} + \ldots + a_1(z)\,\omega' + a_0(z)\,\omega = 0, \quad (1)$$

коэффициентами которого являются полиномы. Ставится вопрос: в каком случае уравнение (1) обладает такой фундаментальной системой решений

$$\omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \ldots,\ \omega_m(z),$$

что каждая функция $\omega_s(z)$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ имеет не более конечного числа нулей, в то время как любое решение уравнения (1)

$$\omega(z) \not\equiv \omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \ldots,\ \omega_m(z),\ 0$$

имеет бесконечное число нулей и так, что его дефект $\delta(\omega, 0)$ (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.-Л., 1941) равен нулю.

Выясняется, что единственным уравнением, которое обладает указанным свойством, является уравнение второго порядка

$$\omega'' + tc\omega' - c^2\omega = 0,$$

где t — произвольное вещественное число, а c — комплексное число, отличное от нуля.

Б. В. Лидский

304. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных дифференциальных операторов $2n$-го порядка. Орлов С. А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 6, 1175—1177

Рассматривается краевая задача, порождаемая самосопряженным дифференциальным уравнением

$$l(y) = \sum_{s=0}^{n} \frac{d^s}{dx^s}\left(p_{n-s}(x)\,\frac{d^s y}{dx^s}\right)(-1)^s = \lambda y.$$

В случае произвольного индекса дефекта (m, m) до конца проанализированы самосопряженные граничные условия и структура резольвент соответствующих дифференциальных операторов. Результаты работы во многом пересекаются с исследованиями А. В. Штрауса (реф. 305). В частности совпадают формулы для ядер обобщенных резольвент. Методы доказательств, однако, разные. В реферируемой работе используется предельный переход с конечного интервала.

Б. В. Лидский

305. Формула обобщенных резольвент дифференциального оператора четного порядка. Штраус А. В. Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 773—776

Рассматривается самосопряженное дифференциальное выражение

$$l(y) = \sum_{s=0}^{n} \frac{d^s}{dx^s}\left(p_{n-s}(x)\,\frac{d^s y}{dx^s}\right)(-1)^s \quad (1)$$

и порождаемый им в $L_2(a, b)$ минимальный симметрический оператор L. Интервал (a, b) может быть конечным или бесконечным. В работе устанавливается, что любая обобщенная резольвента (в смысле М. А. Наймарка) оператора L есть интегральный оператор типа Карлемана с матричным ядром. Приводится формула, дающая общий вид ядра обобщенной резольвенты. Все рассмотрения ведутся в случае произвольного индекса дефекта (m, m).

Б. В. Лидский

306. О некоторых функциях Штурма-Лиувилля. Крам (On certain Sturm-Liouville functions. Crum M. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 426—432 (англ.)

Доказывается существование интегрального оператора преобразования, переводящего решения одного уравнения типа Штурма—Лиувилля в решения другого уравнения этого же типа. Автору, по-видимому, неизвестно, что рассматриваемый им оператор преобразования введен и изучен в более ранней работе Б. М. Левитана и А. Я. Повзнера, (Докл. АН СССР, 1946, 52, № 6, 479—482) и использовался в работах В. А. Марченко, И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и других советских математиков, занимавшихся обратными задачами спектрального анализа.

Л. А. Чудов

307. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Конти (Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari. Conti Roberto), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 1-2, 3—35 (итал.)

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений.

$$\dot{y} = A(t)\,y, \quad (1)$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица действительная или комплексная, определенная при $t \geqslant 0$, и y — вектор-функция. Предполагается, что $A(t)$ измерима и суммируема в каждом конечном интервале из $(0, +\infty)$. Даются достаточные условия различных модификаций устойчивости в смысле Ляпунова (равномерной, устойчивости в узком смысле) решений системы (1). В частности, система (1) называется устойчивой в узком смысле, если с помощью подстановки $y = L(t)\,z$, где $L(t)$ — матрица Ляпунова, систему (1) можно преобразовать в нулевую

$$\dot{z} = 0. \quad (2)$$

Приведем некоторые результаты.

Теорема 3. Для устойчивости в узком смысле системы (1) достаточно, чтобы существовали постоянные k_1 и k_2 такие, что:

1) $\left\| \int_{t_0}^{t} A(\theta)\,d\theta \right\| \leqslant k_1$,

2) $\int_0^t \left\| \left\{ \int_\tau^t A(\theta)\,d\theta \right\} A(\tau) \right\| d\tau \leqslant k_2 < 1$

$(0 \leqslant t < +\infty)$.

Теорема 6. Если: 1) $A(t)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале из $(0, +\infty)$, 2) $A(t)$ ограничена вместе со своей обратной матрицей $A^{-1}(t)$ при $t \geqslant 0$,

$$3) \int_0^{+\infty} \| \dot{A}(\tau) + A^2(\tau) \| \, d\tau < +\infty,$$

то система (1) устойчива в узком смысле.

Даются также достаточные условия устойчивости в том или ином смысле системы

$$\dot{y} = [B(t) + C(t)]\, y,$$

полученной в результате комбинирования двух устойчивых систем $\dot{u} = B(t)\, u$ и $\dot{v} = C(t)\, v$. В заключение рассматривается устойчивость линейных неоднородных систем. Библ. 23 назв. Б. П. Демидович

308. Экспоненциальное затухание в нелинейных системах. Даффин (Exponential decay in nonlinear networks. Duffin R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 1094—1106 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dt} V_1(\dot{q}) + R(q, \dot{q}, t)\, \dot{q} + V_3(q) = 0, \qquad (1)$$

где $\dot{q} = dq/dt$, $V_i(0) = 0$, $0 < A \leqslant dV_i(x)/dx \leqslant B$ $(i = 1, 3)$, $A \leqslant R(q, \dot{q}, t) \leqslant B$. Тогда существует такое $b > 0$, что $q^2 + \dot{q}^2 = O(e^{-bt})$ при $t \to +\infty$.

Аналогичные теоремы доказываются для системы уравнений, имеющей вид (1) в векторной записи. Пусть Q — n-мерное векторное пространство, $p = V(q)$ — непрерывно дифференцируемое преобразование, определенное для всех $q = (q_1, \ldots, q_n) \in Q$; $V(0) = 0$. Пусть матрица Якоби $V' = \| \partial p_i / \partial q_j \|_{1, 2, \ldots, n}$ симметрична и обладает следующим свойством: для любого $q \in Q$ $A \| q^* \|^2 \leqslant (V'q, q) \leqslant B \| q^* \|^2$, где $B \geqslant A > 0$ — постоянные числа, q^* — ортогональная проекция вектора q на некоторое (фиксированное для данного V) подпространство $Q^* \subseteq Q$. Такое преобразование V автор называе дефинитным.

Теорема. Пусть в уравнении (1) q — вектор, V_1 и V_3 — дефинитные преобразования, $R(q, \dot{q}, t)$ — такая матрица, что для любого вектора x $A \| x \|^2 \leqslant (Rx, x)$ и $\| Rx \| \leqslant B \| x \|$, A и B — положительные постоянные. Пусть q_3^* — проекция вектора q на подпространство Q^*, соответствующее преобразованию V_3. Тогда существуют такие постоянные $a > b > 0$, что для любого (не тождественно постоянного) решения $q(t)$ уравнения (1) при достаточно больших t

$$e^{-at} \leqslant \| \dot{q} \|^2 + \| q_3^* \|^2 \leqslant e^{-bt}.$$

При некоторых дополнительных ограничениях доказывается, что любые два решения уравнения (1) с правой частью $q(t)$ экспоненциально сближаются.

Указывается, что полученные результаты приложимы к сложным электрическим цепям, содержащим нелинейные сопротивления, емкости и индуктивности (например, ферромагнитные трансформаторы и т. п.). А. Ф. Филиппов

309. Оценка решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в области асимптотической устойчивости. Добротин Д. А., Прикл. матем. и механ., 1956, **20**, № 6, 723—732

Строится некоторая окрестность начала координат в фазовом пространстве, целиком принадлежащая области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения $L(x) = f(x, t)$, где $L(x)$ есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, такой что нулевое решение уравнения $L(x) = 0$ асимптотически устойчиво, а $f(x, t)$ удовлетворяет оценкам $|f(x, t)| \leqslant A(x)^k$, $k > 1$; $|\partial f(x, t)/dx| \leqslant B |x|^\gamma$, $\gamma > 0$, $|x| \leqslant L$, A и B — положительные постоянные. В указанной выше окрестности даны оценки модуля решения экспоненциального типа. Основным методом исследования является метод последовательных приближений. В. И. Зубов

310. Аналог теоремы Флоке для одного частного случая линейных однородных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Ященко Н. Я., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 2, 295—298

Для системы уравнений

$$dx/dt = P(t)\, x + L(t)\, x, \qquad (1)$$

где $P(t)$ — диагональная, $L(t)$ — квадратная матрицы с квазипериодическими элементами, определенными для всех вещественных t, в предположении выполнения условий теоремы полного разделения (РЖМат, 1956, 8800), установлены достаточные условия представления ее решений в виде

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i t} f_{ij}(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где α_i — постоянные, а $f_{ij}(t)$ — квазипериодические функции.

Вопрос о представлении решений системы (1) в виде (2) сводится к выяснению достаточных условий представления неопределенных интегралов квазипериодических функций $\Lambda_i(t) = p_i(t) + \sum_{i=v}^{n} e_{ij}(t)\, b_{ij}(t)$

$$\int_0^t \Lambda_i(t)\, dt = \alpha_i t + \beta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

где $\beta_i(t)$ — квазипериодические функции. Функции $\Lambda_i(t)$ получаются в результате «полного разделения» данной системы.

Доказана следующая теорема: Если выполнены условия теоремы полного разделения и, кроме того, коэффициенты системы (1) таковы, что определенные для всех значений переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ непрерывные и периодические по каждой из этих переменных с периодом 2π функции $P_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$, $L_{ij}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ обладают достаточным числом непрерывных и ограниченных смешанных производных порядка $M_1 + M_2 + \ldots + M_s$ (по каждой из переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ до порядка $M_1, M_2, \ldots, M_s$ соответственно, причем все $M_i \geqslant s + 2$), а частотный базис $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ для любых целых $n_1, n_2, \ldots, n_s$ удовлетворяет неравенству Лиувилля

$$|n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_s\omega_s| \geqslant \frac{D}{(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_s^2)^{(s-1+\alpha)/2}},$$

где D и α — некоторые постоянные, не зависящие от n_i, причем $0 < \alpha < 1$, то неопределенный интеграл квазипериодических функций $\Lambda_i(t)$ представим в виде (3). Автореферат

311. Об устойчивости периодических решений уравнения высокого порядка. Вознюк (Про стійкість періодичних розв'язків рівняння високого порядку. Вознюк Л. Л.), Доповіді АН УРСР, 1957, № 1, 13—17 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается уравнение вида

$$R(p)\, z = \varepsilon \Phi(z, \varepsilon), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, $p \equiv d/dt$, $R(p)$ — аналитическая функция p, $\Phi(z, \varepsilon)$ имеет достаточное количество непрерывных производных по z и аналитическая относительно ε.

Исследуется устойчивость периодического решения уравнения (1). С этой целью составляется уравнение в вариациях, соответствующее уравнению (1) и периодическому решению этого уравнения.

После замены $x = e^{qt} v(\varphi)$ получается уравнение

$$R(q + \omega d/d\varphi)\, v(\varphi) = \varepsilon F(\varphi, \varepsilon)\, v(\varphi), \qquad (2)$$

решение которого ищется с помощью методов Крылова—Боголюбова.

Составляется уравнение, по корням которого, как утверждается, можно судить об устойчивости периодического решения.

Далее доказывается теорема об аналитической зависимости решения уравнения (2) от ε

Ю. А. Митропольский

312. Об одночастотных колебаниях в системах со многими степенями свободы, близких к точно интегрирующимся. Лыкова (Про одночастотні коливання в системах з богатьма степенями вільності, близьких до точно інтегровних. Лыкова О. Б.), Доповіді АН УРСР, 1957, № 1, 8—12 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_k/dt = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon X_k^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon), \ (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр. Относительно рассматриваемой системы делаются следующие предположения:

1. Для системы невозмущенных уравнений

$$dx_k/dt = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

известно семейство устойчивых периодических решений:

$$x_k = x_k^0(\omega t + \varphi, a) \ (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

с периодом 2π относительно ψ, где $\psi = \omega t + \varphi$, a и φ — произвольные параметры, ω — в общем случае является функцией a.

2. Функции $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon X_k^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)$ являются аналитическими, регулярными в окрестности кривой

$$x_k = x_k^0(\psi, a), \quad \varepsilon = 0,$$

в $(n+1)$-мерном пространстве, периодические по t с периодом 2π.

3. Для системы уравнений в вариациях, соответствующей периодическому решению (3), два характеристических показателя равны нулю ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), а остальные $n-2$ характеристических показателя ($\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$) имеют отрицательные действительные части.

4. Не существует зависимостей вида:

$$m_3\gamma_3 + \ldots + m_n\gamma_n = \gamma_q,$$

$$m_3 + \ldots + m_n \geqslant 2,$$

где γ_q $(q = 3, 4, \ldots, n)$ — действительные части характеристических показателей, $m_3, \ldots m_n$ — целые неотрицательные числа.

При указанных предположениях строится двупараметрическое семейство приближенных частных решений системы, близкое, в смысле близости по орбите, при малых значениях ε к семейству периодических решений (3).

Ю. А. Митропольский

313. Способ образования матрицантов. Хельман (Ein Verfahren zur Bildung von Matrizanten. Hellman O.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 3—4, 139—144 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, записанная в матричной форме

$$dz/dt = Az. \qquad (1)$$

Для случая, когда матрицу A можно представить в виде

$$A = \begin{Vmatrix} a & \varepsilon\psi \\ \varepsilon\xi & b \end{Vmatrix}$$

(a и b — квадратные матрицы, ε — малый параметр): выражение для матрицанта $\Omega(A)$ ищется в форме ряда по степеням ε. Отсюда получается выражение,

$$\Omega(A) = \begin{Vmatrix} \Omega(a)\, S_{11} & \Omega(a)\, S_{12} \\ \Omega(b)\, S_{21} & \Omega(b)\, S_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь $\Omega(a)$ и $\Omega(b)$ — матрицанты для матриц a и b

$$S_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}, \quad S_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{2n+1},$$

$$S_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}, \quad S_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n},$$

r_k, s_k, u_k и v_k — матрицы, вычисляемые при помощи рекуррентных формул. Описанный способ рекомендуется в двух случаях: а) когда параметр ε достаточно мал, т. е. система (1) описывает колебания со слабой связью, и ряды в формуле (2) сходятся весьма быстро; б) когда матрицанты для a и b вычисляются легко, в то время как образование матрицанта для A затруднительно. В качестве примера указывается задача о связанных изгибно-крутильных колебаниях прямого упругого стержня.

В. В. Болотин

314. К вопросу о периодических решениях нелинейных систем с малым параметром. Берштейн И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 1, 9—11

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, t) + \mu Y(x, t, \mu), \qquad (1)$$

где x — искомый вектор и $X(x, t)$, $Y(x, t, \mu)$ — непрерывные вектор-функции, определенные в области: $|x| \leqslant \rho$, $|t| < +\infty$, $|\mu| < \Lambda$ и периодические по t с общим периодом ω. Предполагается, что в области рассмотрения обеспечена единственность решений и непрерывная их зависимость от начальных условий и параметра μ.

Теорема. Если тривиальное решение $x = 0$ производящей системы

$$dx/dt = X(x, t) \qquad (2)$$

асимптотически устойчиво, то возмущенная система (1) при $|\mu| < \mu_0$ допускает периодическое решение $x = x(t, \mu)$, стремящееся при $\mu \to 0$ к решению $x = 0$.

Для доказательства теоремы используется обобщенный принцип неподвижной точки. Отмечается, что теорема автора является усилением результатов Антосиевича (РЖМат, 1953, 726) и Халанай (РЖМат, 1955, 5018). Близкие в этом направлении результаты получены также И. Г. Малкиным (см., например, И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, гл. VI).

Б. П. Демидович

15. Одномерные повторяющиеся кривые в невырожденном случае. Косис (One-dimensional repeating curves in the non-degenerate case. Koosis Paul), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 277—285 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot\theta_1 = 1 + zF(\theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon P(\theta_1, \theta_2, z),$$
$$\dot\theta_2 = 1 + zG(\theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon Q(\theta_1, \theta_2, z),$$
$$\dot z = A(\theta_1, \theta_2)\, z + z^2 H(\theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon R(\theta_1, \theta_2, z),$$

где ε — малый параметр, A, F, G, H, P, Q, R — периодические функции по θ_1 и θ_2 с периодами соответственно ω_1 и ω_2, обладающие непрерывными частными производными первого порядка по θ_1, θ_2, z.

Доказывается, что при условии $\int_0^{\omega_2} A(a+\theta_2, \theta_2)\,d\theta_2 < 0$ (или > 0) при всех a для любого достаточно малого по абсолютной величине ε в пространстве (θ_1, θ_2, z) существует поверхность Σ_ε, образованная интегральными кривыми системы, инвариантная относительно следующих преобразований координат $\theta_1' = \theta_1 + n\omega_1$, $\theta_2' = \theta_2 + m\omega_2$, $z' = z$ при целых n и m.

Эта поверхность Σ_ε стремится к плоскости $z = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Ю. Г. Борисович

316. О приложении периодических поверхностей (решение проблемы малых делителей). Диліберто (An application of periodic surfaces. (Solution of a small divisor problem). Diliberto Stephen P.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 257—259 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot x + r\dot x + \omega_1^2 x = p(t) + \varepsilon f(x, \dot x), \qquad (1)$$

где $r > 0$, $\omega_1 \neq 0$, $p(t)$ — почти периодическая функция, $f \in C^{(2)}$ и ε — малый параметр.

Теорема. Если $p(t)$ есть почти периодический полином:

$$p(t) = A_2 \sin \omega_2 t + A_3 \sin \omega_3(t),$$

то уравнение (1), при $|\varepsilon|$ достаточно малом, имеет решение вида

$$x = q(t) + g(t, t, \varepsilon) \equiv U(t, \varepsilon), \qquad (2)$$

где $q(t)$ — почти периодическая функция, представляющая собой решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, и $g(\theta_2, \theta_3, \varepsilon)$ непрерывна и периодична по θ_i с периодом $2\pi/\omega_i$ $(i = 2, 3)$, причем $g(\theta_2, \theta_3, 0) = 0$.

Все остальные решения уравнения (1) экспоненциально стремятся к решению $u(t, \varepsilon)$ при $t \to +\infty$. Кроме того, $U(t, \varepsilon) \rightrightarrows g(t)$ при $\varepsilon \to 0$ и $t \in (-\infty, +\infty)$.

Для доказательства теоремы используется неопубликованная теорема Маркуса об инвариантных поверхностях. Автор отмечает, что этот новый метод позволяет избежать трудностей, связанных с «малыми делителями», и уточняет результаты, получаемые методом Фридерихса (Стокер, Приложение II, РЖМех, 1955, 2243) Б. П. Демидович

317. Об энергетических уровнях обобщенного уравнения маятника. Сахриссон (On the energy levels of a generalized pendulum equation. Zachrisson Lars Erik), Tolfte Skand. Matematikerkongr. Lund., 1953 (1954), 324—337, 25 Scr. (англ.)

Автор рассматривает возмущенное уравнение движения маятника

$$\ddot\varphi + \sin\varphi = t^{-1}(\mu - \dot\varphi/2), \qquad (1)$$

$\mu \geqslant 0$, $t > 0$ — постоянные; асимптотически это уравнение похоже на

$$\ddot\varphi + \sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Семейство решений кривых на цилиндре можно спроектировать на сферу S^2, и тогда для уравнения (2) определяются три центра с сепаратрисами между ними. При $t \to \infty$ каждое решение (1) на S^2, аппроксимирует центр или одну из сепаратрис (2) на S^2. Автор описывает, не вдаваясь в детальный анализ возможных патологических сложностей, семейства кривых на S^2, которые являются решениями дифференциальной системы H, подобной (2). Тогда возмущенная система S (соотношения между S и H являются слишком громоздкими, чтобы их можно было здесь выписать) имеет решения, которые являются асимптотиками к некоторым характерным решениям (включая центры, сепаратрисы и др.). L. Markus

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 477.

318. Вынужденные колебания в нелинейных системах с двумя степенями свободы. Граффи (Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di liberta. Graffi D.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 2, 176—180 (итал.)

Исследуется периодическое решение системы уравнений

$$L_1\ddot x_1 + M\ddot x_2 + g_1(\dot x)_1 + K_1 x_1 = e_1 \cos(\omega t + \gamma_1),$$
$$M\ddot x_1 + L_2\ddot x_2 + g_2(\dot x)_2 + K_2 x_2 = e_2 \cos(\omega t + \gamma_2),$$

которая описывает вынужденные колебания двух индуктивно связанных контуров с индуктивностями L_1 и L_2 емкостями $1/K_1$, $1/K_2$, взаимоиндукцией M и нелинейными сопротивлениями $g_1(x_1)$ и $g_2(x_2)$, где x_1 и x_2 — токи, обтекающие соответствующие контуры. С. С.

319. Некоторые теоремы о среднем в нелинейной механике. Манарези (Su alcuni teoremi di media nella meccanica non lineare. Manaresi Gabriella), Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena, 1951—1952 (1953), **6**, № 78—86 (итал.)

Выводится некоторое количество интегральных соотношений для периодических решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений и систем, которые можно назвать обобщенными уравнениями Лиенара (Liénard). Например, получены следующие результаты: Если $\sum_{i=1}^2 \varphi_i(y_1, y_2)\,dy_i$ есть точный дифференциал и $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями с периодом T системы

$$\ddot y_i + \frac{d}{dt} F_i(y_1, y_2) + \varphi_i(y_1, y_2) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

тогда

$$\int_0^T \sum_{i=1}^2 F_i(y_1, y_2)\,\varphi_i(y_1, y_2)\,dt = 0.$$

Это обобщает теорему Сансоне (Sansone, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1949, **6**, № 8, 156—160). Обобщая результаты Граффи (РЖМат, 1954, 4431), автор далее показывает, что для некоторых колебаний двух магнитносвязанных цепей средняя величина электрической энергии превышает среднюю величину магнитной энергии. W. Wasow

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 250.

320 К. Качественные методы в математическом анализе. Эльсгольц Л. Э. М., Гостехиздат, 1955, 300 стр., илл., 10 р. 15 к.

Книга представляет обзор избранных качественных вопросов анализа. Изложение сжатое, детали доказательств предоставляются читателю, более сложные

доказательства опущены. В первой главе излагается качественная теория критических точек функций, заданных на многообразиях. Ее содержание: поверхности уровня; окрестность невырожденной критической точки; изменение чисел Бетти, групп Бетти и фундаментальной группы области меньших значений (на основании аддиционных теорем Майера—Виториса и И. А. Зайденмана); неравенства Морса; результаты автора и Г. С. Чогошвили об изменении чисел Бетти поверхностей уровня (на основании закона двойственности Л. С. Понтрягина); число элементов с правильным примыканием и другие инварианты, введенные автором; теория категории Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана, принцип минимакса и подчинение циклов в смысле Л. А. Люстерника с обобщениями; критические точки отображения многообразия в окружность и эвклидова пространства в себя. Приложения: число положений равновесия; оси многообразия; собственные значения нелинейных уравнений; с-дискриминантные множества. Изложение первой главы сжатое; предполагается свободное владение теорией гомологий, включая аддиционные теоремы и законы двойственности. Бесконечно-мерный случай (вариационные задачи) не излагается, даны лишь краткие литературные указания. Во второй главе изложена теория критических точек аналитических функций по Морсу с обобщением на функции многих переменных. Третья глава содержит метод неподвижных точек: принцип сжатых отображений, принцип Шаудера и простейшие приложения.

Четвертая глава излагает некоторые качественные вопросы теории дифференциальных уравнений: § 1. Точки покоя динамической системы, их индексы, теорема Хопфа (без доказательства), классификация точек покоя в двухмерном случае. § 2. Зависимость решений от малого параметра при старшей производной (по А. Н. Тихонову) и некоторые вырожденные случаи (по В. М. Волосову); одномерные краевые задачи с малым параметром. В §§ 3—4 дано понятие об общей теории динамических систем и теоремах Бендиксона (эргодические теоремы лишь упомянуты). § 5 посвящен элементам теории устойчивости; второй метод Ляпунова изложен в современных терминах, намечена геометрическая интерпретация. § 6. Периодические решения, преимущественно метод малого параметра.

Пятая глава содержит дифференциально-разностные уравнения; здесь изложение более подробное. Содержание: теоремы существования и единственности; приближенное интегрирование; осцилляционные теоремы А. Д. Мышкиса; линейные уравнения; оценка числа точек покоя по работам автора; вопросы устойчивости решений; квазилинейные уравнения и др. В конце главы затронуты дифференциально-разностные уравнения в частных производных (теоремы И. М. Гуля).

В шестой главе изучается функционал

$$\int_{t_0}^{t} F(t,\ x(t),\ x(t-\tau),\ \dot{x}(t),\ \dot{x}(t-\tau))\,dt;$$

для которого автор получает необходимые условия экстремума.

Приводится обширный список литературы, но с досадными пробелами. Так, пропущен ряд важных работ М. Морса и его учеников; новое изложение (Успехи матем. наук, 1947, 2, № 1 (17), 166—217) теоремы о трех геодезических Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана; работа Г. С. Чогошвили (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1949, 17, 203—243) и др. В книге встречаются неточные формулировки и опечатки. А. И. Фет

321 К. Линейные дифференциални уравнения в строителната механика и тяхното практическо решаване (в примери и задачи). К а н д о в (Линейните диференциални уравнения в строителната механика и тяхното практическо решаване (в примери и задачи). К а н д о в Л ю б о м и р Т. София, Наука и изкуство, 1956, XI, 255 стр., ил., 9.85 лв.) Бълг. книгопис, 1957, 61, № 2, 10 (болг.)

322 Д. О некоторых задачах динамики полета к Луне. Е г о р о в В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

323. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в общих линейных пространствах. М и к у с и н с к и й (Équations différentielles à coefficients constants considérées dans les espaces linéaires généraux. M i k u s i ń s k i J.) Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, cl. 3, 4, № 3, 137—139 (франц); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 3, 133—135

Пусть E — линейное пространство, натянутое на поле C с характеристикой 0. В некотором линейном подпространстве пространства E определена операция дифференцирования. Эта линейная операция удовлетворяет следующему условию:

Уравнение

$$Lx = a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \qquad (1)$$

$$(a_i \in C;\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ a_n \neq 0)$$

имеет не более n линейно независимых решений в E.

Автор исследует число линейно независимых решений уравнения (1). В частности, он находит, что неприводимое уравнение (т. е. имеющее неприводимый характеристический многочлен) порядка n имеет или ровно n линейно независимых решений, или только нулевое решение. Если для $x \in E$ определена линейная операция, удовлетворяющая равенству $(tx)' = tx' + x$, то мы имеем следующую импликацию: если $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ суть линейно независимые решения неприводимого уравнения порядка n, то уравнение $L^m x = 0$ порядка mn имеет ровно mn линейно независимых решений $t^i x_j$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Цитированные теоремы применимы для решения операционных дифференциальных уравнений. Доказательства этих теорем будут опубликованы в Studia Mathematica. K. Urbanik

324. Теоремы о регулярности решений дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Б р а у д е р (Regularity theorems for solutions of partial differential equations with variable coefficients. B r o w d e r F e l i x E.). Proc. Mat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 2, 234—236 (англ.)

Обозначения: G — открытая область в E^n, n-мерном евклидовом пространстве $x = x_1, \ldots, x_n$. $A = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ — дифференциальный оператор с коэффициентами $a_\alpha(x) \in C^\infty(G)$, $A(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$ — характеристический многочлен оператора A. $A^3(x,\xi) = D^3_\xi A(x,\xi)$. Для двух дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами P и Q будем говорить, что Q слабее P $(Q < P)$, если существует $K > 0$ такое, что $|Q(\xi)| \leqslant K\Sigma_\beta |P^\beta(\xi)|$ для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, и строго слабее $(Q \ll P)$, если $|Q(\xi)\,\xi| \leqslant K\Sigma_\beta |P^\beta(\xi)\,\xi|$.

Будем говорить, что оператор A с постоянными коэффициентами удовлетворяет условию (τ), если для $|\beta| > 0$ $A^\beta(\xi) = 0$ $(|A(\xi)|)$, то $(\xi) \to 0$.

Теорема. Пусть A — дифференциальный оператор в G с коэффициентами из $C^\infty(G)$. Пусть, далее, для любой $x_0 \in G$ оператор $A_0 = A_{x_0}$ с постоянными коэффициентами удовлетворяет условию (π) и в некоторой окрестности x_0 имеет место разложение $A = A_0 + \sum C_\beta(x) Q_\beta$ на конечную сумму операторов Q_β таких, что $Q_\beta < A_0$, $Q_\beta^\alpha \ll A_0$ для $|\alpha| > 0$. Тогда слабое решение уравнения $Au = \psi$, $\psi \in C^\infty(G)$ можно изменить на множестве меры нуль так, что оно будет в $C^\infty(G)$.

Замечание: Пример операторов, удовлетворяющих условию теоремы, дают эллиптические операторы и операторы $B(x, t)\,\partial/\partial t + A(x, t)$, где A и B при фиксированном t — сами эллиптические операторы по x.

Для уравнений с постоянными коэффициентами теорема доказана Хёрмандером. А. Л. Крылов

325. О методе Плися определения области существования решений задачи Коши для уравнений с частными производными первого порядка. Важевский (Sur la méthode de A. Pliś de déterminer le domaine d'existence de la solution du probléme des Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ważewski T.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, cl. 3, 4, № 3, 131—136 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 3, 127—131

Статья связана с задачей определения области существования решения дифференциального уравнения

$$z_x = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n}), \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$z(a, y_1, \ldots, y_n) = \omega(y_1, \ldots, y_n). \qquad (2)$$

Обозначим через

$$y_1(x, V), \ldots, y_n(x, V), z(x, V), q_1(x, V), \ldots, q_n(x, V)$$

где $V = (v_1, \ldots, v_n)$ — решение системы характеристических уравнений

$$y_i' = -f_{q_i}, \quad z' = f - \sum_{k=1}^n q_k f_{q_k},$$

$$q_i' = f_{y_i} + q_i f_z \quad (i = 1, \ldots, n),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$y_i(a, V) = v_i; \quad z(a, V) = \omega(V), \quad q_i(a, V) = \omega_{y_i}(V),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Чтобы определить область существования решения задачи (1), (2), важно найти интервал (a_1, a_2) $(a_1 < a < a_2)$ такой, что

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial y_i(x, V)}{\partial V_i}\right) \neq 0 \text{ для } a_1 < x < a_2. \qquad (3)$$

А. Плись показал (см. РЖМат, 1957, 3992), что если функции f, ω принадлежат классу C^2 в соответствующих множествах, то функции $u_i = \dfrac{\partial y_i(x, V)}{\partial v_j}$ удовлетворяют системе уравнений

$$u_i' = \sum_{k=1}^n \left(-f_{q_i y_k} - f_{q_i z} q_k - \sum_{m=1}^n f_{q_i q_m} t_{mk}\right) u_k,$$

где t_{ij} есть решение системы

$$t_{ij}' = f_{y_i y_j} + f_{y_i z} q_j + f_{y_j z} q_i + f_{zz} q_i q_j + f_z t_{ij} +$$
$$+ \sum_{k=1}^n \left(f_{y_i q_k} t_{kj} + f_{y_j q_k} t_{ki}\right) + \sum_{k=1}^n f_{z q_k} (q_j t_{kj} + q_j t_{kj}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n f_{q_k q_s} t_{ki} t_{sj} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

удовлетворяющей условиям

$$t_{ij}(a) = \omega_{y_i y_j}(V) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

в интервале определимости решений (a_1, a_2). В этом интервале неравенство (3) удовлетворяется. В доказательстве функции f, ω были аппроксимированы функциями из класса C^3 и использовалась теорема о зависимости решений уравнения (1) от начальных условий. Автор доказывает это непосредственно, используя лишь теорему о единственности решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. A. Pliś

326. О первой краевой задаче для дифференциального уравнения $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$. Лоухиваара (Über das erste Randwertproblem für die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$. Louhivaara I. S.), Suomalais. Tiedeakat. toimituks., 1955, sar. A—I, № 183, 33 S.) (нем.)

Рассматривается применение вариационного метода к задаче Дирихле для уравнений

$$L[u] = 0, \qquad (1)$$

$$L[u] = -f(x, y), \qquad (2)$$

где $L[u] = u_{xx} + u_{yy} + q(x, y)\,u$.

Допустим, что действительная функция $q(x, y)$ вместе со своими производными первого порядка непрерывна в некоторой ограниченной области G и, кроме того, $q(x, y)$ непрерывна в $\overline{G}$. Автор не делает никаких предположений относительно знака $q(x, y)$ и, следовательно, решение $u(x, y)$ уравнения (1) (мы ограничиваемся рассмотрением действительных решений) не обязательно дает минимум интегральной формы $Q[u, u]$, где

$$Q[u, v] = \iint_g (u_x v_x + u_y v_y - q(x, y)\,uv)\,dxdy,$$

минимум ищется среди функций, удовлетворяющих заданному граничному условию. Следуя Неванлинне (Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, ГИТТИ, М.—Л., 1951, гл. 7, § 1, стр. 458), автор использует представление пространства D_0, как декартова произведения трех пространств D_0^+, D_0^0, D_0^-, ортогональных друг к другу, где D_0^- есть пространство, натянутое на собственные функции оператора $L[u]$, соответствующие возможным отрицательным собственным значениям, D_0^0 есть пространство, натянутое на собственные функции, соответствующие (возможному) собственному значению нуль, и D_0^+ — пространство функций φ из пространства D_0, которые вместе со всеми функциями v пространств D_0^- и D_0^0 удовлетворяют условиям ортогональности

$$\iint_g \varphi v\,dxdy = 0.$$

Автор доказывает существование решения уравнения (1), удовлетворяющего граничному условию $u - g \in D_0$, где g — заданная функция из класса D (определение D см. там же, стр. 456) при предположении, что функция g удовлетворяет условию $Q[g, \psi] = 0$ для любой функции ψ из пространства D_0^0. Решение ищется в виде $u = g + \varphi^+ + \varphi^-$. Выражение $Q[u, v]$, рассмотренное на множестве функций вида $g + \varphi$, где $\psi \in D_0^+$, допускает положительный минимум для функции $g + \varphi^+$, рассмотренное на множестве функций $g + \psi$, где $\psi \in D_0^-$, допускает макси-

мум для $g+\varphi^-$. Функция φ^+ может быть получена при помощи минимизирующей последовательности; функция φ^- может быть определена более просто, поскольку D_0^- конечномерное пространство. При вышеупомянутых допущениях относительно функции g, функция $u=g+\varphi^++\varphi^-$ представляет собой искомое решение. Автор получает аналогичные результаты для уравнения (2). A. Pliś

327. Граничные условия Вишика—Соболева и смешанные задачи. Лионс (Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 9, 1126—1128 (франц.)

Определения и обозначения: R^n — n-мерное евклидово пространство $x=(x_1, \ldots, x_n)$, Ω — открытая область в нем. $H^k(\Omega)$ — пространство функций $u\in L^2(\Omega)$ таких, что $D^pu\in L^2(\Omega)$ для всех $|p|\leqslant k$ с естественной метрикой. $H_0^k(\Omega)$ — замыкание в метрике $H^k(\Omega)$ множества функций с компактным носителем в Ω. $H^{-k}(R^n)$ — пространство, двойственное к $H^k(R^n)$ и $H_{\bar\Omega}^{-k}$ — подпространство $H^{-k}(R^n)$ распределений с носителем в $\bar\Omega$.

Пусть V — гильбертово пространство такое, что $H_0^m(\Omega)\subset V\subset H^m(\Omega)$ и $a(u, v)$ — билинейная форма на V; $a^*(u, v)=\overline{a(v, u)}$. Обозначим через N (соответственно N^*) подпространство функций $u\in V$ таких, что форма $a(u, v)$ (соответственно $a^*(u, v)$) является непрерывной по $v\in V$ в топологии $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$. Тогда $a(u, v)=(Au, v)_0$ (соответственно $a^*(u, v)=(A^*u, v)_0$). Предположим, что:

$$A=\sum_{p,\,q}(-1)^{|p|}D^p(a_{pq}(x)D^q)\quad(|p|,\ |q|\leqslant m),$$

где $a_{pq}(x)$ могут быть продолжены на все R^n в виде $\mathfrak{X}_{pq}(x)$ ограниченных вместе со всеми производными. Пусть, далее, для некоторого $\lambda\in R$

2) $\operatorname{Re}a(u, u)+\lambda(u, u)_0\geqslant\alpha\|u\|_v^2$, $\alpha>0$, для всех $u\in V$. Тогда $A-\lambda$ (соответственно $A^*+\lambda$) есть изоморфизм из N в $H^0(\Omega)$. Пусть G (соответственно G^*) есть обратный изоморфизм.

Формы $a(u, v)$ и $a^*(u, v)$ называются регулярными, если для всех $k\geqslant 0$ $Gf\in N\cap H^{k+2m}(\Omega)$ и $G^*f\in N^*\cap H^{k+2m}(\Omega)$ для всех $f\in H^k(\Omega)$.

Обозначим через M^k подпространство распределений $T\in H_{\bar\Omega}^{-(k+2m)}$ таких, что $\langle T, v\rangle=0$ для всех $v\in H^{k+2m}(R^n)$ таких, что $v\cdot\omega(\Omega)\in N^*$, где $\omega(\Omega)$ — характеристическая функция Ω.

Пусть, наконец, имеет место:

3) Для всех k существует непрерывное линейное вложение $u\to\vartheta(u)$ из $H^k(\Omega)$ в $H^k(R^n)$ такое, что $\vartheta(u)=u$ почти всюду в Ω; если $v\in H^k(R^n)$ и $v=u$ почти всюду в Ω, тогда $\vartheta(u)-v=\hat g$, где $g\in H_0^k(\subset\bar\Omega)$ и $\hat g$ — продолжение g на все R^n нулем вне $C\Omega$ (CF дополнение F в R^n).

Если имеет место 3), и

$$\mathfrak{X}=\sum(-1)^{(p)}D^p(\mathfrak{X}_{pq}(x)D^q),$$

то для $U\in H_{\bar\Omega}^{-k}$ $\mathfrak{X}U$ зависит только от A.

Теорема 1. Если имеют место гипотезы 1), 2), 3), и формы a и a^* регулярны, то для $T\in H_{\bar\Omega}^{(-k+2m)}$ существует единственная функция $U\in H_{\bar\Omega}^{-k}$, удовлетворяющая требованию

4) $(\mathfrak{X}+\lambda U)-T\in M^k$. Решение U не имеет (вообще говоря) конечного интеграла Дирихле порядка m.

Пусть t — время, E — банахово пространство, $D'_+(t, E)$ — пространство распределений по t со значениями в E с носителем, ограниченным слева (по t).

Теорема 2. Пусть имеют место предположения теоремы 1 и $T\in D'_+(t, H_{\bar\Omega}^{-(k+2m)})$. Существует единственное распределение $U\in D'_+(t, H_{\bar\Omega}^{-k})$ такое, что

$$(\mathfrak{X}+D_t)U-T\in D'_+(t, M^k).$$

Доказательство проводится методом преобразования Лапласа с применением теоремы 1.

Если $a(u, v)=\overline{a(v, u)}$, то можно заменить D_t на D_t^2 или $D_t^2+r(t)D_t+s(t)$. Результаты обобщаются на системы эллиптические в смысле Ниренберга.

А. Л. Крылов

328. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений. Вишик М. И., Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 6, 41—97

Статья обзорного характера, посвященная функциональным методам исследования линейных краевых задач, развитым, главным образом, авторами статьи. Характерной чертой этих исследований является отделение вопроса о разрешимости задачи от исследования дифференциальных свойств решений; при этом разумное определение понятия обобщенного решения (т. е. пополнение пространства, в котором ищется решение) дает возможность получить существование и единственность решения задачи как следствие некоторых общих свойств операторов, отвечающих задаче.

Гл. 1, «Расширения операторов и краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений», начинается с изложения общей схемы решения уравнения

$$Lu=h,\qquad(1)$$

где область определения Ω_L оператора L (вообще говоря, несамосопряженного) плотна в банаховом пространстве E, а область значений R_L лежит в сопряженном пространстве E^*. При этом предполагается, что а) $(Lu, u)>0\,(0\neq u\in\Omega_L)$; б) пополнение H_1 многообразия Ω_L по метрике $\{u, u\}=(Lu, u)$ вложимо в E так, что из сходимости в H_1 вытекает сходимость в E; замыкание $\tilde L$ оператора $\tilde L$, действующего в H_1 и определенного соотношением $(Lu, v)=\{\tilde Lu, v\}\,(u\in\Omega_L, v\in H_1)$, имеет областью значений все H_1. Утверждается существование и единственность обобщенного решения, понимаемого как элемент $U\in\Omega_{\tilde L}$, для которого $\{\tilde Lu, v\}\equiv(h, v)\,(v\in H_1)$. Если же оператор L удовлетворяет приведенным условиям только после добавления достаточно большой постоянной, то утверждается фредгольмовость поставленной задачи. Приводимая общая схема восходит к идеям Фридрихса и С. Л. Соболева, а для несамосопряженного случая развита в работах М. И. Вишика, Гординга (см., в частности, РЖМат, 1954, 2958), Браудера и др. Эта общая схема применяется к краевым задачам для эллиптических уравнений: последовательно рассматриваются первая краевая задача для уравнений второго порядка (здесь, в частности, указан случай, когда $H_1=E$, а E^*+ представляет собой пространство всех обобщенных функций первого порядка); задачи типа второй и третьей краевых задач для уравнений второго порядка; задача с косой производной; первая

краевая задача для сильно эллиптических систем; первая краевая задача для вырождающихся на границе области уравнений второго порядка; указывается метод расширения класса функций, в котором решается первая краевая задача (например, освобождения от требования конечности интеграла Дирихле в правой части уравнения Пуассона). Здесь освещаются работы Браудера, М. И. Вишика, Гординга, О. А. Ладыженской, Лиона, С. Г. Михлина, Ниренберга, С. Л. Соболева, Фридрихса (см., в частности, РЖМат, 1955, 3763, 3764, 3774 К; 1956, 8824, 8854; 1957, 1414, 1449), связанные с этим направлением, а также смежные результаты других авторов. Далее излагаются метод ортогональных проекций Зарембы и Г. Вейля, развитый Вишиком, и так называемый метод прямых разложений (пригодный и для несамосопряженных задач), предложенный им же. После короткого упоминания о «прямых методах вариационного исчисления» освещается вопрос о дифференциальных свойствах обобщенных решений задачи. Если для однородных уравнений с достаточно гладкими коэффициентами эти решения как угодно гладкие, то для неоднородных уравнений с правой частью из L_2 или из C это уже не так. Для решений уравнения второго порядка вида (1) в области D Ладыженская установила неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(D)} \leqslant C \int_D (h^2 + u^2)\, dD, \qquad (2)$$

обобщающее классическое неравенство С. Н. Бернштейна. Из (2) вытекает утверждение о гладкости решения. Освещаются также результаты, относящиеся к вопросу о гладкости обобщенных решений, Браудера, О. В. Гусевой (РЖМат, 1956, 3018), А. И. Кошелева, С. Г. Михлина и Фридрихса (РЖМат, 1955, 1234). С помощью неравенства (2) и его обобщений О. А. Ладыженская развила (РЖМат, 1957, 453) метод решения краевых задач при помощи продолжения по параметру (восходящий еще к С. Н. Бернштейну); этот метод кратко освещается.

Гл. 2, «Смешанные задачи для нестационарных дифференциальных уравнений и задачи Коши для операторных уравнений», которая читается независимо от гл. 1, начинается с рассмотрения первой смешанной краевой задачи для гиперболического уравнения

$$Su \equiv \partial^2 u/\partial t^2 - L(t)\, u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad du/dt|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u|_\Gamma = 0, \qquad (3)$$

где $L(t)$ — эллиптический оператор второго порядка. Приводятся два определения обобщенного решения (в одном из них требуется конечность интеграла энергии, а в другом — только квадратичная суммируемость решения) как функции, удовлетворяющей соответствующему интегральному тождеству; оба эти определения, а также аналогичные уравнения для параболических уравнений и сильно параболических и сильно гиперболических систем были исследованы в ряде работ О. А. Ладыженской (см., в частности, РЖМат, 1955, 3774 К). Приведена идея доказательства теорем единственности решения, играющих важную роль в этих исследованиях. Что касается существования решения задачи (3), то здесь приводятся два функциональных метода для доказательства этого факта. Один из них основан на теореме о единственности решения сопряженной задачи в сочетании с «энергетическим неравенством» $\|u\|_{W_2^1} \leqslant C\, \|Su\|_{L_2}$, из которого вытекает существование ограниченного S^{-1}. Другой же способ, развитый М. И. Вишиком (РЖМат, 1956, 1383, 1334, 8060), основан на положительной определенности соответствующей квадратичной формы, отвечающей задаче.

Смешанную задачу можно трактовать как задачу Коши для операторного уравнения в гильбертовом пространстве, имеющего вид

$$du/dt + L(t)\, u = f(t), \quad u|_{t=0} = 0$$

и аналогичный вид для уравнений со вторыми производными по t. Теорема единственности и оба метода доказательства теоремы существования, упомянутые выше, переносятся и на данную задачу. Первый метод основан на разложении оператора L на сумму самосопряженного положительно определенного L_1 и оператора L_2, в определенном смысле подчиненного L_1; он развит в работах О. А. Ладыженской (РЖМат, 1956, 7371; 1957, 638) и применялся ею, а также А. А. Киселевым (РЖМех, 1955, 6169) к различным краевым задачам. Во втором методе L считается представимым в виде симметрического положительно определенного и кососимметрического операторов; этот метод развит и применен М. И. Вишиком в указанных выше работах. Далее приводится метод доказательства существования решения с помощью продолжения по параметру билинейной формы, соответствующей оператору. Этот метод, принадлежащий О. А. Ладыженской и ранее не опубликованный, показывается на примере первой краевой задачи для сильно параболических систем. Освещаются развитые авторами метод конечных разностей (в связи с этим указывается на работу Като, РЖМат, 1955, 2769) и метод Галеркина. Приведены результаты авторов по дифференциальным свойствам решений. Сформулированы некоторые проблемы.

Работа имеет целью выявление функциональных идей, лежащих в основе исследования краевых задач, но не детальное освещение полученных результатов поэтому вслед за изложением той или иной идеи в общем (абстрактном) виде авторы обычно лишь бегло говорят об объеме ее применения, а также о смежных результатах, не приводя полных формулировок. Отметим, что в библиографии (включающей 81 источник) наименование работ и выходные данные не всюду точны.

А. Д. Мышкис

329. О смешанных задачах в целом для одного класса систем дифференциальных уравнений на дифференцируемых многообразиях. Обоснование метода Фурье. **Морен** (Über gemischte Rand- und Anfangs-wertprobleme im Grossen für eine Klasse von Gleichungssystemen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Eine Begrundung der Fouriermethoda. Maurin K.), Bull. Acad. polon. sci., 1955, cl. 3, **3**, № 9, 471—475 (нем.); Бюл.; Польской АН, 1955, Отд. 3, **3**, № 3, 467—471

Автор рассматривает систему уравнений в частных производных

$$\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 = A_x u(x, t),$$

где $u(x, t)$ — векторное поле с r компонентами, t — действительное переменное, x — переменное, изменяющееся в открытом, регулярном, n-мерном многообразии Ω_n и A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор с достаточно регулярными коэффициентами, который действует над переменным x. Предполагается, что оператор A (рассматриваемый в гильбертовом пространстве $L^{2,r}(\Omega_n)$ векторных полей, суммируемых с квадратом на Ω_n) принимается полуограниченным снизу. Предполагается, что оператор A, рассмотренный только на пространстве бесконечно дифференцируемых векторных полей с компактными носителями в Ω_n, имеет самосопря-

женное расширение A_1. Граничные условия состоят из начальных условий:

$$u(x, 0) = f(x),\ \partial u(x, 0)/\partial t = g(x)$$

и краевых условий, определяемых выбором самосопряженного расширения A_1. Поле $u(x, t)$ принадлежит к области определения оператора A_1 для каждого $t \geqslant 0$.

Автор дает явную формулу (посредством спектрального представления оператора A_1) для решения на всем многообразии Ω_n соответствующей начальной задачи для соответствующего операторного уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 = A_1(u)$$

и находит достаточные условия для того, чтобы решение было классическим. Эти условия таковы, что f и g должны принадлежать к области определения достаточно высокой степени оператора A_1. Аналогичные рассмотрения в случае «параболической» системы

$$\partial u(x, t)/\partial t = A_x u(x, t)$$

дают простое доказательство обобщения теоремы Браудера о существовании и виде классического решения этой системы.

Автор доказывает единственность и непрерывную зависимость (в $L^{2,r}(\Omega_n)$) решения от начальных данных. Наконец, автор показывает, каким образом из эффективных приведенных им явных формул для решения он получает (благодаря теории Гординга разложения по собственным функциям) точное и изящное доказательство представимости решения в виде обобщенного интеграла Фурье. S. Łojasiewicz

330. Решение в целом смешанной задачи для системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. **Морен** (Die Lösung im Grossen gemischter Probleme für Systeme inhomogener linearer Differentialgleichungen. Maurin L.), Bull. Acad. Polon. Sci. 1956, Cl. 3, 4, № 4, 179—185 (нем.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 4, 175—181

Продолжая исследования К. Морена (реф. 329), проводившиеся методом самосопряженных расширений операторов, автор занимается смешанной задачей для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = A_x u(x, t) + f(x, t);$$

постановка задачи и предположения, касающиеся оператора, те же самые, как в упомянутой выше работе К. Морена. Эти предположения удовлетворяются, в частности, для уравнений Дирака в случае стационарного поля. Решая соответствующее операторное уравнение, автор получает явную формулу для (обобщенного) решения в виде обобщенного интеграла Фурье. Решение является единственным и непрерывно зависит от начальных данных. Автор дает достаточные условия (посредством итерации самосопряженного расширения) для того, чтобы решение было классическим. В случае одного уравнения (гиперболического типа) аналогичные результаты были получены О. А. Ладыженской (РЖМат, 1955, 3774К), но в случае измерений $n = 4l + 2$ и $n = 4l + 3$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$) предположения автора слабее. S. Łojasiewicz

331. О некоторых специальных задачах теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. **Гюнтер** (Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Günther Paul. Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1957, 102, № 1, 50 S.) (нем.)

Линейное однородное с аналитическими коэффициентами уравнение в частных производных второго порядка относительно одной неизвестной функции $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ от $m = n + 1$ ($n = 2, 3, \ldots$) независимых переменных записывается введением метрики Римана в форме

$$I[u] \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta u + A^\alpha\nabla_\alpha u + Cu = 0 \ldots$$
$$\ldots (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n). \qquad (1)$$

В § 1 в предположении, что матрица $\|g^{\alpha\beta}\|$ имеет k положительных и $m - k$ отрицательных собственных чисел, выясняются необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (1) преобразовывалось бы посредством а) замены независимых переменных, б) умножения уравнения на функцию, в) замены неизвестной функции u на v, где $u = \lambda(x)\, v$, к уравнению

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{j=k}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

В § 2 предполагается $k = 1$ и находятся необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (1) приводилось к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \bar{g}^{ij}\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j u - \bar{A}^i\nabla_i u + Cu = 0 \ldots, \qquad (2)$$

где $\bar{g}^{ij}$, $\bar{A}^i$ не зависят от x_0 и $i, j = 1, \ldots, n$.

В § 3 предполагается $m = n + 1 = 4$ и (2) есть уравнение чистой волны (т. е. решение задачи Коши в любой точке P определяется лишь данными Коши на пересечении обратного характеристического коноида с вершиной в точке P и многообразия, несущего данные Коши). Доказывается, что уравнение (2) преобразуемо к волновому уравнению посредством а), б), в), если $\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}^i\bar{R} \leqslant 0$, где $\bar{R}$ — кривизна соответствующего трехмерного риманова пространства. Из §§ 2 и 3 следует, что уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \bar{\nabla}_i\bar{\nabla}^i u + Cu = 0$$

являются уравнением чистой волны в том и только том случае, когда $C = -R/6$, и в § 4 для решения задачи Коши последнего уравнения получена интегральная формула, выражающая значение искомой функции через средние значения данных Коши по геодезической сфере (аналог формулы Пуассона).

В § 5 для пространства постоянной ненулевой кривизны при $n = 2$ и $n = 3$ показывается, что средние значения любой функции $\varphi(x)$ по геодезической сфере радиуса t являются решениями некоторой задачи Коши для уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 + f(t)\,\partial u/\partial t - \bar{\nabla}_i\bar{\nabla}^i u = 0,$$

обобщающего уравнения Дарбу. В § 6 утверждение § 5 переносится на пространства любой размерности в дополнительном предположении, что риманово пространство гармонично (т. е. существует основное решение уравнения $\Delta_2 u \equiv \bar{\nabla}_i\bar{\nabla}^i u = 0$, являющееся функцией только геодезического расстояния).

В § 7 показывается, что в случае $n = 2$ и $n = 3$ средние значения являются решениями уравнений типа Дарбу только для пространств постоянной кривизны и аналогичные результаты получены в предположении, что решения представляются средними

значениями по тем же геодезическим сферам от произведений $\omega(\xi, x)\varphi(x)$, где $\omega(\xi, \xi) \neq 0$.

В § 8 предполагается: в области D n-мерного пространства форма $g^{ij}\lambda_i\lambda_j$ положительна и существует точка $\xi \in D$ и функция $\rho(x)$, $(x \in D)$ такие, что: 1) $\rho(x)$ для $x \neq \xi$ трижды непрерывно дифференцируема; 2) $\rho(x) > 0$ для $x \neq \xi$, $\lim(\rho(x)/\sigma(x)) = 1$ при $x \to \xi$, где $\sigma(x)$ — геодезическое расстояние между x и ξ; 3) $\Delta_1\rho = g^{ij}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} > 0$ для $x \neq \xi$ и $\Delta_1\rho$ имеет конечный положительный предел при $x \to \xi$; 4) точечные множества $\rho(x) = A$ суть замкнутые поверхности S_A, лежащие в D. Доказываются теоремы:

1. Если для каждого решения уравнения $\Delta_2 u = 0$ имеет место равенство

$$u(\xi) = \frac{1}{\mu(A)}\int_{S_A} u(x)\sqrt{\Delta_1\rho}\, d0,$$

то существует основное решение уравнения $\Delta_2 u = 0$, обращающееся в постоянную на каждой из S_A.

2. Если, кроме того, для всех решений некоторого уравнения $\Delta_2 u + cu = 0$ ($c = \text{const} \neq 0$ — фиксированная) имеет место

$$u(\xi) = \frac{1}{\bar{\mu}(A)}\int_{S_A} u(x)\sqrt{\Delta_1\rho}\, d0,\ \bar{\mu}(A) \neq \int_{S_A}\sqrt{\Delta_1\rho}\, d0,$$

то $\rho = \xi$ и риманово пространство центрально-гармонично относительно точки ξ. Х. Л. Смолицкий

332. Отдельные задачи из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Бекерт (Einige Probleme aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Beckert Herbert). Forsch. und Fortschr., 1954, 28, 297—301 (нем.)

333. О некоторых системах квазилинейных уравнений с частными производными II. Езра (Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles quasi linéaires. II. Ezra Jacques), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 6, 537—539 (франц.)

Автор рассматривает систему дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial}{\partial x}X^i(x, y, u(x, y), v(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}Y^i(x, y, u(x, y), v(x, y)) + Z^i(x, y, u(x, y))\ (i = 1, 2), \quad (1)$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ неизвестные функции. Решение первого уравнения в (1) ($i = 1$) удовлетворяет тождеству

$$\int_D f_{yy}Y^1\, dx\, dy = \int_D (f_{xy}X^1 + f_yZ^1)\, dx\, dy - \int_C f_y(Y^1 dx + X^1 dy), \quad (2)$$

где C есть кривая, ограничивающая область D и $f = f(x, y, x_0, y_0)$ — произвольная функция из класса C^2 в этой области. Автор доказал это тождество в предыдущей заметке под таким же названием (РЖМат, 1956, 8817). Рассматривается тождество (2) как интегральное уравнение первого рода для функции $Y^1(x, y) = Y^1(x, y, u(x, y), v(x, y)$ с ядром $f_{yy}(x, y, x_0, y_0)$. Если резольвента существует, это уравнение можно использовать для выражения функции $Y^1(x, y)$ посредством правой части тождества (2). Кроме того, автор показывает применение одного из вариантов описанной выше процедуры к доказательству теоремы (не сформулированной точно) о существовании решения $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы $u_x - v_y = A(x, y, u, v)$, $u_y + v_x = B(x, y, u, v)$ с граничным условием $ul(s) + vm(s) = r(s)$ с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Г. К. Москатов

334. Об интегрировании некоторого уравнения с частными производными. Анджелеску (Asupra integrării unei ecuații cu derivate parțiale. Angelescu Tr.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 11, 1289—1292 (рум.; рез. русск., франц.)

В статье автор находит решение, зависящее от произвольных постоянных уравнения

$$\frac{d^2\lambda}{dx\,dy} - \frac{1}{1+x+y}\left(e^{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + e^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) + \frac{1}{(1+x+y)^2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = 0, \quad (1)$$

которое используется при нахождении локально евклидовых пространств A_2.

Интегрированием уравнения Риккати, полученном из (1), автор находит решение и отмечает несколько интересных частных случаев. Резюме автора

335. Об одном линейном уравнении в частных производных с постоянными коэффициентами. Митринович (Sur une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients constants. Mitrinovich D. S.), Math. Gaz., 1957, 41, № 335, 41—43 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\ (a, b, c \text{ — постоянные}) \quad (1)$$

и его характеристическое уравнение

$$a + 2br + cr^2 = 0\ (r_1 \text{ и } r_2 \text{ — его корни}). \quad (2)$$

Если $r_1 \neq r_2$, то общее решение (1) пишется в виде

$$z = f(x + r_1y) + g(x + r_2y)\ (r_2 \neq r_1),$$

где f и g — произвольные функции.

Если $r_1 = r_2$, то общее решение имеет вид

$$z = f(x + r_1) + yg(x + r_1y)\ (r_2 = r_1)$$

и может быть получено предельным переходом от случая различных корней. Аналогично, в общем случае, рассматривается уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\left(A_0\frac{\partial^n}{\partial x^n} + A_1\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + A_n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right)z = 0.$$

Если его характеристические числа суть $r \equiv r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} \neq r_p, \ldots$, то общее решение имеет вид

$$z = \sum_{k=0}^{p-2} y^k f_k(x + ry) + f_p(x + r_py) + \ldots$$

и может быть получено аналогичным образом.

А. Л. Крылов

336. Операционное исчисление в конечном интервале. Микусинский. (Le calcul opérationnel d'intervalle fini. Mikusiński J.), Studia math., 1956, **15**, № 2, 225—251 (франц.)

Пусть C_T есть кольцо непрерывных комплексных функций $a = \{a(t)\}$, определенных в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ со сложением в обычном смысле и умножением типа свертки $ab = \left\{\int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, dt\right\}$. Дели-

тели нуля в этом кольце суть функции, исчезающие в некоторой окрестности нуля. Пусть C_T^* есть множество функций, не являющихся делителями нуля. Элементы кольца функций a/b ($a \in C_T$, $b \in C_T^*$) назовем операторами. Функции, локально интегрируемые в промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$, входят изоморфно в кольцо операторов. Автор доказывает, что представление многочлена с операторными коэффициентами в форме $\prod_{i=1}^{n}(x - b_i)$ является единственным в том и только в том случае, если операторы $b_i - b_j$ ($i \neq j$) не являются делителями нуля. В статье определяется производная операторной функции действительного аргумента и доказывается, что дифференциальное уравнение $ax'(\lambda) = bx(\lambda)$ в котором, по крайней мере, один коэффициент не является делителем нуля, имеет не более, чем одно решение в интервале $0 \leqslant \lambda < \infty$ при начальном условии $x(0) = k$. Пользуясь этой теоремой, автор определяет экспоненциальную функцию $e^{\lambda w}$ для $\lambda \geqslant 0$ (где w — оператор), как решение уравнения $x'(\lambda) = wx(\lambda)$ при начальном условии $x(0) = 1$. Если $e^{\lambda w}$ не является делителем нуля, мы полагаем, что $e^{-\lambda w} = 1/e^{\lambda w}$. Автор дает интересное условие существования экспоненциальной функции: $e^{\lambda w}$ существует для $\lambda \geqslant 0$, если и только если уравнение

$$\int_0^t p(t-\tau)\, y_\lambda(\lambda, \tau)\, d\tau = \int_0^t q(t-\tau)\, y(\lambda, \tau)\, d\tau,$$

где $w = q/p$, имеет решение $y(\lambda, t)$ с непрерывной производной $y_\lambda(\lambda, t)$, такое что $y(0, t)$ не тождественно исчезает в любой окрестности нуля. В статье вводится следующая классификация операторов: оператором называется: 1) правый логарифм, если функция $e^{\lambda w}$ существует при $\lambda \geqslant 0$ и не существует при $\lambda < 0$; 2) левый логарифм, если $e^{\lambda w}$ существует при $\lambda \leqslant 0$ и не существует при $\lambda > 0$; 3) двухсторонний логарифм, если $e^{\lambda w}$ существует при всяком действительном λ. Автор исследует различные свойства логарифмов и доказывает следующую теорему для операторных дифференциальных уравнений

$$a_m x^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = 0 \qquad (1)$$

с коэффициентами, принадлежащими некоторому полю, входящему в кольцо операторов: если характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет m корней, которые являются двухсторонними или правыми логарифмами, то единственным решением уравнения (1) в интервале $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, удовлетворяющим $x(\lambda_1) = \ldots = x^{(m-1)}(\lambda_1) = 0$, является функция, тождественно исчезающая. Кроме того, при этих допущениях уравнение (1) имеет не более m линейно независимых решений. В качестве применения теорем для операторных дифференциальных уравнений автор получает теорему Тихонова о единственности решения уравнения распространения тепла

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = x_t(\lambda, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0;\ -\infty < \lambda < \infty)$$

в классе функций, удовлетворяющих при некотором C условию

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |x(\lambda, t)|\, e^{-C\lambda^2} \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to \infty.$$

K. Urbanik

337. Заметка о применении метода Банаха—Каччиополи—Тихонова в теории уравнения $s = f(x, y, z, p, q)$. Белецкий (Une remarque sur l'application de la méthode de Banach—Cacciopoli—Tikhonov dans la théorie de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$. Bielecki A.), Bull. Acad. Polon. Sci. 1956, cl. 3, 4, № 5, 265—268 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 5, 259—262.

Автор рассматривает дифференциальное уравнение

$$s = f(x, y, z, p, q), \qquad (1)$$

где $s = \partial^2 z/\partial x \partial y$; $p = \partial z/\partial x$; $q = \partial z/\partial y$, при условии, что функция $f(x, y, z, p, q)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < \alpha \leqslant +\infty$, $0 \leqslant y < \beta \leqslant +\infty$, $-\infty < z, p, q < +\infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$|f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) - f(x, y, \bar{\bar{z}}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})| \leqslant$$

$$\leqslant L(x, y)\,(|\bar{z} - \bar{\bar{z}}| + |\bar{p} - \bar{\bar{p}}| + |\bar{q} - \bar{\bar{q}}|);$$

$$|f(x, y, 0, 0, 0)| \leqslant L(x, y),$$

где функция $L(x, y)$ так же как и ее первые производные, непрерывна и неотрицательна в области $\Delta: 0 \leqslant x < \alpha$; $0 \leqslant y < \beta$. Требуется доказать существование в области Δ единственного решения $\varphi(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям $\varphi(0, 0) = \varphi_x(x, 0) = \varphi_y(0, y) = 0$. Если применять для этого теорему Банаха—Каччиополи—Тихонова о неподвижной точке обычным методом, то необходимо ввести определенные ограничения на область Δ. Автор показывает, что можно избежать этого недостатка метода, вводя соответствующую метрику в функциональном пространстве.

Хорошо известно, что исследуемая задача эквивалентна задаче о существовании единственного и непрерывного решения в области Δ интегрального уравнения

$$s(x, y) = f\Big(x, y, \int_0^x \int_0^y s(u, v)\, du\, dv,$$

$$\int_0^y s(x, v)\, dv, \int_0^x s(u, y)\, du\Big). \qquad (2)$$

Введем следующие обозначения: если $\psi(x, y)$ непрерывна в области Δ, то

$$\Phi(\psi) = \int_0^x \int_0^y |\psi(u, v)|\, du\, dv +$$

$$+ \int_0^y |\psi(x, v)|\, dv + \int_0^x |\psi(u, y)|\, du,$$

$$\|\psi\| = \sup_\Delta [\varphi(\psi) \exp(-\varkappa \varphi(L))],$$

где $\varkappa$ — положительная константа. Пусть E — пространство Банаха функций $\psi(x, y)$, непрерывных в области Δ и удовлетворяющих условию $\|\psi\| < +\infty$. Преобразование

$$\tilde{\psi}(x, y) = F(\psi) = f\Big(x, y \int_0^x \int_0^y \psi(u, v)\, du\, dv,$$

$$\int_0^y \psi(u, v)\, dv, \int_0^x \psi(u, y)\, du\Big), \qquad (3)$$

определенное в пространстве E, обладает следующими свойствами:

$$F(E) \subset E; \quad \|F(\psi_2) - F(\psi_1)\| \leqslant \frac{3}{\varkappa}\|\psi_2 - \psi_1\|.$$

Если выбрать $\varkappa > 3$, то преобразование (3) удовлетворяет требованиям теоремы Банаха—Каччиополи—Тихонова и, следовательно, существует единственное решение уравнения (2), непрерывное в области Δ. Аналогичным образом можно исследовать задачу Коши для уравнения (1). J. Szarski

338. Основное свойство слабых решений обобщенной линейной системы эллиптических дифференциаль-

ных уравнений произвольного порядка. Морен (Der Fundamentalsatz über schwache Lösungen der allgemeinen linearen Systeme der elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Maurin K.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1954, cl. 3, 2, № 10, 457—461 (нем.); Бюл. Польской АН, 1954, Отд. 3, 2, № 10, 461—465

Рассматривается система r линейных операторов в частных производных эллиптического типа, порядка σ, с r неизвестными функциями и n независимыми переменными, $Au \equiv (Au)_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ и система сопряженных им операторов A^+u. Предполагается, что коэффициенты этих операторов удовлетворяют определенным условиям регулярности в некоторой области D. Назовем слабым решением системы $Au=\eta$ систему функций u, таких, что любой системы φ, функций достаточно регулярных в области D и исчезающих вне некоторого компакта, содержащегося в D, имеет место равенство $(u, A\varphi)=(\eta, \varphi)$. Автор доказывает следующую теорему: всякой достаточно малой окрестности $U_\varepsilon \subset D$ точки x соответствуют матрицы $r(z, x)$ и $\omega(z, x)$, определенные на топологическом произведении $U_\varepsilon \times U_\varepsilon$, такие, что если u является слабым решением системы, то почти всюду в окрестности $U_{\varepsilon/2}=\{z \mid |z-x|<\varepsilon/2\}$ справедливы равенства:

$$u_i(x)=\sum_{\mu=1}^{r}\int_{U_\varepsilon} u_\mu(z)\,\overline{r_{\mu i}(z, x)}\,dz+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r}\int_{U_\varepsilon}\eta_\mu(z)\,\overline{\omega_{i\mu}(z, x)}\,dz.$$

Если, кроме того, функция η_i удовлетворяет условию Гёльдера, тогда равенства $Au(x)=\eta_i(x)$ удовлетворяются всюду.

Доказательство этой теоремы основано на одной лемме Лопатинского (Укр. матем. ж., 1951, **3**, 290—316).

M. Krzyżański.

339. О существенно линейных эллиптических дифференциальных уравнениях второго порядка. Нагумо (On principally linear elliptic differential equations of the second order. Nagumo Mitio), Osaka Math. J., 1954, 6, № 2, 207—229 (англ.)

Рассматривается теорема существования решения граничной задачи первого рода для уравнения

$$\Phi[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=f(x, u, \partial_x u), \quad (1)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $\partial_x u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$. По определению, функция $\omega(x)$ есть квазисуперрешение (субрешение) уравнения (1) в области D, если для каждой точки $x_0 \in D$ существует окрестность U и конечное число функций $\omega_\nu(x)$ $(\nu=1, \ldots, n)$ класса C^2 в U таких, что $\omega(x)=\min_\nu \omega_\nu(\max_\nu \omega_\nu(x))$ для $x \in U$ и $\Phi[\omega_\nu] \leqslant f(x, \omega_\nu, \partial_x \omega)$ $(\geqslant f(x, \omega_\nu, \partial_x \omega_\nu))$. Говорят, что область D удовлетворяет условию Пуанкаре, если для каждой граничной точки C из D существует конус K с вершиной в C такой, что в достаточно малой окрестности C K лежит вне D.

Главный результат статьи содержится в следующей теореме: Пусть D — ограниченная область, удовлетворяющая условию Пуанкаре, $a_{ij}(x)$ удовлетворяет условию Липшица в $\bar{D}$ и

$$A^{-1}\leqslant\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\leqslant A \text{ для } \sum_{i=1}^{m}\xi_i^2=1 \ (A\geqslant 1).$$

Пусть $f(x, u, p)$, где $p=(p_1, \ldots, p_m)$, удовлетворяет условию Гёльдера в каждом ограниченном подмножестве области $x \in \bar{D}$, $\omega(x)\leqslant u\leqslant\bar{\omega}(x)$, p произвольное, где $\bar{\omega}(x)$ и $\underline{\omega}(x)$ — соответственно квазисуперрешение и квазисубрешение уравнения (1) такие, что $|\bar{\omega}(x)|$, $|\underline{\omega}(x)|\leqslant M$ в D, и пусть

$$|f(x, u, p)|\leqslant B\sum_{i=1}^{m} p_i^2+\Gamma,$$

где B и Γ — положительные постоянные, такие, что $16ABM<1$. Затем для всякой непрерывной функции $\beta(x)$ из $\bar{D}$ такой, что $\underline{\omega}(x)\leqslant u(x)\leqslant\bar{\omega}(x)$ в D существует решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $\underline{\omega}(x)\leqslant u(x)\leqslant\bar{\omega}(x)$ в D и условию $u(x)=\beta(x)$ на границе D. Доказательства в этой заметке основаны на известной работе Шаудера: (J. Schauder, Math. Z., 1938, **38**, 257—282).

J. Szarski

340. Теорема существования применительно к краевым задачам для уравнения $\Delta u=F(x, u, \operatorname{grad} u)$. Симода. (Sur théorème d'existence dans les problèmes aux limites pour l'équation $\Delta u=F(x, u, \operatorname{grad} u)$. Simoda S.), Osaka math. J., 1954, 6, № 2, 243—268 (франц.)

Автор рассматривает задачу существования в ограниченной области d решения уравнения

$$\Delta u=F(x, u, \operatorname{grad} u), \quad (1)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ $(n\geqslant 2)$ и через Δ обозначен обобщенный оператор Лапласа. Операторы $\bar{\Delta}$, $\underline{\Delta}$ (обозначенные через Δ в случае $\bar{\Delta}=\underline{\Delta}$) автор вводит аксиоматически. В частности, они удовлетворяют соотношению

$$\Delta\left(\int_d f(\xi)\,e(x, \xi)\,d\xi\right)=f(x),$$

где $e(x, \xi)$ есть фундаментальное решение уравнения Лапласа (для $n=3$, $e(x, \xi)=-(4\pi|x-\xi|)^{-1}$ для любой функции $f(x)$, непрерывной и суммируемой в d. Примером такого оператора может служить

$$\Delta u=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{n}(u(\ldots, x_i+h, \ldots)+$$

$$+u(\ldots, x_i-h, \ldots)-2u(x)).$$

Предполагается, что граничные точки области d регулярны в смысле теории потенциала. В своей статье автор вводит функцию $\chi(x)$, гармоническую в d и непрерывную в $\bar{d}$, удовлетворяющую условию Дирихле $u(x)=\chi(x)$ на границе d. Для краткости автор ограничивается рассмотрением случая $\chi(x)=0$, к которому общая задача может быть сведена посредством простого преобразования.

Предполагается, что функция $F(x, u, g)$ непрерывна в некоторой области, содержащей все точки $(x, u(x), q(x))$, где $x \in d$ и $u(x)$, $q(x)$ принадлежат соответственно замкнутым и выпуклым множествам S и G функций, непрерывных в $\bar{d}$, и что она удовлетворяет неравенству $|F(x, u, q)|\leqslant\beta(x)$, где $\beta(x)$ — некоторая функция, непрерывная и суммируемая в d. Предположим, кроме того, что преобразование $(\tilde{u}, \tilde{g})=T(u, q)$ вида

$$\tilde{u}(x)=\int_d F(\xi, u(\xi), q(\xi))\,G(x, \xi)\,d\xi$$

$$(i=1, \ldots, n),$$

$$\tilde{q}_i(x)=\int_d F(\xi, u(\xi), q(\xi))\frac{\partial}{\partial x}G(x, \xi)\,d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина первого рода для уравнения Лапласа, преобразует множество $\hat{S} = S \times G$ в его часть. При упомянутых выше допущениях в множестве S существует, по крайней мере, одна функция, удовлетворяющая уравнению (1). При доказательстве автор использует некоторый вариант теоремы Тихонова о неподвижной точке (Math. Ann., 1935, 111, 767—776), примененной к преобразованию T на множестве $\hat{S}$ в пространстве функций с топологией, определенной почти равномерной сходимостью в d.

В выводах из указанной выше теоремы, касающихся существования решения $u(x)$ уравнения (1) при граничном условии Дирихле, автор заменяет допущения относительно множества $\hat{S}$ системой допущений относительно функций $F(x, u, q)$, области d, и заданных функций $\bar{w}(x)$, $\underline{w}(x)$ (дающих оценку решению $u(x)$ соответственно сверху и снизу).

Кроме этого, автор рассматривает некоторые частные случаи уравнения (1), например, уравнение

$$\Delta u = f(x, u) \log(1 + |\operatorname{grad} u|^2),$$

A. Pliś

341. Об асимптотическом поведении тепловых потенциалов и интегралов Фурье-Пуассона. К ш и ж а н с к и й (Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson. K r z y ż a ń s k i M.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 288—299 (франц.)

Функции

$$I(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] ds,$$

$$J_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau,$$

$$J_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau,$$

удовлетворяющие уравнению Фурье, исследуются при некоторых предположениях о функциях $\varphi(s)$, $\psi(\tau)$. Доказано: I. Пусть $\varphi(s)$ измерима (в смысле Лебега) и ограничена в $-\infty < s < \infty$ и существуют пределы $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = l^+$ и $\lim_{s\to-\infty} \varphi(s) = l^-$. Тогда для всех x имеем $\lim_{t\to+\infty} I(x, t) = (l^+ + l^-)/2$.

Приводится пример отсутствия $\lim_{t\to+\infty} I(x, t)$ при отсутствии $\lim_{s\to\pm\infty} \varphi(s)$. II. Если $\varphi(s)$ измерима, ограничена и нечетна, то $\lim_{t\to+\infty} I(x, t) = 0$ равномерно по x в каждом конечном промежутке. III. Если $\psi(t)$ непрерывна для $t \geqslant 0$ и существует $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = L$, то $\lim_{t\to+\infty} J_1(x, t) = L$ для каждого фиксированного $x > 0$. IV. Если $\psi(t)$ непрерывна для $t \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенству $|\psi(t)| < Mt^{-\alpha}$, где $M > 0$ и $\alpha > 1/2$ константы, то $\lim_{t\to+\infty} J_0(x, t) = 0$ для каждого $x \geqslant 0$.

Примеры показывают, что при более слабом стремлении функции $\psi(t)$ к нулю $\lim_{t\to+\infty} J_0(x, t)$, вообще говоря, не существует.

Из этих результатов легко следуют такие: Пусть $u(x, t)$, $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ суть решения уравнения Фурье в области $t > 0$, $x > 0$, модуль которых не превосходит Me^{kx^2}, и удовлетворяющие условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u(0, t) = 0,$$

$$u_0(x, 0) = \varphi(x), \qquad u'_{0x}(0, t) = 0,$$

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_1(0, t) = \psi(t),$$

$$u_2(x, 0) = \varphi(x), \qquad u'_{2x}(0, t) = \psi(t).$$

Тогда при $t \to +\infty$ и всяком $x > 0$:

1. $u(x, t) \to 0$, если $\varphi(x)$ ограничена;
2. $u_0(x, t) \to l$, если $\varphi(x)$ ограничена и $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = l$;
3. $u_1(x, t) \to L$, если $\varphi(x)$ ограничена, $\psi(t)$ непрерывна и $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = L$;
4. $u_2(x, t)$, вообще говоря, предела не имеет, если не выполнены некоторые специальные условия.

X. Л. Смолицкий

342. Задача Дирихле для областей, близких к сфере. **Д и - П а л о** (Sul problema di Dirichlet in un campo prossimo ad une sfera. D i P a l o R a f f a e l e), Ricerca, Napoli, 1954, 5, № 4, 27—32 (итал.)

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа для области σ', близкой к шару σ, точки Q' которой находятся с точками Q шара σ во взаимном однозначном соответствии вида $Q' = Q + \varepsilon(Q)\, n$ (n — единичный вектор в направлении радиуса шара); $\varepsilon(Q)$ — заданная функция в σ. Решение задачи Дирихле для σ', когда $|\varepsilon(Q)|$ мало, приближенно представляется в виде разности некоторых двух интегралов Пуассона для σ. K. Maruhn

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 146.

343. Задача Дирихле с границами Мартина. **Б р е л о** (Le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin. B r e l o t M a r c e l), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 2, 142—144 (франц.)

Автор развивает теорию задачи Дирихле (а также более общей задачи) с данными на границах типа Мартина в пространстве Грина (о границах типа Мартина в евклидовом пространстве см. Martin R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49, 137—172; для пространства Грина см. Brelot M., Choquet I., Ann. Inst. Fourier, 1951, 3, 199—263). В работе найдено интегральное выражение решения предложенной задачи, данное в метрике Радона, относящееся к границе типа Мартина. Даны, кроме того, необходимые и достаточные условия существования решения. S. Teleman

344. Замечание о задаче, родственной задаче Дирихле. **Ф о г ю л ь** (A note on a problem related to the Dirichlet problem. F o g u e l S. R.), Riveon lemat., 1955, 9, 18—22 (иврит, рез. англ.)

В трехмерном пространстве дана ограниченная область Ω. Хорошо известно, что каждой функции U, определенной и непрерывной на границе F, соответствует функция V; V определена и гармонична в Ω и величины U берутся как граничные значения во всех точках F, кроме множества меры нуль. Более точно: если $M \in F$ и M — регулярная точка, тогда справедливо

$$V(P) \to U(M), \quad P \to M, \quad P \in \Omega \qquad (1)$$

Доказано следующее: Если $M \in F$ и M — сингулярная точка, то (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\int U\, d\mu = U(M)$, где распределение μ есть полярное сверхвыметание (surbalayage polaire) в точке M, по определению, данному Валле—Пуссеном в «Логарифмическом потенциале».

Если выполняется (1), тогда мы скажем, что M регулярна по отношению к U.

Доказательство основывается на следующих двух утверждениях из упомянутой выше книги:

A. Если $P_n \to M$ и существует $\lim \mu P_n$, когда μP_n есть полярное выметание (balayage polaire) P_n, то отсюда следует, что $\lim \mu P_n = a\mu + \lambda(1 - a)$, где μ есть сверхвыметание (surbalayage) в точке M. λ — распределение единицы в M и $0 \leqslant a < 1$.

B. Существует последовательность P_n, для которой $a > 0$. Из этих теорем немедленно следует:

1. Каждая сингулярная точка не является регулярной по отношению к потенциалу положительного распределения, когда потенциал непрерывен.

2. Если $M \in F$ и существует функция U (определенная и непрерывная на F) такая, что $U(M) = 0$ и $U(Q) > 0$, $Q \neq M$ и M регулярна по отношению к U, тогда M — регулярна (принцип барьера).

3. Если $M \in F$ и M — сингулярная точка, регулярная по отношению к функции U_n, и $U_n \to U$, где U — непрерывна, тогда M — регулярна по отношению к U.

Замечание. Автор не был в состоянии найти какую-либо литературу, связанную с этим кругом вопросов. Из резюме автора

345. Полнота системы собственных и присоединенных функций сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений. Наймарк Б. М., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 2, 198—201

Рассматривается оператор H, порожденный сильно эллиптической системой и нулевыми краевыми условиями типа Дирихле в ограниченной области D n-мерного евклидова пространства с гладкой границей. Доказывается полнота системы собственных и присоединенных функций оператора H в $L^2(D)$. Доказательство распадается на следующие этапы:

1. Лемма 1. Операторы H и H^2 имеют одинаковые линейные оболочки собственных и присоединенных функций. Задача же об отыскании собственных и присоединенных функций оператора H^n для достаточно больших n может быть записана в виде $(E + \mu A - \lambda B) g_n = B g_{n-1}$, где B — вполне непрерывный оператор типа Гильберта—Шмидта, а A — ограниченный.

2. Основная теорема. Пусть оператор B обладает свойствами: 1) из $(Bu, u) = 0$ следует $u = 0$; 2) B — самосопряженный, вполне непрерывный, с резольвентой, у которой числитель и знаменатель могут быть взяты не выше первого порядка роста. Пусть, кроме этого, A ограничен и $(E + \mu A)^{-1}$ ограничен. Тогда система собственных и присоединенных функций уравнения

$$(E + \mu A - \lambda B) f_n = f_{n-1}$$

полна при достаточно малом μ. Требование ограниченности $(E + \mu A)^{-1}$ может быть заменено требованием дискретности спектра A; 3) доказывается, что оператор B, фигурирующий в лемме, для достаточно больших n обладает свойствами, требующимися в теореме. А. Л. Крылов

346. О верхней и нижней предельных точках спектра одного дифференциального уравнения в частных производных. Мартин (On the upper and lower limiting points of the spectrum of a partial differential equation. Martin A. I.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 310—315 (англ.)

Изучается спектр уравнения

$$\partial^2\varphi(x, y)/\partial x^2 + \partial^2\varphi(x, y)/\partial y^2 + \{\lambda - q(x, y)\}\varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

в полной плоскости (x, y), $q(x, y)$ — непрерывная действительная функция. $G(x, y; \xi, \eta, \lambda)$ — функция Грина уравнения (1) в полной плоскости,

$$H(x, y; \xi, \eta; \mu) = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\mu \operatorname{Im} G(x, y, \xi, \eta, u + i\delta)\, du.$$

Спектром уравнения (1) в полной плоскости называются точки μ действительной оси, не лежащие внутри интервалов постоянства функции $H(\mu)$. Спектр может быть не единственным, если функция Грина не единственна. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Независимо от единственности функции Грина, спектр уравнения (1) в полной плоскости не ограничен сверху.

Теорема 2. Если функция Грина единственная и $q(x, y)$ имеет предел при $x^2 + y^2 \to \infty$, то этот предел является нижним пределом спектра.

Теорема 3. Если функция Грина не единственна, то спектр не ограничен снизу.

Примечание референта. Если функция Грина не единственна, то единственный возможный предел для q может быть — ∞; таким образом этот случай дает результат, аналогичный теореме 2.

А. Л. Крылов

347. О собственных функциях на замкнутых римановых многообразиях. Авакумович (Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Avakumović Vojislav G.), Math. Z., 1956, 65, № 4, 327—334 (нем.)

Пусть V — замкнутое, связное, компактное, произвольное число раз дифференцируемое, N-мерное риманово многообразие, Δ — оператор Бельтрами, λ_n и $\Phi_n(P)$ — собственные числа и функции задачи $(\Delta + \lambda) u = 0$.

Минакшисундарам и Плейель установили (Minakshisundaram S., Pleijel A., Canad. J. Math., 1949, 1, 242—256), что имеют место асимптотические формулы

$$\sum_{\lambda_n \leqslant x} 1 = F C_N x^{N/2} + o(x^{N/2}), \qquad (1)$$

$$\sum_{\lambda_n \leqslant x} \Phi_n^2(P) = C_N x^{N/2} + o(x^{N/2}), \qquad (2)$$

где F — объем V, $C_N = 1/(2\sqrt{\pi})^N \Gamma(N/2 + 1)$.

Ограничиваясь для простоты случаем $N = 3$, автор доказывает, что в (1) и (2) член $o(x^{N/2})$ можно заменить на $O(x^{(N-1)/2})$, причем в (2) оценка члена $O(x^{(N-1)/2})$ не зависит от P.

Оценки автора неулучшаемы, что показано на примере трехмерной сферы в четырехмерном пространстве. Для оператора Лапласа в ограниченной области N-мерного евклидова пространства (2) было известно (Авакумович, Publ. Math. Inst. Math. Acad. Serbe Sci., 1952, 4, 95—96; Б. М. Левитан, РЖМат, 1954, 753). В (1) для этого случая Курантом была установлена менее точная оценка: $O(x^{(N-1)/2} \ln x)$ Курант Р., Гильберт Д., Методы матем. Физики, т. I, М—Л, 1933).

Г. И. Натансон

348. Об отношении двух последовательных собственных значений. Пейн, Пойа, Вейнбергер (Sur le quotient de deux fréquences propres consécutives. Payne L. E., Pólya G., Weinberger H. F.), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 15, 917—919 (франц.)

Пусть $\{\lambda_n\}$ — упорядоченная последовательность собственных значений для задачи: $\Delta u + \lambda u = 0$ внутри области и $u = 0$ на границе. Посредством остроумных элементарных выкладок авторы показывают, что $\lambda_{n+1} \leqslant 3\lambda_n$. Предполагается, что 3 можно заменить на 2.539, что является верным для случая круга.

Аналогично для задач $\Delta^2 u - \lambda u = 0$ и $\Delta^2 u + \lambda \Delta u = 0$ (в обоих случаях на границе имеют место условия $u = u_\nu = 0$) соответственно имеют место неравенства $\lambda_{n+1} \leqslant 9\lambda_n$ и $\lambda_2 < \lambda_1$. G. Szegö

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 372

349. Разложения в ряды неортогональных собственных функций. Дейвис (Expansions in series of non-orthogonal eigenfunctions. Davies Robert), Indust. Math., 4, 9—16 1953 (англ.)

Здесь рассматривается модификация задачи Штурма-Лиувилля, состоящая из дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля и двух граничных условий, которые заключают в себе значения производной функции второго порядка. Дается модификация внутреннего произведения, которая по существу приводит к задаче разложения произвольных функций в ряды неортогональных характеристических (собственных) функций. Характеристические (собственные) функции становятся ортогональными по отношению к модифицированному внутреннему произведению и дается техника написания коэффициентов в разложении. В качестве иллюстрации используется задача определения продольных колебаний стержня с массой, закрепленной на одном конце. Ссылки на литературу даются для объяснения аналитических деталей. R. V. Churchill

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 40.

350. Об n-гармонических функциях. Гермэнеску (Asupra funcţiilor n-armonice. Gheormănescu M.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, 8, № 3, 529—536 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор дает выражение

$$u(x, y) = R\left[z^{n-1}f_n^1(z) + z^{n-2}f_n^2 + \ldots + f_n^n(z)\right] \quad (1)$$

для функции $u(x, y)$, n-гармонической в односвязной области D и непрерывной в $D+C$, где C — граница D, как вещественной части функции

$$F_n(z, \bar{z}) = \bar{z}^{n-1}f_n^1(z) + \bar{z}^{n-2}f_n^2(z) + \ldots + f_n^n(z),$$

определенной автором (Bull. Ecole Polyt. Timişoara, 1929, 2, № 3—4, 3) под названием n-голоморфной функции.

Формула (1) сводится при $n=2$ к формуле Гурса для бигармонических функций. Затем результат применяется к задаче Рикье (Riquier) для области, ограниченной контуром C, решение которой сводится к решению «n» задач Дирихле для этой же области.

Резюме автора

351. О новом типе задач для системы гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Шмидт (Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Szmydt Z.), Bull. Acad. Polon. Sci. 1956, cl. 3, 4, № 2, 67—72 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 2, 63—67

Предположим, что функция $F(x, y, U, P, Q)$, где $F=(f_1, \ldots, f_n)$, $U=(u_1, \ldots, u_n)$, $P=(p_1, \ldots, p_n)$, $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ определены в множестве π: $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $0\leqslant y\leqslant\beta$; $|U|\leqslant r$; $|P|\leqslant r$ $|Q|\leqslant r$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ r>0)$, непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|F(x, y, U, \bar{P}, \bar{Q}) - F(x, y, U, P, Q)| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(y, |P-\bar{P}|, x) + \omega(x, |Q-\bar{Q}|, y),$$

где $\omega(x, v, y)$ — непрерывная функция, не убывающая относительно v, $\omega(x, 0, y)=0$ и уравнения $dv/dx = \pm\omega(x, v, y)$ имеют единственное решение в соответствующих множествах. Предположим, что две непрерывные кривые $y=\gamma(x)$ $(0\leqslant x\leqslant\alpha)$ и $x=\lambda(y)$ $(0\leqslant y\leqslant\beta)$ содержатся в прямоугольнике D, $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $0\leqslant y\leqslant\beta$ и (x_0, y_0) есть точка, принадлежащая D. Пусть $N=\max\limits_{(\pi)}|F|\leqslant\min(r/h, r/2h^2)$, где $h=\max(\alpha, \beta)$.

Предположим, что $a=\min(r-hN, (r-2Nh^2)/(1+2h))$. Допустим далее, что вектор $\mathring{U}$ и непрерывные функции $G(x)$, $H(y)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\mathring{U}|\leqslant a,\ |G(x)|<a,\ |H(y)|<a \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\alpha,$$
$$0\leqslant y\leqslant\beta.$$

При указанных допущениях существует решение $U(x, y)$ системы дифференциальных уравнений

$$U_{xy} = F(x, y, U, P, Q),$$

имеющее непрерывные производные U_x, U_y, U_{xy} в D и удовлетворяющее условиям

$$U(\mathring{x}, \mathring{y}) = \mathring{U} \qquad U_x(x, \gamma(x)) = G(x) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\alpha$$
$$U_y(\lambda(y), y) = H(y) \qquad \text{при } 0\leqslant y\leqslant\beta.$$

Эта теорема включает в себя, в частности, задачи Дарбу, Коши и Пикара. В статье содержатся также варианты и обобщения этой теоремы, но без точных доказательств. В доказательствах используется теорема Шаудера об инвариантной точке. Автор отмечает единственность решения упомянутых задач при более строгих предположениях. A. Pliś

352. Смешанная задача для нормальных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка. Дафф (A mixed problem for normal hyperbolic linear partial differential equations of second order. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 141—160 (англ.)

Пусть $a^{ij}=a^{ji}$, b^i, c, f — k раз непрерывно-дифференцируемые функции $(k\geqslant N+2)$ в некоторой области N-мерного пространства $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ и матрица $\|a^{ij}\|$ имеет 1 отрицательное и $N-1$ положительных собственных чисел. Пусть $\|a_{ij}\|$ означает обратную матрицу для $\|a^{ij}\|$. Для нормального гиперболического уравнения

$$L[u] \equiv a^{ij}\partial^2u/\partial x^i\partial x^j + b^i\partial u/\partial x^i + cu = f$$

ставится смешанная задача: Пусть S $(\varphi(x^i)=0)$ есть пространственноподобная поверхность $\left(a_{ij}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}<0\right)$, T $(\psi(x^i)=0$ — времяподобная поверхность $\left(a_{ij}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}\times\right.$ $\left.\times\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}>0\right)$, пересекающиеся по $N-2$-мерному многообразию C. На поверхности S задаются данные Коши u и du/dn (n — конормаль). На T задается du/dv, где v — векторное поле не касательное к T, причем данные на S и T в точках C удовлетворяют условиям согласования до порядка k. Используя методы аналитической аппроксимации и априорных оценок интегралов от квадратов производных, которыми решена смешанная задача в статье Кшижанского и Шаудера (Krzyżański M., Shauder J., Studia Math., 1936, 6, 162—189), автор решает поставленную задачу при следующем дополнительном предположении о векторном поле v: семейство S_t пространственноподобных поверхностей, заполняющих исследуемую область между S и T, пересекает T по многообразиям C_t, через каждое из которых проводится прямая характеристическая поверхность G_t; поле v в точках T не касательно к G_t.

Рассмотрен также случай, когда число условий согласования меньше k, но коэффициенты уравнения и данные задачи дифференцируемы $2k$ раз.

Х. Л. Смолицкий

353. О «формуле Даламбера» для гиперболической системы второго порядка. Симонов (Про «формулу Даламбера» для гіперболічної системи другого

порядку. Сімонов М. І.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1956, 19, 70—74 (укр., рез. русск.)

Гиперболическая система с постоянными коэффициентами

$$\partial^2 U/\partial t^2 = A\partial^2 U/\partial x^2, \qquad (1)$$

где A — матрица n-го порядка, приводится к виду

$$\partial^2 U\ \partial t^2 = B^2\partial^2 U/\partial x^2, \qquad (1')$$

где B — соответствующая действительная матрица того же порядка. Для этой системы ставится задача Коши

$$U|_{t=0} = F_1(x),\ U'_t|_{t=0} = F_2(x), \qquad (2)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — аналитические. Легко видеть, что при произвольных аналитических $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$V(x,\ t) = \varphi(Ix + Bt) + \psi(Ix - Bt) \qquad (3)$$

дают решение системы (1'). Это позволяет выписать матричную формулу Даламбера, удовлетворив (2). Результат обобщается для системы

$$\partial^2 U/\partial t^2 = \sum_{k=1}^{n} A_k \partial^2 U/\partial x_k^2$$

при начальных условиях вида

$$U|_{t=0} = f_1\left(I\sum_1^n x_k\right),\ U'_t|_{t=0} = f_2\left(I\sum_1^n x_k\right). \qquad (5)$$

В работе имеются опечатки. А. Л. Крылов

354. Некоторые замечания о существовании и единственности решения уравнения гиперболического типа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. **Алексевич, Орлич** (Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Alexiewicz A., Orlicz W.), Studia math., 1956, 15, № 2, 201—215 (англ.)

Авторы рассматривают задачу Дарбу для уравнения

$$\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x,\ y,\ z,\ \partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y), \qquad (1)$$

где функция $f(x, y, z, p, q)$ предполагается непрерывной и ограниченной в области $Q_\infty: a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ -\infty < z,\ p,\ q < +\infty$ и удовлетворяющей условию Липшица относительно p и q на каждом ограниченном подмножестве Q_∞. Первая теорема касается существования в прямоугольнике $R: a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$ решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$z(x,\ c) = \sigma(x),\ z(a,\ y) = \tau(y). \qquad (2)$$

Эта теорема была впервые доказана Хартманом и Винтнером (Hartman Ph., Wintner A., Amer. J. Math., 1952, 74, 834—864). Авторы реферируемой статьи дают элементарное доказательство, аппроксимируя функцию f последовательностью функций f_n, удовлетворяющих условию Липшица относительно z, p и q, используя классическую теорему существования решения $z_n(x, y)$ уравнения (1) с правой частью, равной f_n. Главный пункт доказательства состоит в демонстрации того, что функции $z_n(x, y)$ равностепенно непрерывны вместе со своими первыми производными.

Используя эту теорему, авторы доказывают существование функции, непрерывной в R и удовлетворяющей почти всюду уравнению

$$\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x,\ y,\ z) \qquad (3)$$

и условиям (2), предполагая, что $f(x, y, z)$ ограничена на множестве: $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ -\infty < z < +\infty$, измерима по (x, y) для фиксированного z из некоторого множества, плотного в $(-\infty, +\infty)$, и непрерывна по z для фиксированных (x, y).

В третьей теореме доказывается непрерывная зависимость решения от правой части уравнения (1) и от условий (2).

В четвертой теореме авторы рассматривают метрическое пространство E совокупностей пяти элементов $(\xi,\ \eta,\ \sigma(x),\ \tau(y),\ f(x, y, z, p, q))$, где f удовлетворяет гипотезе первой теоремы и множество S точек E, для которых решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$z(x,\ \eta) = \sigma(x),\ z(\xi,\ y) = \tau(y),$$

не является единственным. Авторы доказывают, что S есть множество первой категории по Бэру в E.

Пятая теорема касается сходимости последовательных приближений

$$z_0(x,\ y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(a),$$

$$z_n(x,\ y) = z_0(x,\ y) + \int_a^x\int_c^y f\left(u,\ v,\ z_{n-1}(u,\ v),\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right) du\,dv$$

в предположении, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), единственно. Основной прием доказательства первой теоремы используется в доказательствах всех остальных теорем. J. Szarski

355. Римановский метод интегрирования: его обобщение с некоторыми применениями. Лэдфорд (Riemann's method of integration: its extensions with an application. Ludford G. S. S.), Collect. Math., 1953, 6, 293—323 (англ.)

В § 1 дается каноническая форма гиперболического дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных. Сопряженный оператор M к оператору $L(w) \equiv w_{rs} + aw_r + bw_s + cw$ определяется как $M(v) \equiv v_{rs} - (av)_r - (bv)_s + cv$ (§ 2). В задаче Коши первого вида величины w и dw/dn задаются на дуге C, которая нигде не касается характеристики. Решение этой задачи дается формулой Римана (§ 3). Это обсуждается в § 4. Следующий, § 5, содержит примеры функции Римана:

$$a = b = (r + s)^{-1},\ \lambda = \text{const.},\ c = 0, \qquad (1)$$

$$a = b = m = \text{const},\ c = 0. \qquad (2)$$

В задаче Коши второго вида значение w задается только на двух сегментах характеристик различных семейств. Решение задачи дается формулой Римана (после некоторых модификаций (§ 6)). В § 7 содержится обобщение метода Римана на тот случай, когда кривая C касается характеристики в некоторой точке. Применение метода Римана является удачным для уравнений одномерной газовой динамики (§§ 8, 9). В §§ 10, 11, 12 рассматривается специальный случай движения в закрытой трубке и делается оценка времени первого случая нарушения движения (пробивания). Наконец, даются некоторые замечания и добавления (§§ 13, 14, 15), касающиеся специально двух общих теорем, использованных Радемахером для проверки фундаментальной формулы Римана. M. Pinl

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 483.

356. Об одном прямом методе изучения гиперболических квазилинейных уравнений с частными производными по двум переменным. Фояш, Гусси, Поенару (Une méthode directe dans l'étude des équations aux dérivées partielles hyperboli-

ques, quasilinéaires en deux variables. Foias Ciprian, Gussi George, Poenaru Valentin), Math. Nachr., 1956, 15, № 2, 89—116 (франц.)

На основании леммы, аналогичной известной лемме Гронуолла, уточняются условия разрешимости и свойства решений задачи Коши

$$\partial u_i/\partial t + \lambda_i(t, x)\,\partial u_i/\partial x = f_i(t, x, u_1, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, \ldots, n),\ u_i(0, x) = \varphi_i(x).$$

Предполагается, что функции λ_i непрерывны и обеспечивают единственность построения характеристики, а функции f_i непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$|f_i(t, x, u_1, \ldots, u_n) - f_i(t, x, v_1, \ldots, v_n)| \leqslant$$
$$\leqslant K(t)\,\omega\left(\sum_k |u_k - v_k|\right),$$

где

$$\int_0^\delta K(t)\,dt < \infty,\ \int_0^\delta \frac{dz}{\omega(z)} = \infty.$$

Начальные функции φ_i считаются непрерывными на некотором отрезке. Тогда в некоторой окрестности этого отрезка доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи (понимаемого как решение соответствующей системы интегральных уравнений), а также непрерывная зависимость его, в смысле равномерного уклонения от φ_i, от λ_i и от f_i. Приводятся условия подобного вида, обеспечивающие существование решения на всей плоскости, ограниченность его и непрерывную зависимость его от начальных функций. Аналогичные результаты имеют место и для системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(t, x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(t, x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_n).$$

Далее рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x)\frac{\partial u_j}{\partial x} =$$
$$= f_i(t, x, u_1, \ldots, u_n)\ (i = 1, \ldots, n),$$

гиперболическая в узком смысле. В предположении, что производные числа функций a_{ij} мажорируются суммируемыми функциями t, а функции f_i удовлетворяют тем же условиям, что и выше, доказывается, что задача Коши не может иметь более одного решения и это решение (если существует) непрерывно зависит от начальных функций. Аналогичные условия гарантируют ограниченность решения на всей плоскости (если оно существует) и непрерывную зависимость его там от начальных функций.

Теоремы подобного типа, весьма близкие к известным, приведены и для начальной задачи для системы обыкновенных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\ (i = 1, \ldots, n).$$

А. Д. Мышкис

357. Некоторые дальнейшие исследования о решениях волнового уравнения, принадлежащих L^2. Мартин (Some further work on L^2-solutions of the wave equation. Martin A. I.) Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 280—286 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1956, 607. Рассматривается решение уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \{\lambda - q(x, y)\}\varphi = 0 \qquad (1)$$

во всей плоскости с непрерывными производными двух первых порядков, принадлежащее L^2. $q(x, y)$ — действительная непрерывная во всей плоскости функция. Пусть $G(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ — функция Грина для уравнения (1) в плоскости; пусть далее

$$H(x, y; \xi, \eta; u) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^u \operatorname{Im} G(x, y; \xi, \eta; u' + i\varepsilon)\,du'.$$

В работе показывается, что в случае неединственности функции Грина, уравнение (1) имеет решения в L^2 для действительных значений λ, которые либо являются точками разрыва функции H (по u), либо лежат внутри ее интервалов постоянства. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть μ (действительное) есть точка разрыва H. Тогда, независимо от единственности функции Грина, уравнение (1) при $\lambda = \mu$ имеет решение в L^2.

Теорема 2. Пусть функция Грина неединственна. Тогда, если μ (действительное) лежит внутри интервала, на котором $H = H(u)$ постоянна, то уравнение (1) при $\lambda = \mu$ имеет решение в L^2.

Теорема 3. Пусть $q(x, y) = q(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и функция Грина неединственна, т. е. для любого комплексного λ уравнение (1) имеет решение $\varphi(x, y) \in L^2$ (РЖМат, 1956, 607). Тогда уравнение (1) имеет решение в L^2 и при любом действительном λ.

А. Л. Крылов

358. О дифференциальном уравнении в частных производных параболического типа с постоянными коэффициентами. Ватанабэ, Накамура (On the partial differential equation of parabolic type with constant coefficients. Watanabe Yoshikatsu, Nakamura Mikio), J. Gakugei, Tokushima Univ. (Nat. Sci.), 1954, 4, 39—44. (англ.)

Решение $\nu = \nu(t, \xi)$ параболического уравнения

$$\nu_{tt} + 2h\nu_\xi + \nu = 0,$$

удовлетворяющее условиям $\nu(0, \xi) = f(\xi)$, $\nu_t(0, \xi) = g(\xi)$, соответствует при $\varepsilon \to 0$ решению аналогичной задачи для гиперболического уравнения

$$\nu_{tt} - \varepsilon^2\nu_{\xi\xi} + 2h\nu + \nu = 0,$$

где h, ε — постоянные, а функции f, g разлагаются в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi = 0$.

F. G. Dressel

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 9, 799

359. Дифференциальные неравенства параболического типа. Млак (Differential inequalities of parabolic type. Mlak W.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 349—354 (англ.)

Обозначения и определения: G — открытая область в m-мерном евклидовом пространстве $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $B = G \times (0, T>$ — гипоцилиндр «над G» в пространстве (x, t); Γ — граница области G, $C = \Gamma \times (0, T>$; $\bar{B}$ — замыкание B. $F(x_1, \ldots, x_m, t, u_1, \ldots, u_n, q_1, \ldots, q_m, p_{11} \ldots p_{mm}) = F(x, t, u, q_i, p_{ik})$. $F(x, t, u, q_i, p_{ik})$ называется эллиптической функцией относительно p_{ik}, если для любых $\bar{r}_{ik}$, $\tilde{r}_{ik}$, удовлетворяющих неравенству $\sum(\bar{r}_{ik} - \tilde{r}_{ik})\xi_i\xi_k \geqslant 0$ для всех ξ, следует неравенство $F(x, t, u, q_i, \bar{r}_{ik}) \geqslant F(x, t, u, q_i, \tilde{r}_{ik})$. Система $\partial u_s/\partial t = F_s(x, t, u_1 \ldots u_n, \partial u_s/\partial x_i, \partial^2 u_s/\partial x_i\partial x_k)$, $s = 1, \ldots, n$, называется параболической, если все F_s эллиптичны относительно $\partial^2 u_s/\partial x_i\partial x_k$. Будем говорить, что система функций $H_s(z_1, \ldots, z_r, \tau)$ $(s = 1, \ldots$

$\ldots, r$) удовлетворяет условию (w) относительно $z_1, \ldots, z_r$, если для всех $s\,(s=1, \ldots, n)$, $\bar{u}_i \leqslant \bar{u}_i$ $(i \neq s)$ и $\bar{u}_s = \bar{u}_s$ имеет место $H_s(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r, \tau) \leqslant H_s(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r, \tau)$ $(s=1, \ldots, n)$.

Теорема 1. Пусть $F_s(x, t, u, q_i, p_{ik})$ $(s=1, \ldots, n)$ эллиптичны относительно p_{ik} и удовлетворяют условию (w) относительно $u_1, \ldots, u_n$. Пусть, далее $u_1(x, t) \ldots u_n(x, t)$ и $v_1(x, t) \ldots v_n(x, t) - 2$ вектор-функции, непрерывные в $\bar{B}$, дважды непрерывно дифференцируемые по x в B и такие, что во всех точках $P=(x, t) \in B$, для которых $u_s(P) = v_s(P)$, существуют $(\partial u_s/\partial t)_P$ и $(\partial v_s/\partial t)_P$ и удовлетворяют неравенствам

$$(\alpha)\ (\partial u_s/\partial t)_P \leqslant F_s(x, t, u_1, \ldots, u_n, \partial u_s/\partial x_i, \partial^2 u_s/\partial x_i \partial x_j)_P$$

$$(\beta)\ (\partial v_s/\partial t)_P > F_s(x, t, v_1, \ldots, v_n, \partial v_s/\partial x_i, \partial^2 v_s/\partial x_i \partial x_j)_P$$

$$(s=1, \ldots, n)$$

Тогда из $u_\nu(x, t) < v_\nu(x, t)$ на $\bar{G} + C$ следует $u_\nu(x, t) < v_\nu(x, t)$ во всей B $(\nu=1, \ldots, n)$.

Будем говорить, что имеет место условие (A), если для любой $\bar{x} \in \Gamma$ и $\nu=1, \ldots, n$ существует прямая l_ν такая, что отрезок $(\bar{x}_\nu, \bar{\bar{x}}_\nu)$ на l_ν лежит в G и производные du_ν/dl и dv_ν/dl в точке $\bar{x}$ существуют.

Теорема 2. Пусть $F(x, t, u, q_i, p_{ik})$, u_ν и v_ν удовлетворяют всем условиям теоремы (1), кроме неравенств (α) и (β), вместо которых предполагаются выполненными условие (A) и неравенства

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha')\ du_\nu/dl \leqslant \varphi_\nu(x, t, u_1, \ldots, u_n) \\ (\beta')\ dv_\nu/dl > \varphi_\nu(x, t, v_1, \ldots, v_n)\end{array}\right\}\ \nu=1, \ldots, n,$$

где функции $\varphi_\nu(x, t, z_1 \ldots z_n)$ удовлетворяют условию (w) относительно $z_1, \ldots, z_n$. Тогда из неравенства $u_\nu(x, 0) < v_\nu(x, 0)$ следует $u_\nu(x, t) < v_\nu(x, t)$ в B $(\nu=1, \ldots, n)$.

А. Л. Крылов

360. Замечания о проблеме устойчивости для параболических уравнений. Млак (Remarks on the stability problem for parabolic equations. Mlak W.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 343—348 (англ.)

Обозначения и определения см. реф. 359. Решение параболической системы

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = F_s(x, t, z_1 \ldots z_n, \partial z_s/\partial x_i, \partial^2 z_s/\partial x_i \partial x_k)$$

$$(s=1, \ldots, n), \qquad (1)$$

$u=(u_1, \ldots, u_n)$ называется устойчивым, если для любого ε существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $v=(v_1, \ldots, v_n)$ уравнения (1) такого, что $u_i(x, t) = v_i(x, t)$ для $(x, t) \in \Gamma \times (-\infty < 0, \infty)$ $(i=1, \ldots, n)$ и $|u_i(x, 0) - v_i(x, 0)| < \delta$ $(i=1, \ldots, n)$, имеет место $|u_i(x, t) - v_i(x, t)| < \varepsilon$ для $(x, t) \in B$ $(i=1, \ldots, n)$.

Часть 1 основывается на оценках работы, примененных к системам вида

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = L_s[z_s] + f_s(x, t, z_1 \ldots z_n),\ s=1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где

$$L_s[v] = \sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}^s(x)\, \partial^2 v/\partial x_i \partial x_k;\ \sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k > 0.$$

Пусть $\bar{u}=(\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n)$ и $\bar{\bar{u}}=(\bar{\bar{u}}_1 \ldots \bar{\bar{u}}_n)$ — решения системы (2), совпадающие на $\Gamma \times (-\infty < 0, \infty)$, и пусть $\sigma_s(x_1 t, u_1 \ldots u_n) \geqslant 0$ — функции, определенные для $x \in G$, $t > 0$ и $u_i > 0$.

Теорема 1. Пусть $\sigma_s(x_1, t, u_1 \ldots u_n)$ удовлетворяют условию (W) относительно $u_1 \ldots u_n$. Тогда если
1) $|f_s(x, t, \bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n) - f_s(x, t, \bar{\bar{v}}_1 \ldots \bar{\bar{v}}_n)| < \sigma_s(x, t, |\bar{v}_1 - \bar{\bar{v}}_1|, \ldots, |\bar{v}_n - \bar{\bar{v}}_n|)$, $s=1, \ldots, n$;
2) $z_s(x, t)$ непрерывны в $\bar{B}$ с непрерывными производными $\partial^2 z_s/\partial x_i \partial x_k$ в B и $z > 0$ в $\bar{B}$;
3) удовлетворяются неравенства

$$L_s[z_s] + \sigma_s(x, t, z_1 \ldots z_n) < \partial z_s/\partial t\ \ (s=1, \ldots, n) \qquad (3)$$

$$|\bar{u}_s(x, 0) - \bar{\bar{u}}_s(x, 0)| < z_s(x, 0)\ (s=1, \ldots, n),$$

то имеет место неравенство

$$|\bar{u}_s(x, t) - \bar{\bar{u}}_s(x, t)| < z_s(x, t)\ (s=1, \ldots, n)$$

$$(x, t) \in \bar{B}.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 предыдущего реферата. Приведены примеры нахождения функций σ_s и z_s.

Часть II относится к существенно нелинейным системам вида (1).

Рассматривается наряду с системой (1) система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_i' = \sigma_i(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad (4)$$

где σ_i непрерывны для $t \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ и удовлетворяют условию (W).

Обозначим через $\omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ правильный общий интеграл (4), удовлетворяющий условиям $\omega_i(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \varepsilon_i \geqslant 0$. Тогда имеет место

Теорема 2. Пусть $(\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n)$ и $(u_1 \ldots u_n)$ — решения (1) и предположим, что

$$|F_s(x, t, \bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n, q_i\ p_{ik}) -$$

$$- F_s(x, t, v_1 \ldots v_n, q_i, p_{ik})| \leqslant \sigma_s(t, |\bar{v}_1 - v|, \ldots$$

$$\ldots, |\bar{v}_n - v|). \qquad (5)$$

Тогда если

$$|\bar{u}_i(x, 0) - u_i(x, 0)| \leqslant \varepsilon_i\ (i=1, \ldots, n),\ x \in G,$$

$$|\bar{u}_i(x, t) - u_i(x, t)| \leqslant \varepsilon_i\ (i=1, \ldots, n)$$

$$(x, t) \in \Gamma \times (-\infty < 0, \infty),$$

то для всех $(x, t) \in B$ имеет место

$$|\bar{u}_i(x, t) - u_i(x, t)| \leqslant \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).$$

Введены определения:
Пусть ω_i таковы, что из $\omega_i(0) = 0$ следует $\omega(t) \equiv 0$. В этом случае будем говорить, что $\omega_i(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову (L-устойчиво), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого решения $\omega_i(t)$ уравнения (4) такого, что $|\omega_i(0)| < \delta$, имеет место $|\omega_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t > 0$

Решение $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ уравнения (1) устойчиво в расширенном смысле, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого решения $(u_1, \ldots, u_n)$ уравнения (1) такого, что

$$|\bar{u}_i(x, 0) - u_i(x, 0)| < \delta\ (i=1, \ldots, n),\ x \in G,$$

$$|\bar{u}_i(x, t) - u_i(x, t)| < \delta\ (i=1, \ldots, n),$$

$$(x, t) \in \Gamma \times (0, \infty),$$

имеет место

$$|\bar{u}_i(x, t) - u_i(x, t) < \varepsilon\ (i=1, \ldots, n),\ (x, t) \in \bar{B}.$$

Теорема 3. Пусть $\omega_i(t) \equiv 0$ — L-устойчивое решение (4) и пусть имеет место неравенство (5). Тогда

любое решение системы (1) устойчиво в расширенном смысле.

А. К. Крылов

361. Об асимптотическом поведении решений уравнения параболического типа. Кшижанский (Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique. Krzyżański M.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, cl. 3, 4, № 5, 247—251 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 5, 243—247

Пусть дано уравнение параболического типа

$$L[u] = a(x, t)\, u''_{xx} + b(x, t)\, u'_x + c(x, t)\, u - u'_t = f(x),$$

с коэффициентами, непрерывными внутри полуполосы $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$. В настоящей заметке исследуется асимптотическое поведение решения $u(x, t)$ при $t \to \infty$, в зависимости от поведения его граничных значений $u(0, t)$ и $u(1, t)$.

Автор доказывает следующее:

1. В случае однородного уравнения ($f = 0$), если $u(0, t)_{t\to\infty} \to 0$ и $u(1, t)_{t\to\infty} \to 0$, тогда $u(x, t)_{t\to\infty} \to 0$ равномерно для x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, если только коэффициенты удовлетворяют неравенствам $a(x, t) \geqslant a_0 > 0$, $b(x, t) \leqslant b_0 < \infty$, $c(x, t) \leqslant 0$, где a_0 и b_0 — константы; более общее достаточно предположить, что существует функция $V(x, t)$, удовлетворяющая неравенствам: $V > 0$, $L[V] \leqslant 0$ и такая, что $\lim_{t\to\infty} V(x, t) = 0$ равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. В случае неоднородного уравнения с коэффициентами, не зависящими от t, непрерывными и удовлетворяющими неравенствам: $a(x) > 0$, $c(x) \leqslant 0$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, если $u(0, t)_{t\to\infty} \to l_0$ и $u(1, t)_{t\to\infty} \to l_1$, тогда $u(x, t)_{t\to\infty} \to w(x)$ равномерно по x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $w(x)$ — решение уравнения $aw'' + bw' + cw = f$ такое, что $w(0) = l_0$, $w(1) = l_1$.

В статье указывается также метод перенесения этих результатов на случай нелинейного уравнения.

S. Łojasiewicz

362. О регулярных и параболических системах дифференциальных уравнений в частных производных. Эйдельман С. Д., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 254—257

Обозначения и определения те же, что и в РЖМат, 1955, 3291.

1. Теорема 1. Если

$$|Q(t, t_0, s)| \leqslant C_1 e^{|s|^{p_0} f(t, t_0)} [1 + |s|]^q,$$

$$0 \leqslant t_0 \leqslant t < T, \quad f(t_0, t_0) = 0,$$

$f(t, t_0)$ — неотрицательная непрерывная на $(0, T)$ функция t, то функционал $v(x, t)$ над $S^{\beta Ae^\beta}_{\alpha A}$, $\beta = 1/p_0$, $\alpha = 1/p'_0$ удовлетворяющий системе

$$\frac{du}{dt} = P\left(t, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) u, \quad u|_{t=t_0} = 0,$$

является нулевым функционалом над $S^{\beta B}_{\alpha A}$.

Следствие. В предположениях теоремы 1 решение задачи Коши для системы (1) единственно в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant C_2 e^{k|x|^{p'_0}}$$

Для систем, параболических по Петровскому,

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0 2b + \Sigma k_s \leqslant n_j 2b} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)}(t) \times \times \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} u_{nj}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Настоящая теорема дает ранее полученную теорему единственности Эйдельмана.

2. Далее приводится класс систем с коэффициентами, зависящими от t, не параболических, не гиперболических, но регулярных, к которым приводит ряд задач механики сплошных сред, а именно системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(t, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) u\right) = R\left(t, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) u,$$

где $\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(t, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ — параболическая в смысле Петровского система, $p_0 = p = 2b$, $R\left(t, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — полиномиальный дифференциальный оператор порядка не выше $2b$ с непрерывными коэффициентами.

3. Изучается вопрос об аналитичности решений системы (1) по пространственным координатам.

Теорема 2. Если $|Q(t, t_0, \sigma)| \leqslant C_1 e^{-\delta|\sigma_1|(t-t_0)} \times \times [1 + |\sigma|]^q$, то любое регулярное решение $u(x, t)$ системы (1), $t_0 < t \leqslant T$, входящее в класс единственности, $u(x, t_0)$ имеет $(p+q)(n+3) + q^*(p+q-1)$ производных по $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $|D^\Gamma u(x, t_0)| \leqslant C_\Gamma [1 + |x|]^{q^*}$, является аналитической вектор-функцией x при $t > t_0$.

Если же $|Q(t, t_0, s)| \leqslant C_1 e^{-\delta|\sigma_1|(t-t_0) + F|\tau|^{p_0}} (1 + |s|)^q$, то любое решение системы (1), имеющее $q + n + p + 2$ производных, удовлетворяющих условию $|D^\Gamma u(x, t_0)| \leqslant C_\Gamma e^{\varepsilon|x|^{p'_0}}$ есть аналитическая функция x при $t > t_0$.

С другой стороны, справедлива Теорема 3. Если существуют вещественные $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ($\sigma_1 \neq 0$) такие, что уравнение

$$\det\left\{\left\|\sum_{k_0 p + \Sigma k_s = n_j p} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} \lambda^{k_0} (i\sigma_1)^{k_1} \ldots (i\sigma_n)^{k_n}\right\| - \left\|\begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix}\right\|\right\} = 0$$

имеет чисто мнимый корень, то система

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0 p + \Sigma k_s = n_j p} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} \times \times \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

имеет решения, имеющие непрерывные производные любого фиксированного порядка по $x_1 \ldots x_n$, t неаналитические по x_1.

При $p = 1$ теорема (3) превращается в теорему Петровского.

Доказательство теорем проводится при помощи теорем двойственности и теоремы Фрагмена-Линделефа.

А. Л. Крылов

363. Параболические системы дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени. Браудер (Parabolic systems of differential equations with time-dependent coefficients. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 12, 914—917 (англ.)

Обозначения: G_t — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве E^n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $A(t)$ и $B(t)$ — дифференциальные операторы порядков $2m$ и $2s$ соответственно ($2s \leqslant 2m-2$), действующие в пространстве r вектор-функций $u=(u_1, \ldots, u_r)$, определенных в G_t. $A(t)$ — сильно эллиптический для всех t, $B(t)$ — самосопряженный.

1. Для уравнения

$$\partial(B(t)u)/\partial t + (-1)^m A(t)u = \zeta$$

устанавливаются необходимые и достаточные условия существования слабого решения, удовлетворяющего нулевому граничному условию на почти всех G_t. В частности, имеет место

Теорема 1. Если B — положительно определенный на $C_c^{\infty, r}(G)$, т. е. $B(\varphi, \varphi) \geqslant c_0(\varphi, \varphi)$, то уравнение (1) имеет слабое решение при любой ζ. Это же имеет место при B отрицательно определенном.

($C_c^{\infty r}(G)$ — пространство «основных» r-вектор-функций, с помощью которого определяется слабое решение — бесконечно дифференцируемых, с компактным носителем в

$$G = \cup(\{t\} \times G_t)).$$

Здесь

$$\{A(t)u\}_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} D_x^{\beta}\left(a_{\alpha\beta ij} D_x^{\alpha} u_j\right),\quad i=1, \ldots, r.$$

$$\{B(t)u\}_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant s} D_x^{\beta}\left(b_{\alpha\beta ij} D_x^{\alpha} u_j\right),\quad i=1, \ldots, r,$$

и коэффициенты $a_{\alpha\beta ij}$ равномерно непрерывны, а $b_{\alpha\beta ij}$ и $\partial b_{\alpha\beta ij}/\partial t$ — равномерно ограниченные функции в каждой конечной подобласти G.

2. Теорема 2. Слабое решение уравнения

$$\partial u/\partial t + (-1)^k A(t)u = \zeta$$

регулярно, т. е., если $D_x^{\xi} a_{\alpha\beta ij} \in C^0(G)$ для $|\xi| \leqslant s$ и если $D_{x^{\xi}}^{\xi\zeta} \in L^{2, r}(G_1)$ для $|\xi| \leqslant s-m$ для любого компакта $G_1 \subset G$, то

$$D_x^{\xi} u \in L^{2, r}(G_1) \quad \text{для} \quad |\xi| \leqslant s+m$$

и при этом имеет место

$$\|pu\|_{m+s}^2 \leqslant C_s' \|p\zeta\|_s^2 + k_s' \|p_1 u\|_0^2,$$

где p, $p_1 \in C_c^{\infty}(G)$. Если $m+s > [n/2]+L$, то при почти всех t $u(x, t) = u_1(x)_t \in C^L(G_t)$.

Теорема 3. Слабое решение уравнения (2) принадлежит $C^{j, r}(G)$ для любого j, если ζ и A имеют достаточное число производных (зависящее от j).

3. При $k=m$ для уравнения (2) доказывается следующая

Теорема 4. Существует одно и только одно решение уравнения

$$-\left(u, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + (-1)^k [u, \varphi]_{\Delta} = (\zeta, \varphi)$$

с данными начальными условиями $\varphi \in L^{2, r}(G_0)$.

Эта теорема, кроме предыдущих требований, предполагает достаточную гладкость области.

А. Л. Крылов

364. Итерированное уравнение теплопроводности. Николеску (Ecuaţia iterată a căldurii. Nicolescu Miron), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 3—4, 243—332 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор изучает регулярное решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ уравнения в частных производных:

$$\Box^p u = 0 \quad \left(\Box = \Delta - \partial/\partial t; \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right), \qquad (1)$$

которое он называет поликалорической функцией порядка p, тогда как регулярное решение уравнения теплопроводности автор называет калорической функцией. Некоторые из полученных результатов были сообщены во время лекций по уравнению теплопроводности в Бухарестском университете, другие доложены на ученом заседании Математического института Академии наук РНР. Работа делится на шесть глав; в первой главе рассматривается случай двух пространственных переменных, тогда как в последующих — случай одной переменной. В гл. 1 показано, что поликалорическая функция порядка p в области D может быть единственным образом разложена в ряд вида:

$$u = u_0 + (t-t_0)u_1 + (t-t_0)^2 u_2 + \cdots + (t-t_0)^{p-1} u_{p-1},$$

где $u_0, u_1, \ldots u_{p-1}$ — калорические функции в области D. Эта формула часто используется в последующих главах. Результаты автора остаются справедливыми без какой-либо модификации и в случае n переменных. Показано затем, что поликалорическая порядка p функция $u(x, y, t)$ бесконечно дифференцируема в области D, аналитическая по отношению к (x, y) и 2-го класса (в смысле Голмгрена) относительно t. Во второй главе дано обобщение формулы Пуассона для калорических функций на поликалорическую функцию: если функция $\varphi_k(x)$ удовлетворяет следующим условиям: а) $\varphi_k(x)$ — определены в классе дифференцируемости $C^{2(p-k+1)}$, б) существуют две положительные константы M и K, такие, что $\left|\varphi_k^{(i)}(x)\right| < Me^{Kx^2}$, то тогда существует поликалорическая функция порядка p в интервале $(0, 1/4K)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x) \quad (k=0, 1, \ldots, p-1).$$

В третьей главе дано другое обобщение формулы Пуассона на поликалорическую функцию: пусть даны функции $f_k(x)$ непрерывные на всей положительной оси и удовлетворяющие условию $|f_k(x)| < Me^{kx^2}$ ($k=0, 1, \ldots, p-1$), тогда существует поликалорическая порядка p в полосе $(0, 1/4K)$ функция $u(x, t)$, которая удовлетворяет условию $\lim_{t \to \infty} \Box^k u(x, t) = f_k(x)$ ($k=0, 1, \ldots, p-1$). Решение этой задачи представляется в виде достаточно простой формулы. Предыдущие результаты распространяются на случай бесконечно дифференцируемой функции, для которой автор вводит понятие параболической аналитичности (или поликалоричности порядка ∞). Тогда функция $u(x, t)$, определенная в полосе $(0, 1/4K)$, раскладывается в ряд $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} u_n(x, t)$, где $u_n(x, t)$ — калорические функции, удовлетворяющие неравенству $|u_n(x, t)| < Me^{Kx^2}$. Показано, что аналитическую параболическую функцию можно представить при помощи

простых форм описанного выше ряда. Гл. 4 посвящена граничным задачам для ограниченных областей. Исследуется основная «бикалорическая задача», состоящая в определении функции $u(x, t)$ второго порядка (бикалорической) в области D, ограниченной кривыми $(\Gamma_1)\ x=\gamma_1(t)$; $(\Gamma_2)\ x=\gamma_2(t)$; $\gamma_1(t)<\gamma_2(t)$ и прямыми $t=0$, $t=T$, функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ удовлетворяют в $(0, T)$ условиям Липшица, причем функция $u(x, t)$ должна удовлетворять начальным условиям $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u'_t(x, 0)=\psi(x)$ и граничным условиям $u(x, t)=f_1(t)$; $u'_x(x, t)=g_1(t)$ для Γ_1, $u(x, t)=f_2(t)$; $u'_x(x, t)=g_2(t)$ для Γ_2.

При помощи частной бикалорической функции, которую автор назвал бикалорическим потенциалом, предыдущая задача сводится к решению системы четырех интегральных уравнений типа Вольтерра, что приводит к выводу, что решение существует и это решение единственно. Благодаря удобной символической форме (Moisil, Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale, Editura Academiei R. P. R., 1950) автор дал симметричное выражение формулы Грина для оператора $\mathcal{A}$ и сопряженного ему оператора $\mathcal{V}$, а затем распространил эти формулы на операторы $\mathcal{A}^p$ и $\mathcal{V}^p$. После того как стало очевидным, что можно ввести функцию Грина для уравнения теплопроводности, вводится функция Грина и решается следующая задача: найти решение уравнения $\mathcal{A}^p u(x, t)=f(x, t)$, в котором $u(x, t)$, $f(x, t)$ и $\mathcal{A}^i u(x, t)$ непрерывны в области D и их значения известны на кривых Γ_1, Γ_2 и прямой $t=0$, ограничивающих область D. Показано, что решение этой задачи единственно. В гл. 5 изучается интеграл $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u(\xi, t-h)}{\sqrt{h}}\,d\xi$, определенные свойства которого устанавливаются только в том случае, когда u аналитична в полосе $(0, t_1)$ или удовлетворяет определенным условиям. Глава шестая посвящена изучению свойств поликалорических функций, и результаты ее основаны на теореме о среднем. Автор распространяет на поликалорические функции теорему Лиувилля и теорему Харнака и исследует систему поликалорических функций, нормальных в смысле Поля Монтеля. В заключение вводится понятие субкалорической функции. Для случая субкалорической функции первого порядка автор исследует связь между его определением и определением профессора Петровского. Показано, что на субкалорические функции можно распространить теорему Рисса.

I. P. Elianu

365. Изучение поведения решения уравнения теплопроводности для больших значений времени. Зерагия П., Тр. Тбилисск. ун-та, 1956, **60**, 19—34 (рез. груз.)

Рассматривается вторая смешанная краевая задача для параболического уравнения

$$\sum_{i,\,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=$$

$$=R(x)\frac{\partial u}{\partial t}\ (0\leqslant t<\infty;\ x=(x_1, x_2, x_3)\in D\cup S);$$

$$u(x, 0)=0\ (x\in D),\quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}+H(x)u\right]_{x\in S}=$$

$$=f(x, t)\ (0\leqslant t<\infty;\ H>0)$$

в трехмерной конечной области D с достаточно гладкой границей S; здесь ν — направление конормали. Предполагается, что коэффициенты $a_{i,j}$ имеют (в замкнутой области) вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера, коэффициенты R и H непрерывны, а функция f имеет предел при $t\to\infty$, удовлетворяет условиям согласования при $t=0$ и обладает непрерывными производными по t до 3-го порядка включительно. Доказывается существование и единственность решения (понимаемого в обычном смысле) этой задачи, а также асимптотическое приближение его при $t\to\infty$ к решению предельной задачи для соответствующего эллиптического уравнения. При доказательстве применяется фундаментальное решение этого последнего уравнения, построенное В. Штернбергом (Sternberg W., Math. Z., 1921, **21**, 286—311). С помощью фундаментального решения строится функция Грина для этого уравнения, после чего решение исходной задачи разлагается в ряд по собственным функциям.

А. Д. Мышкис

366. О единственности решения задачи Фурье для параболических систем. Эйдельман (Про єдиність рішення задачі Фур'є для параболічних систем. Ейдельман С. Д.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-ту, 1956, **19**, 83—87 (укр.; рез. русск.)

Теорема А. Н. Тихонова (Матем. сб., 1935, **42**, вып. 2, 195—216) о единственности решения задачи Фурье для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций обобщается на системы вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\ (k=1, 2, \ldots, n)$$

с постоянными коэффициентами a_{kj}. При этом предполагается, что вещественные части характеристических чисел матрицы $\|a_{kj}\|$ отличны от нуля.

Отмечается, что теорема А. Н. Тихонова есть простое следствие теоремы Лиувилля, справедливой для решений уравнения теплопроводности. Имеются опечатки.

Л. Н. Слободецкий

367. О некоторых свойствах решений параболических систем вида $L^qU=0$. Эйдельман (Про деякі властивості рішень параболічних систем виду $L^qU=0$. Ейдельман С. Д.), Наук. Зап. Чернівецьк. ун-ту, 1956, **19**, 88—96 (укр.; рез. русск.)

Устанавливаются некоторые свойства решений параболической системы

$$L^qU=0, \tag{1}$$

где

$$L=\left\|\sum_{(k)}A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right\|_{i,\,j=1,\,2,\ldots,\,N}-\frac{\partial}{\partial t}E$$

— матричный параболический оператор, $U=(U_1, \ldots, U_N)$ — вектор-функция и q — натуральное число. В частности, доказывается следующее предложение, являющееся распространением на решения системы (1) теоремы Лиувилля.

Теорема. Если система $LU=0$ удовлетворяет условию (Л) (об условии (Л) см. Эйдельман, РЖМат, 1954, 2583), то любое регулярное решение системы (1), для которой вектор-функции L^sU $(s=0, 1, \ldots, q-1)$ ограничены, есть постоянный вектор. Имеются опечатки.

Л. Н. Слободецкий

368 К. Колебательные движения. Т. 2. Хаг (Les mouvements vibratoires. Tome 2. Haag Jules. Presses Universitaires de France, Paris, 1955, viii, 253 pp. 1600 francs) (франц.)

Первый том этой работы см. Les mouvements vibratoires Presses Universitaires de France, Paris, 1952, 268 pp., 1600 fr. В то время как 1-й том касался систем вибраций, имеющих одну степень свободы, настоящий том имеет дело с вибрационными системами, имеющими

несколько степеней свободы. В большинстве случаев рассматриваются линейные системы. Имеются главы, посвященные обобщениям, касающимся колебаний линейных систем с n степенями свободы, задачам, касающимся устойчивости, теории волновых фильтров. В дополнении имеются очень интересные главы, касающиеся различных колебательных движений автомобиля, велосипеда и трехколесного велосипеда и гироскопа. Четыре главы, посвященные другим различным темам, в том числе две, посвященные проблеме синхронизации, завершают книгу.

В некоторых местах методы и стиль делают изложение автора излишне трудным. Так, в главе о волновых фильтрах многие результаты, которые обычно получаются совершенно непосредственно и элементарным способом, здесь получены усложненным алгебраическим методом, который отнюдь нелегко понимается. Кроме того, в главах, имеющих дело с автомобилем, велосипедом и трехколесным велосипедом, чрезмерно краткие объяснения о физических предпосылках даны в не вполне адекватных задачах, что делает чтение затруднительным. Однако, несмотря на эти дефекты, книгу следует усиленно рекомендовать как содержащую большое количество важных и интересных теорий, изложенных вполне компетентно. L. A. MacColl

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 153.

369 Д. О полноте системы собственных и присоединенных функций некоторых классов несамосопряженных уравнений. Аллахвердиев Дж. Э. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Баку, 1957.

370 Д. Новые пространства основных и обобщенных функций и задача Коши для некоторых операторных уравнений. Гуревич Б. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1957

371 Д. О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Борок В. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

372 Д. Точное решение краевых задач для уравнения типа Чаплыгина. Баранцев Р. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1957

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

373. К вопросу о классификации соударений в обобщенной задаче трех тел. Склянский А. Л., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 1, 66—81 (рез. франц.)

В обобщенной задаче трех тел, притягивающихся или отталкивающихся по логарифмическому закону, или с силами, равными по модулю

$$m_i m_j |f(r_{ij})| \qquad (1)$$

где $f(r)$ — голоморфна около всякого действительного положительного r, но может иметь особенности при $r=0$ и $r=\infty$, m_i, m_j — массы точек, r_{ij} их взаимные расстояния, причем

$$\lim_{r\to+0} r^{2k+1} f(r) = -2k < 0$$

рассматривается поведение расстояния третьего числа вблизи момента соударения двух других. Доказывается следующее утверждение:

В обобщенной задаче трех тел, взаимодействующих по закону (1), всякое парное соударение происходит в неизменяемой плоскости в том случае, если $f(r)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\lim_{r\to+0} r^{2k+1} f(r) = D, \qquad \lim_{r\to+0} f(r)/\ln r = E,$$

где D и E — постоянные, а $k<1$. При $k>1$ теорема не имеет места. При этом расстояние третьего тела до неизменяемой плоскости имеет порядок $(t_1-t)^{(4+2k)/(k+1)}$, где t_1 — момент соударения.

Г. А. Мерман

374. О применении метода гармонической линеаризации к исследованию качества переходных процессов в нелинейных автоматических системах. Попов Е. П., Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т. 2. М., АН СССР, 1957, 81—85

375. Состояние и задачи развития теории устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Летов А. М., Лурье А. И. Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Т. 2. М., АН СССР, 1957, 26—43. Дискус., 43—48

376. Разделение области устойчивости в плоскости двух коэффициентов характеристического уравнения на подобласти, соответствующие возможным сочетаниям действительных и комплексных корней. Бауман В. А., Викторов Б. В. В сб.: Элементы теории и расчета гироскопических и навигационных приборов (МВТУ, 48). М., Оборонгиз, 1955, 124—134

Изучается разбиение плоскости на области с постоянным числом действительных корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами при условии, что все коэффициенты уравнения, кроме двух, фиксированы. Авторы в сноске указывают, что во время подготовки статьи к печати вышла в свет книга Б. В. Булгакова «Колебания», в которой дано решение этого вопроса в более общем виде.

М. А. Наймарк

377. О некоторых применениях теории устойчивости Ляпунова в электротехнике. Ворел (O některých aplikacích Ljapunovovy theorie stability v elektrotechnice. Vorel Zdeněk), Apl. mat., 1956, 1, № 1, 59—78 (чешск.; рез. русск., англ.)

Изложены основы так называемого второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения и даны оценки области асимптотической устойчивости для некоторых электрических машин. J. Kurzweil

378. Некоторые вопросы колебания и устойчивости упруго лежащих роторов. Тондл (Některé otázky kmitání a stability odpružených rotorů. Tondl Aleš), Rozpr. Českosl. akad. věd. 1955, TV 65, 23—78 (чешск.; рез. русск., англ., нем.)

Работа примыкает тесно к работам Гурина и Дименберга. Гурин изучал устойчивость упруго лежащего ротора в общем случае с одним диском на неимеющем массы жестком вале без учета затухания, в то время как автор реферируемой статьи в первой главе учитывает упругость вала. Во второй главе рассматривается общий случай несимметрического ротора, уложенного в упруго лежащей раме, в то время как Дименберг исследовал случай симметрического ротора в симметрической упруго лежащей раме.

В третьей главе переносится решение из первой главы на роторы с несколькими дисками, но пренебрегается гироскопическим воздействием. Во всех трех главах вопрос об устойчивости движения решался по методу Рауса.

В четвертой главе рассматривается случай симметрического упруго лежащего ротора с одним диском, причем принимается во внимание и затухание. В пятой главе изучается симметрический упруго лежащий ротор с одним диском и неодинаковой жесткостью вала.

В этих пяти главах решение сводилось к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В главе шестой расширяется предыдущий случай учетом неодинаковой жесткости

опор; дело сводится к системе двух дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Приводится новый метод определения области неустойчивости для такой системы уравнений. Z. Vorel

379. **Влияние отклонения осей шипов от оси подшипников на движение и устойчивость роторов.** Тондл (Vliv odklonu os čepů od osy ložisek na pohyb a stabilitu roturů. Tondl Aleš), Aplikace mat., 1956, 1, № 2, 85—102 (чешск; рез. русск., англ.)

Статья разделена на две главы. В первой из них автор изучает влияние скользящих опор при геометрическом искривлении вала на движение ротора, но предполагает, что неуравновешенность, возникающая в результате этого искривления, компенсируется совершенной уравновешенностью ротора. Все это сводится к исследованию уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + \varphi(\omega t)] x = 0,$$

где $\varphi(\omega t)$ — периодическая функция времени, ω_0 — постоянная. На основании качественного анализа и теорем Гаупта можно утверждать, как оказалось, что разрушения могут возникать лишь для $2/n$-кратных ($n = 1, 2, 3, \ldots$) критических оборотов. Однако уже при $n = 3, 5, 6\ldots$ можно этими разрушениями пренебречь. Затем выводится достаточное условие для устойчивости, которое имеет вид

$$\frac{\delta}{\omega_0} > \frac{3}{8}\frac{L}{l_0},$$

где δ — коэффициент относительного внешнего затухания, ω_0 — критические обороты вала, L — ширина опоры, l_i — длина вала между двумя центрами опор.

Глава вторая посвящена влиянию скользящих опор и прогиба вала на движение ротора в случае, когда центр тяжести диска не совпадает с центром вала. Ось вала предполагается уже геометрически искривленной. Эта проблема сводится к решению дифференциального уравнения

$$d^2x/dt^2 + 2\delta dx/dt + \omega_0^2(1 + q_0 + q_1 x)\, x = \varepsilon\omega^2 \cos\omega t + g,$$

где δ, ω_0, q_0, q_1, ε, ω, g — постоянные. Применяя метод малого параметра, автор получает следующий результат: вынужденные колебания с периодом $2\pi/\omega$ (ω есть скорость ротора) имеют максимальные амплитуды приблизительно для $1/n$-кратных ($n = 1, 2, \ldots$) критических оборотов. Амплитуды будут с возрастанием n быстро убывать. Ввиду нелинейности влияния прогиба вала могут возникнуть колебания при n-кратных ($n = 2, 3, 4, \ldots$) критических оборотах. Практическое значение имеют только колебания, возникающие при двукратных критических оборотах. I. Vrkoč

380. **Фронт волны и тензорное уравнение.** Пастори (Fronti d'onda ed equazioni tensoriali. Pastori Maria), Matematiche, Catania, 1953, 8, № 2, 28—42 (англ.)

Излагается роль характеристических многообразий и фронта волны для тензорной гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных математической физики. C. R. De Prima

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 4, 370

381. **Гидродинамическая устойчивость и теория Пуанкаре-Ляпунова. I.** Белман, Уинг (Hydrodynamical stability and Poincaré-Lyapunov theory. I. Bellman Richard, Wing G. Milton), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 11, 867—870 (англ.)

Модельная система уравнений потока вязкой жидкости через трубку с учетом теплообмена имеет вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + q\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 1, \quad \int_0^1 R(\vartheta, q)\, dx = 0$$

$$(\vartheta = \vartheta(x, t); \quad q = q(t); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant t < \infty).$$

Исследуется устойчивость установившегося решения

$$\vartheta \equiv a_0 + x/q_0, \quad q \equiv q_0 \quad (a_0, q_0 = \text{const}).$$

Система уравнений в вариациях решается посредством преобразования Лапласа, причем соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial\vartheta}\right)_0 \frac{1 - e^{-sx/q_0}}{sq_0}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial q}\right)_0 dx. \qquad (1)$$

Полная (нелинейная) система уравнений исследуется при помощи метода последовательных приближений. Утверждается, что если все корни уравнения (1) имеют отрицательную вещественную часть (для чего приводятся достаточные признаки), функция R удовлетворяет некоторым условиям, имеющим характер гладкости, и функции $|\vartheta - a_0 - x/q_0|$, $|\partial\vartheta/\partial x - 1/q_0|$ при $t = 0$ достаточно малы, то решение исходной задачи (при краевых условиях, которые не уточняются) асимптотически приближается к установившемуся решению. Доказательства не приводятся. Более общие задачи будут рассмотрены во второй части работы.

А. Д. Мышкис

382. **Ударная волна в инвариантной теории распространения волн.** Теодореску (L'onde de choc dans la théorie invariante de la propagation des ondes. Teodorescu N.), Rev. math. et phys. (Bucureşti), 1954, 2, 107—123 (франц.)

383. **О силе лобового сопротивления, испытываемой препятствием в вязкой сжимаемой жидкости.** Кшивицкий (Sul la force frontale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible. Krzywicki A.), Studia math., 1956, 15, № 2, 252—266 (франц.)

Автор доказывает несколько теорем о силе лобового сопротивления P_z, действующей на замкнутую жесткую непрерывную поверхность Σ, движущуюся поступательно при отсутствии внешних сил с постоянной скоростью w_0 в сжимаемой вязкой жидкости, заполняющей все пространство, внешнее по отношению к поверхности Σ. Составляющие u, v, w скорости жидкости относительно подвижной системы координат XYZ, жестко связанной с поверхностью Σ (ось Z параллельна скорости W_0), плотность ρ и давление p непрерывные, удовлетворяют уравнениям движения Навье—Стокса, уравнению неразрывности и характеристическому уравнению $p = p(\rho, t)$, где t — время.

В первой теореме предполагается, что

1) жидкость прилипает к поверхности Σ, т. е. на Σ

$$u = v = 0, \quad w = W_0;$$

2) кинетическая энергия движения жидкости относительно системы XYZ конечна;

3) существует такая постоянная $\rho^* \neq 0$, что $\iiint_{X_\Sigma} |\rho - \rho^*|\, d\omega < \infty$, где X_Σ есть область, внешняя по отношению к Σ.

4) плотность ρ ограничена;

5) существует такая постоянная M, что $\iiint_{X_\Sigma} \frac{1}{\rho}\, d\omega <$

$< M \iiint_{\pi} d\omega$, где π — цилиндр вращения с осью Z, половина высоты которого равна квадрату радиуса основания, и π_Σ есть часть π, внешняя по отношению к Σ.

6) Производная $|dp/d\rho|$ ограничена.

Автор доказывает, что существует бесконечная последовательность таких цилиндров вращения Φ_n, у которых радиусы основания R_n и высоты h_n удовлетворяют условию $^1/_4 \leqslant R_n^2/h_n \leqslant 16$, и что сила лобового сопротивления P_x дается формулой $P_x = -\lim_{n\to\infty} \iiint_{\Omega_n} (\partial(\rho\omega)/\partial t)\, d\omega$, в которой Ω_n — область между Σ и Φ_n. Отсюда следует важное заключение, а именно, что в установившемся движении (относительно системы XYZ) мы имеем $P_x = 0$.

Во второй теореме, помимо 1), 2), 3), 4), допускается, что скорости u, v, w ограничены, плотность ρ ограничена с обеих сторон положительными числами и функции $\frac{1}{r}$, $\operatorname{grad}\rho$, $\frac{1}{r}\theta$ ($r^2 = x^2 + y^2$; $0 = \operatorname{div}(u, v, w)$), $\frac{1}{z}\operatorname{grad}\rho$, $\frac{1}{z}\theta$ ограничены. Затем автор выводит следующую формулу для силы лобового сопротивления:

$$W_0 P_x = -\lim_{n\to\infty} \left\{ \partial E_{\Omega_n}/\partial t + D_{\Omega_n} + \right.$$

$$\left. + \iiint_{\Omega_n} P(\rho)(\partial\rho/\partial t)\, d\omega - \frac{\nu}{\rho^{*2}} \iint_{\Phi_n} (\partial\rho/\partial t)\rho u_n d\sigma \right\},$$

в которой

$$P = \int_{\rho^*}^{\rho} dp/\rho; \quad E_\Omega = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \rho(u^2 + v^2 + \omega^2)\, d\omega,$$

u_n — составляющая скорости, нормальная к поверхности Σ, а диссипативная функция D_Ω есть

$$D_\Omega = \iiint_\Omega \{\mu[(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2 +$$

$$+ (\partial v/\partial x)^2 + \ldots + (\partial\omega/\partial z)^2] + \nu\theta^2\}\, d\omega,$$

где μ и ν — коэффициенты вязкости жидкости. Отсюда следует важное заключение, а именно: относительно системы XYZ не существует установившегося движения жидкости.

Кроме того, в статье содержатся два варианта второй теоремы, в которых характеристическое уравнение приводится к форме $\rho = \text{const}\, p^\lambda$ для $0 < \lambda < 1$, и две теоремы, дающие при некоторых допущениях формулы для силы лобового и бокового сопротивления.

Статья представляет собой обобщение на случай пространственного движения результатов, полученных ранее автором для плоского движения (РЖМат, 1956, 8865). S. Drobot

384. О боковом давлении, оказываемом на препятствие сжимаемой вязкой жидкостью. Кшивицкий (Sur la force latérale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible. Krzywicki A.), Studia math., 1956, **15**, № 2, 174—181 (франц.)

Автор выводит формулу для бокового давления, оказываемого на тело, движущееся поступательно в вязкой сжимаемой жидкости. При тех же обозначениях и допущениях (кроме допущения о характеристическом уравнении жидкости, которое здесь является излишним), которые были приняты в другой статье автора (реф. 383), он получает для компонент P_x и P_y бокового давления формулы вида

$$P_x = -\lim_{n\to\infty} \left[\iiint_{\Omega_n} (\partial(\rho u)/\partial t)\, dw + \right.$$

$$\left. + R_n \iint (\partial(\rho u_\xi)/\partial t) \sin\varphi d\sigma \right],$$

в которых u_ξ — цилиндрическая компонента скорости жидкости в системе координат XYZ. На основании других результатов автора, полученных в указанной статье, делается важное заключение, что ни сжимаемость, ни вязкость жидкости не устраняют парадокса Даламбера. Наконец, в связи с полученными результатами автор подвергает критике теорию несущей силы, применяемую в технической гидромеханике. S. Drobot

385. Движение вязкой жидкости в трубе при условии последовательных вибраций. Ланс (Motion of a viscous fluid in a tube which is subjected to a series of pulses. Lance G. N.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 3, 312—315 (англ.)

386. О вычислении частных производных высшего порядка функции скорости по ее значениям, заданным на линии тока. Блахо, Фараго (Determination of higher order partial derivatives of the velocity function from known values along a streamline. Blahó M., Faragó T.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, **16**, № 3—4, 363—370 (англ.; рез. русск., нем., франц.)

387. Нелинейные дифференциальные уравнения гидравлики. Мак-Лаклан (On a nonlinear differential equation in hydraulics. McLachlan N. W.), Proc. Sympos. appl. Math., 1954, **5**, 49—62 (англ.)

388. Вывод уравнения колебания струны. Фикен (A derivation of the equation for a vibrating string. Ficken F. A.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 3, 155—157 (англ.)

Обсуждается вопрос о характере приближений, которые допускаются в случае, когда в качестве уравнения колебаний струны берут одномерное волновое уравнение.

Рассмотрим натянутую струну с закрепленными концами, коэффициент упругости которой ε, а плотность и напряжение в невозмущенном состоянии ρ_0 и τ_0. Пусть

$$\mathbf{R}(x, t) = [x + u(x, t)]\, i + v(x, t)\, j$$

— радиус-вектор точки струны, имеющей в невозмущенном состоянии координаты x, 0, а

$$s(x, t) = \int_0^x \left[(1 + u_\xi)^2 + v_\xi^2\right]^{1/2} d\xi$$

— расстояние до этой точки, взятое вдоль струны от левого конца. Используя законы Гука и Ньютона, автор получает векторное уравнение колебаний струны

$$\rho_0 \mathbf{R}_{tt} = \left(\frac{\tau}{S_\blacksquare}\mathbf{R}_x\right)_x, \qquad (1)$$

где

$$\tau = \tau_0 + (\tau + \varepsilon)(s_x - 1).$$

Если выполнены условия: 1) малой растяжимости: $|\tau - \tau_0| \ll \tau_0$, 2) малого наклона струны: $\sin^2\theta = v_x^2/s_x^2 \ll 1$, 3) $|v_x v_{xx}| \ll |u_{xx}|$, $\varepsilon |v_x u_{xx}| \ll \tau_0 |v_{xx}|$, то уравнение (1) распадается на два скалярных волновых уравнения

$$\rho_0 v_{tt} = \tau_0 v_{xx}$$

$$\rho_0 u_{tt} = (\tau_0 + \varepsilon) u_{xx}.$$

Д. П. Костомаров

389. Асимптотические разложения решений внешних задач для уравнения теплопроводности в области, ограниченной изнутри цилиндрической поверхностью. Ритчи, Сакакура (Asymptotic expansions of solutions of the heat conduction equation in internally bounded cylindrical geometry. Ritchie R. H., Sakakura A. Y.), J. Appl. Phys., 1956, 27, № 12, 1453—1459 (англ.)

Для исследования цилиндрически симметричного решения уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 v(r, t) = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial t} v(r, t), \quad K = \text{const}$$

при больших значениях t используется разложение в асимптотические ряды. С помощью преобразования Лапласа решение представляется в виде

$$v(r, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\bar{v}(r, p)\, dp,$$

где контур интегрирования обходит справа все особые точки подинтегрального выражения, а

$$\bar{v}(r, p) = AK_0\left[r\left(\frac{p}{K}\right)^{1/2}\right] + BI_0\left[r\left(\frac{p}{K}\right)^{1/2}\right],$$

где, в свою очередь, K_0 и I_0 — функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Константы A и B выбираются таким образом, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям.

Рассмотрены 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи, а также случай постоянного источника, находящегося на внутренней граничной поверхности.

В случае первой краевой задачи, если поверхность цилиндра $r = a$ поддерживается при постоянной температуре v_0, а при $r \to \infty$ температура стремится к нулю, то

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} dz e^{\tau z} K_0(\rho z^{1/2})/zK_0(z^{1/2}) \qquad (1)$$

где $z = a^2(p/K)$, $\tau = Kt/a^2$, $\rho = r/a$.

Контур интегрирования идет от $-\infty - i\alpha$, обходит против часовой стрелки вокруг нуля и заканчивается на $-\infty + i\alpha$, где α — произвольное положительное число.

Подобные формулы получены и для остальных случаев.

О поведении функции v при больших значениях τ можно судить по поведению $\bar{v}$ при малых значениях параметра трансформации z. С помощью разложений функций Бесселя при малых z для найденных решений и функций $F = -kdv/dr$; $H = \int_0^t F dt$ получены выражения в виде рядов по функциям вида

$$I_\nu^k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{zx} z^{\nu-1} [\ln z]^k dz.$$

Эта функция при $k > 0$ и ν произвольном представима рядом, члены которого содержат производные от гамма-функции и функции, обратной гамма-функции. Приведено доказательство того, что при $k < 0$ и ν произвольном I_ν^k асимптотически выражается через аналогичный ряд. Дана таблица значений первых пяти коэффициентов обоих рядов для значений $\nu = -1, 0, 1, 2, 3$, а $k = 1, 2, 3$ — для первого ряда и $k = -1, -2, -3$ — для второго.

При $k < 0$, когда $\nu > 0$ и $\nu = 0$ функция I_ν^k разложена в асимптотические ряды, члены которых содержат производные от гамма-функций. Приведена таблица значений производных от гамма-функции до четвертого порядка включительно при $\nu = 1, 2, 3$ и дан график функции (1).

Дано приложение полученных результатов к решению задачи о проникании газа через пористую среду в газовую скважину. В. И. Беляев

390. Некоторые плоские задачи теории тепловых волн. Коренев Б. Г., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 1, 29—32

1. Тепловые волны в плоской пластинке с постоянной и достаточно малой толщиной h, когда плоскости пластинки являются адиабатическими границами, могут быть описаны уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} + F(x, y)\sin\omega t, \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ — закон распределения источников тепла. Если $F(x, y) = 0$, то

$$T(x, y, t) = \varphi(x, y)\cos\omega t + \varphi_1(x, y)\sin\omega t, \qquad (2)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi + (\omega/a)^2\varphi = 0, \qquad (3)$$

и, кроме того,

$$\varphi_1 = \frac{a}{\omega}\nabla^2\varphi. \qquad (4)$$

Для решения задачи достаточно найти φ. Решение уравнения (3) хорошо разобрано в теории изгиба плит на упругом основании.

Интегрированием решения задачи о точечном источнике, приложенном к неограниченной пластине легко найти φ, а затем и T для случаев, когда источники распределены по круговым областям.

Пусть пластинка ограничена по краям простым контуром C, имеющим непрерывную кривизну. Температура на контуре

$$T(\sigma) = F_1(\sigma)\sin\omega t + F_2(\sigma)\cos\omega t,$$

где σ есть s-дуговая координата точки контура. Решение ищется в виде

$$T(x, y; t) = \int_C \mu_1(s) K_1^* ds + \int_C \mu_2(s) K_2^* ds,$$

где

$$K_1^* = \left[f_0'(\eta)\sin\omega t - g_0'(\eta)\cos\omega t\right]\cos(n_s, r_1),$$

$$K_2^* = \left[g_0'(\eta)\sin\omega t + f_0'(\eta)\cos\omega t\right]\cos(n_s, r_1),$$

$$f_0(\eta) + ig_0(\eta) = H_0^{(1)}(\eta\sqrt{i}),$$

$\eta = r/l$ — приведенное расстояние между точкой контура и точкой области. Для того чтобы решение удовлетворяло граничным условиям, μ_1 и μ_2 должны удовлетворять системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из этой системы μ_1 и μ_2 находятся обычным образом. При этом указано, что имеет место теорема единственности.

Аналогично можно получить уравнения Фредгольма и для граничных условий второго и третьего рода.

2. Тепловые волны в неограниченной пластинке при граничных условиях третьего рода на верхней и нижней поверхностях, при отсутствии источников, описываются уравнением

$$\lambda h\nabla^2 T = 2\delta T + c\rho h\partial T/\partial t,$$

где λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность пластинки, δ — коэффициент теплообмена.

Решение ищется в виде (2). После перехода к безразмерным координатам φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi - 2b_0\nabla^2\varphi + \varphi = 0.$$

где

$$b_0 = \frac{2\delta h}{4\delta^2 + c^2\rho^2h^2\omega^2}, \quad \xi = r/l_2, \quad l_2 = \frac{\lambda h}{\sqrt{4\delta^2 + c^2\rho^2h^2\omega^2}}.$$

При решении этой задачи можно использовать аналогию ее с задачей о плите на упругом основании, растянутой силами в срединной плоскости, а также явное выражение решения задачи для точечного источника, приведенное в настоящей работе. В. И. Беляев

391. Тепловые волны в многослойном цилиндрическом теле. Водичка (Heat waves in multilayer cylindrical bodies. Vodička Václav. Appl. Sci. Res., 1955, A5, 115—120) (англ.)

392. О методе Бубнова—Галеркина в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Ворович И. И., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 5, 723—726

В k-мерной области Ω с границей Γ рассматривается нелинейное функциональное уравнение

$$\bar{\omega}_{tt} + k\bar{\omega}t + A_1\bar{\omega} + A_2\bar{\omega} = F(P, t) \qquad (1)$$

при начальных $\bar{\omega}|_{t=0} = \bar{g}(P)$ $\bar{\omega}_t|_{t=0} = \bar{h}(P)$ и однородных граничных условиях. $\bar{\omega}$ — n-мерная вектор-функция точки P, A_1 — линейный и A_2 — нелинейный операторы, соответствующие линейной и нелинейной части потенциальной энергии.

Предположено, что изменение потенциальной энергии Φ представимо в виде:

$$\Phi(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1) - \Phi(\bar{\omega}_0) = \int_\Omega (A_3\bar{\omega}_0 \cdot A_4\bar{\omega}_1)\, d\Omega + \alpha,$$

где A_3 — нелинейный, A_4 — линейный операторы и α — малый параметр. Рассматриваются гильбертовы пространства $H_{1\Omega}$, $H_{2\Omega}$, $H_{3\Omega}$, которые определяются через скалярные произведения:

$$(\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)_{H_{1\Omega}} = \int_\Omega (u_1u_2 + v_1v_2 + \ldots + \theta_1\theta_2)\, d\Omega$$

$$(\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}} = (A_1\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)_{H_{1\Omega}}; \quad (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)_{H_{3\Omega}} = \int_0^T \left[(\bar{\omega}_{1t} \cdot \bar{\omega}_{2t})_{H_{1\Omega}} + (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}}\right] dt.$$

Здесь $u, \ldots \theta_1$ — суммируемые с квадратом в Ω составляющие вектор-функции $\bar{\omega}$.

Вводится обобщенное решение (1) $\bar{\omega}_0 \in H_{3\Omega}$ как решение интегрального уравнения

$$\int_0^T \Big[-(\bar{\omega}_{0t} \cdot \bar{\omega}_{1t})_{H_{1\Omega}} + \int_\Omega (A_3\bar{\omega}_0 \cdot A_4\bar{\omega}_1)\, d\Omega + (K\bar{\omega}_{0t} - \bar{F}, \bar{\omega}_1)_{H_{1\Omega}} \Big] dt - \int_\Omega \bar{\omega}_1(P_1t)\,\bar{h}(P)\, d\Omega\,|_{t=0} = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию в форме

$$\lim_{t\to 0} \| \bar{g} - \bar{\omega}(P_1t) \|^2_{H_{1\Omega}} = 0. \qquad (2)$$

Фактическое построение решения предлагается проводить методом Бубнова—Галёркина. Если $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots$ — полная в $H_{2\Omega}$ ортонормированная в $H_{1\Omega}$ система, то приближенное решение (1) будет

$$\bar{\omega}_m = \sum_{l=1}^m q_{ml}\bar{\gamma}_l,$$

где q_{ml} находятся из условий

$$\ddot{q}_{ml} = -\frac{\partial\Phi}{\partial q_{ml}} - (K\bar{\omega}_{ml} \cdot \bar{\gamma}_l)_{H_{2\Omega}} + (\bar{F} \cdot \bar{\gamma}_l)_{H_{1\Omega}} \qquad (3)$$

$$q_{ml}(0) = (\bar{q} \cdot \bar{\gamma}_l)_{H_{1\Omega}} \quad \dot{q}_{ml}(0) = (\bar{h} \cdot \bar{\gamma}_l)_{H_{1\Omega}}$$

Утверждается, что: 1) система (3) имеет по меньшей мере одно решение на всем отрезке $[0, T]$ для каждого m; 2) совокупность приближений $\bar{\omega}_m$ содержит слабо компактное в $H_{3\Omega}$ подмножество $\bar{\omega}'_m$, каждая предельная точка которого есть введенное выше обобщенное решение задачи.

На основании этого рассматриваются уравнения колебаний пологой оболочки, получаемые по уравнениям В. З. Власова. Формулируются две теоремы:

I. Если 1) пологая оболочка занимает в плане конечную область Ω, край Γ которой состоит из конечного числа кусков с непрерывно изменяющейся кривизной, 2) кривизны непрерывно дифференцируемы в Ω; 3) $\int_0^T \|\bar{F}\|^2_{H_{1\Omega}} dt < \infty$; 4) $\bar{g} \in H_{2\Omega}$, 5) $\bar{h} \in H_{1\Omega}$, то система (4) имеет по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле (2), причем множество $\bar{\omega} \in H_{3\Omega}$ с ограниченными вторыми производными содержит не более одного обобщенного решения.

II. Если выполнены все условия теоремы I и $\bar{\gamma}_l$ — система, полная в $H_{2\Omega}$ и ортонормированная в $H_{1\Omega}$, то система уравнений (3) метода Бубнова—Галеркина разрешима на $[0, T]$ при любом T, совокупность $\bar{\omega}_m$ слабо компактна в $H_{3\Omega}$ и каждый слабый предел $\bar{\omega}_m$ в $H_{3\Omega}$ есть обобщенное решение системы В. З. Власова в смысле (2). А. Н. Тюманок

393. Теоремы полноты, связанные с системой уравнений упругого равновесия. Кампанато (Teoremi di completezza relativi al sistema di equazioni dell'equilibrio elastico. Campanato Sergio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 122—137 (итал.)

Рассматривается смешанная граничная задача для системы уравнений плоского упругого равновесия (в векторном виде)

$$\Delta_2\mathbf{u} + k\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0. \qquad (1)$$

состоящая в том, что на части F_2 граничного контура равны нулю усилия:

$$k\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \cdot \cos(\mathbf{n}, X) + du_x/d\mathbf{n} + \lambda du_y/ds = 0,$$
$$k\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \cdot \cos(\mathbf{n}, Y) + du_y/d\mathbf{n} - \lambda du_x/ds = 0, \qquad (2)$$

а на другой части F_1 этого контура задается смещение $\mathbf{u}$; выполнение последнего граничного условия требуется в среднем. Точная формулировка задачи и методика исследования аналогичны тем, которые содержатся в исследовании Мадженеса (РЖМат, 1956, 437; 1957, 449) «смешанной» граничной задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка. В предположении, что постоянные k и λ удовлетворяют одному из неравенств $k > -1$, $-1 < \lambda < \min(1, 2k+1)$ или $k > 0$, $\lambda = 1$ (для уравнений теории упругости реализуется последний случай), автор доказывает единственность решения задачи, а также полноту в пространстве $L_2(F_1)$ совокупности значений (гладких в замкнутой области) решений задачи

(1)—(2). Указывается на возможность перенесения результатов на случай пространственной задачи.
А. Д. Мышкис

394. **О краевых задачах для системы дифференциальных уравнений плоского упругого равновесия. Кампанато** (Sui problemi al contorno relativi al sistema di equazioni differenziali dell' elastostatica piana. Campanato Sergio), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1956, 25, 307—342 (итал.)

Исследуется вторая основная краевая задача теории плоского упругого равновесия, состоящая в задании для системы уравнений (1) (реф. 393) неоднородного граничного условия (2) на всем контуре области. Известно, что при помощи так называемых упругих потенциалов эта задача может быть переведена в эквивалентную ей систему сингулярных интегральных уравнений (с ядром типа Коши). В данной работе автор несколько видоизменяет ядро упругих потенциалов; это делается в явном виде, однако получающееся ядро уже зависит от вида области. Исследование формул скачка полученных потенциалов дает возможность перевести рассматриваемую краевую задачу в равносильную систему интегральных уравнений Фредгольма с суммируемым ядром (при этом постоянные k и λ считаются такими же, как в предыдущем реферате). Отсюда вытекает существование решения задачи, когда от граничного условия требуется только суммируемость (и выполнение известных ранее условий типа ортогональности). Автор подробно исследует класс функций, представимых в виде упругого потенциала простого слоя с суммируемой (или суммируемой в квадрате) плотностью; этот класс для нового ядра такой же, как для старого. В частности, дается внутренняя характеристика функций этого класса. Доказывается справедливость предельной формулы для старого ядра в лебеговых точках плотности (РЖМат, 1956, 8834). Пользуясь соответствующим интегральным тождеством, автор доказывает теоремы о единственности решения некоторых других краевых задач, например, смешанной задачи, в которой на некотором подмножестве граничного контура задаются усилия, а на дополнительном подмножестве — перемещения. Доказаны также некоторые теоремы полноты, соответствующие этим краевым задачам. В работе широко используются результаты Дж. Фикера (Fichera G., Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1948, 9—28; Rend. Semin. Fac. Sci. Cagliari, 1948, 18; 1—22, Scuola Norm. Sup. Pisa (III), 1950, 4, 36—100). Автор указывает на возможность перенесения полученных результатов на случай пространственной задачи. А. Д. Мышкис

395. **Вектор Галеркина. Грубан** (Galërkinův vektor: Hruban Konrád), Inžen. stavby, 1957, 5, № 1, 37—39 (чешск.; рез. нем., русск., англ.)

В векторной форме дается вывод общего решения Б. Г. Галеркина неоднородных уравнений теории упругости.

Рассматривается частный случай задания векторной бигармонической функции Галеркина, две составляющие которой F_x и F_y равны нулю, а третья задается в форме

$$F_z = (A + Bcz)\, e^{-cz} \cos ax \cos by,$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
К. В. Соляник-Красса

396. **О применении метода частного преобразования Лапласа на конечном интервале к плоской задаче упругости. Каприц** (Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana. Capriz Gianfranco), Ann. Scuola normale super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, 7, № 1—2, 17—41 (итал.)

Используя идею Гиззетти (Ghizzetti, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. 1947, (5) 6, 145—187), автор применяет преобразование Лапласа для решения уравнений равновесия упругой пластинки. Он получает некоторую элементарную систему интегральных уравнений и доказывает ее эквивалентность с данной проблемой.
J. Deny

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 268

397. **О колебаниях эллиптической пластинки, заделанной по краю. Пиньедоли** (Sulle vibrazioni di una piastra ellittica incastrata all'orlo. Pignedoli Antonio), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 201—217 (итал.)

Для задачи, названной в заголовке, дается метод решения, основанный на замене функций Матьё их представлениями в виде рядов по произведениям функций Бесселя (см. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матьё. Изд-во ин. лит., М., 1953, гл. XIII, стр. 296—314). При этом левые части уравнений, определяющих собственные частоты различных типов, записываются непосредственно в виде некоторых определителей бесконечного порядка, сходимость которых доказывается. Автор выводит описанный метод из теории «эпициклоидальных трансцендентных» функций Агостинелли, являющихся собственными функциями задачи о колебаниях мембраны формы $\xi = \text{const}$, если $z = n\zeta + a\zeta^n$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ (n — целое), и представляющих, следовательно, в некотором смысле обобщение функций Матьё (Agostinelli C., Atti Acad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1952, 86, 180—194).
Н. А. Ростовцев

398. **Определение коэффициентов емкости областей с коллинеарными разрезами и родственных им областей. Эпстейн** (Determination of coefficients of capacitance of regions bounded by collinear slits and of related regions. Epstein Bernard), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 125—132 (англ.)

Рассматривается задача эффективного определения так называемых коэффициентов ёмкости области, представляющей собой плоскость (x, y) с конечным числом m коллинеарных разрезов. Эти коэффициенты определяются формулой

$$p_{jk} = -\oint_{C_k} \frac{\partial u_j}{\partial n}\, ds \quad (j,\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

где u_j (гармоническая мера j-й компоненты границы) является гармонической функцией, граничные значения которой равны единице на j-ой компоненте и нулю на всех остальных компонентах; C_k — любая замкнутая кривая, окружающая лишь k-ю компоненту; $\partial\, dn$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали, p_{jk} — инварианты конформного преобразования.

Выведена общая формула для вычисления p_{jk}.

Затем рассматриваются области, которые можно конформно отобразить на плоскость с коллинеарными разрезами.

В качестве примера исследован случай двухжильного бронированного кабеля.

Библ. 3 назв.
В. Л. Данилов

399. **О решении системы матричных телеграфных уравнений при некотором согласовании электромагнитных приемно-передающих устройств с параметрами проводов. Бразма Н. А.**, Linatniskie raksti. Latv. univ., Уч. Зап. Латв. ун-та, 1956, 8, № 2, 39—47

Рассматриваются решения системы матричных телеграфных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + L\dfrac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\dfrac{\partial u}{\partial x} + Gu = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где L, R, C, G — постоянные квадратные матрицы, причем матрицы L и C предполагаются симметричными и положительно определенными.

Граничные условия выбираются в виде

$$u(0, t) = u_0 e^{i\omega t} - R_0 i(0, t) - L_0 \frac{\partial i}{\partial t}(0, t)$$
$$u(l, t) = R_l i(l, t) + L_l \frac{\partial i}{\partial t}(l, t). \quad (2)$$

Согласование приемно-передающих устройств заключается в требовании пропорциональности матриц R_0, L_0 и R_l, L_l матрицам R, L:

$$R_0 = R\beta, \quad L_0 = L\beta,$$
$$R_l = R\alpha, \quad L_l = L\alpha,$$

где α и β — заданные положительные постоянные.

В области $(0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t < \infty)$ ищутся решения системы (1) при однородных и неоднородных граничных условиях типа (2) и достаточно гладких начальных условиях.

Для обеих задач особо исследуется случай, когда на левом конце имеет место краевое условие первого рода ($\beta = \infty$).

Автор дает формальную схему решения поставленных задач методом разделения переменных. Сходимость полученных рядов доказана лишь для начального момента времени $t = 0$. Д. П. Костомаров

400. Система дифференциальных уравнений, эквивалентная уравнениям Дирака для атомов водорода. Сибата (System of differential equations which are equivalent to Dirac's equation for hydrogen atom. Shibata Takashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A17**, 371—376 (англ.)

Автор получает 16 скалярных уравнений $\partial\Psi/\partial x^k = m_k\Psi$ ($k = 1, 2, 3, 4$) для компонент 4-мерного вектора Ψ, где $x^k = (r, \theta, \varphi, t)$, а m_k — 4×4 матриц, зависящих от азимутального и магнитного квантовых чисел. Решение Ψ выражается через сферические гармоники и радиальную функцию Дирака. Полученные выражения удовлетворяют 4-м скалярным уравнениям Дирака для атома водорода. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs., 1955, 16, № 6, 594

401 К. Сборник задач по математической физике (для гос. ун-тов). Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. М., Гостехиздат, 1956, 683 стр., илл., 14 р. 45 к.

Сборник задач дополняет известный теоретический курс А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Методы математической физики» и по структуре тесно связан с ним. Сборник состоит из семи глав, разбитых, в свою очередь, на параграфы. Каждая глава посвящена определенному типу уравнения, разбиение глав на параграфы проводится, как правило, по методам решения задач. В отдельные подпараграфы выделяются задачи, требующие применения специальных (цилиндрических и сферических) функций. Большое внимание в книге уделено вопросам вывода уравнений и граничных условий для конкретных физических задач. Эти задачи обычно занимают первый параграф каждой главы. Из общего объема книги около одной пятой посвящено формулировкам 855 задач, а остальные четыре пятых—ответам и решениям.

Первая глава содержит задачи по классификации уравнений в частных производных второго порядка и задачи на приведение их к каноническому виду.

Во второй главе собраны задачи по уравнениям гиперболического типа с одной пространственной переменной. Имеется большое число задач на вывод уравнений и граничных условий для колебаний струн и стержней электрических колебаний в проводах и т. п. В качестве методов решения задач используются метод распространяющихся волн (Даламбера), метод разделения переменных и метод интегральных представлений (интеграл Фурье, функция Римана).

Следующая третья глава посвящена одномерным уравнениям теплопроводности.

В четвертой главе рассматриваются плоские и пространственные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Помимо использования методов разделения переменных и функции источника для ряда задач дано решение с помощью объемных и поверхностных потенциалов.

Пятая и шестая главы посвящены уравнениям параболического и гиперболического типов для двух и трех пространственных переменных. И в этих главах основными методами решений являются методы разделения переменных и интегральных представлений. Большое число помещенных здесь задач требует для своего решения использования специальных функций. Часть задач посвящена построению функций влияния мгновенных и непрерывно действующих сосредоточенных источников.

Последняя седьмая глава содержит задачи для уравнений эллиптического типа $\Delta u + cu = -f$ в случае двух и трех переменных. Здесь собраны задачи на определение собственных значений и собственных функций ограниченных объемов, задачи об излучении и дифракции звуковых волн. Четвертый параграф этой главы посвящен установившимся электромагнитным колебаниям. Подробно рассмотрены задачи излучения в присутствии идеально-проводящей сферы. Ряд задач относится к вопросам излучения антенн над плоской проводящей землей.

В дополнении даны краткие сведения по различным системам ортогональных координат, теории специальных функций, приведены некоторые таблицы.

Следует указать на некоторый недостаток сборника, заключающийся в том, что значительное число задач сформулировано в общем виде (задачи 39—54, 59—75 главы 5, 104—108 главы 7) и потому решения для них даны без вычисления коэффициентов разложения. В то же время вычисление этих коэффициентов при разложении по специальным функциям обычно является наиболее слабым местом у студентов, для которых в основном предназначена эта книга. Ю. Н. Днестровский

402 К. Теория функций Бесселя, изложенная с точки зрения ее приложений в математической физике. Приложения математических теорий. 2. Петьо (La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique. Applications des théories mathématiques. 2. Pétiau Gérard. Paris, Centre Math. Rech. Scient., 1955, 477 p., ill.) (франц.)

Т. 1 см. РЖМат, 1956, 5321 К.

Книга состоит из 24 глав, таблиц и графиков. Названия глав: I. Бесселевы коэффициенты или функции Бесселя целого порядка, II. Функции Бесселя порядка 0, III. Функции Бесселя произвольного порядка — представление при помощи рядов, IV. Функции Бесселя произвольного порядка — интегральные представления, V. Асимптотические разложения функций Бесселя, VI. Теоремы сложения и умножения, VII. Нули функций Бесселя, VIII. Интегралы, содержащие функции Бесселя, IX. Полиномы и ряды Неймана — функции Ломмеля — ряды Каптейна, X. Функции, родственные функциям Бесселя, XI. Интегральные функции Бесселя, XII. Функции Кельвина, XIII. Ряды и интегралы Фурье—Бесселя, XIV. Ряды Шлёмильха, XV. Ортогональные полиномы и функции Бесселя, XVI. Дифференциальные уравнения, решения которых

выражается через функции Бесселя, XVII. Проблема Кеплера — функции Бесселя от нескольких переменных, XVIII. Проблема Бернулли, XIX. Приложение функций Бесселя к задаче о случайных блужданиях, XX. Задачи теплопроводности, XXI. Колебания круглых мембран и круглых пластинок — преобразования Ганкеля, XXII. Приложения функций Бесселя к задаче дифракции света у отверстий и у экрана, XXIII. Приложения функций Бесселя к изучению распространения электричества и электромагнитных волн, XXIV. Приложения функций Бесселя к задачам волновой механики. В разделе таблиц помещены краткие таблицы значений $J_0(x)$, $J_1(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$, $\left|H_0^{(1)}(x)\right|$, $\left|H_1^{(1)}(x)\right|$, $\arg H_0^{(1)}(x)$, $\arg H_1^{(1)}(x)$ и еще более краткие таблицы значений $J_n(x)$, $N_n(x)$ для $n=2, 3, 4$, $J_{1/3}(x)$, $N_{1/3}(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $\mathrm{Ber}\,x$, $\mathrm{Bei}\,x$, $\ker x$, $\mathrm{kei}\,x$ и функций Струве, а также значения корней некоторых бесселевых функций. В конце книги приведены масштабные графики $J_0(x)$, $J_1(x)$, $I_0(x)$, и в более мелком масштабе графики $J_n(x)$, $N_n(x)$ для $n=1, 2, 3, 4, 5$, $\sqrt{\pi/2x}\,J_\lambda(x)$ для $\lambda=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 5/2$, $\pm 7/2$, $J_{1/3}(x)$, $N_{1/3}(x)$, $I_n(x)$ и $K_n(x)$ для $n=0, 1, 2, 3$, а также графики—номограммы $x_s^{(n)}-n$ как функции n для $s=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, где $J_n\left(x_s^{(n)}\right)=0$, $x_s^{(n)\prime}-n$ как функции n, где $J_n'\left(x_s^{(n)\prime}\right)=0$ (для тех же значений s) и x как функция k, определенная равенством $J_0(x)\,N_1(kx)-N_0(x)\,J_1(kx)=0$.

Построение изложения ясно из оглавления. В первых главах в основу положены производящие функции, из разложения которых выводятся разные представления и свойства функций Бесселя неотрицательных целых порядков. Переход к функциям Бесселя произвольного порядка совершается заменой индекса n произвольным индексом λ. Гл. I—XVI содержат исчерпывающее изложение аппарата теории бесселевых функций с большим количеством специальных разложений с числовыми коэффициентами, но во многих случаях только с эскизом доказательств и выводов. В гл. XIV наряду с рядами Шлёмильха приводится их новое обобщение — ряд Инфельда (L. Infeld), Смита (V. G. Smith) и Чана (W. Z. Chien)

$$2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2\pi km)\,H_0^{(2)}\left(2\pi z\sqrt{m^2+\varepsilon^2}\right)=$$

$$=i\,\frac{\exp\left[-2\pi\varepsilon\sqrt{k^2-z^2}\right]}{\sqrt{k^2-z^2}}+$$

$$+i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\exp\left[-2\pi\varepsilon\sqrt{(n+k)^2-z^2}\right]}{\sqrt{(n+k)^2-z^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left[-2\pi\varepsilon\sqrt{(n-k)^2-z^2}\right]}{\sqrt{(n-k)^2-z^2}}\right]-\pi-H_0^{(2)}(2\pi\varepsilon z),$$

из которого в пределе при $\varepsilon\to 0$ получается ряд Шлёмильха.

Приложения открываются в гл. XVII задачей Кеплера о представлении эксцентрической аномалии u точки, движущейся по закону площадей по эллипсу через среднюю аномалию ψ:

$$u=\psi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ne)}{n}\sin n\psi,$$

где e — эксцентриситет эллипса (этот ряд является обращением соотношения $\psi=u-e\sin u$). Далее следует задача Бернулли о колебаниях тяжелой подвешенной цепи (гл. XVIII) и задача о случайном блуждании, которая решается формулой Клийвера (Kluyver) в гл. XIX

$$P_n(r;\ l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=$$

$$=r\int_0^{\infty}J_1(rx)\,J_0(l_1x)\,J_0(l_2x)\ldots J_0(l_nx)\,dx,$$

где P_n — плотность вероятности нахождения блуждающей точки на расстоянии r от исходной точки после n шагов длин $l_1, l_2, \ldots, l_n$ случайных направлений. Гл. XX—XXIII содержат весьма полное изложение приложений бесселевых функций к задачам теплопроводности, колебаниям мембран и пластинок, теории дифракции и распространения электромагнитных волн с учетом результатов последних лет. Наконец, в гл. XXIV рассматривается интегрирование уравнения Шредингера (в одномерном случае) в терминах бесселевых функций порядков $1/3$ и $2/3$, а также в радиально-симметричном случае кулонова потенциала в терминах бесселевых функций целых порядков. В. И. Левин

403. Д. Решение плоской задачи теории упругости при помощи электромоделирования конформного преобразования. Угодчиков А. Г. Автореф. дисс. докт. техн. н., Горьковск. инж.-строит. ин-т. Ин-т матем. АН УССР, Киев—Горький, 1957

См. также: 2, 423, 468, 490, 491, 507, 665, 727—730, 732—740, 769

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

404. О теоремах интегральных уравнений. Йосимацу (Sur les théorèmes des équations intégrales. Yoshimatsu Senjiro. Mem. Osaka Univ. Lib. Arts Ed. Ser. B. 1954, № 3, 1—5) (франц.)

Следуя Ф. Риссу (Riesz F., Acta math., 1916, 41, 71—98), автор доказывает, что если T — линейное непрерывное преобразование линейного нормированного полного пространства X самого в себя вида $T=I-\lambda V$, где I — тождественное преобразование, а V — вполне непрерывен, тогда характеристические значения V не имеют предельных точек, кроме бесконечно удаленных. Применяя к случаю, когда X — гильбертово пространство, а V симметричен, легко показать, что V имеет характеристическое значение λ такое, что $\|V\|=|\lambda|$ и что $Vx=\sum_n\lambda_n^{-1}(x,\ x_n)x_n$, где $\{x_n\}$ образует полное ортогональное множество характеристических элементов, соответствующих характеристическим значениям λ_n. T. H. Hildebrandt

Перевод из Math. Revs., 1956, **17**, № 2, 163

405. К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 6, 1167—1170

Четная симметрическая непрерывная матрица функция

$H(t)$ $(-2T<t<2T\leqslant\infty)$ называется симметричной акселерантой, если интегральное уравнение

$$X(t)+\int_0^a H(t-u)\,X(u)\,du=Y(t)\quad(0\leqslant t\leqslant a)\qquad(1)$$

при любом $a<2T$ имеет для $Y\equiv 0$ единственное непрерывное решение $X(t)\equiv 0$. В частности, это имеет место при выполнении условия

$$\det\left(I_n+2\int_0^\infty \cos ktH(t)\,dt\right)\neq 0\ (-\infty<k<\infty).\qquad(2)$$

Обозначим через $\Gamma_a(t,\ s)$ решение уравнения (1) при $Y(t)=H(t-s)$.

Если положить

$$\mathcal{E}(r,\ k)=e^{ikr}\left(I_n-\int_0^{2r}\Gamma_{2r}(0,\ s)\,e^{-iks}ds\right)\ (0\leqslant r<T)$$

и

$$2\Phi_0(r,\ k)=\mathcal{E}(r,\ k)+\mathcal{E}(r,-k),\ 2i\Psi_0(r,\ k)=\mathcal{E}(r,k)-\mathcal{E}(r,-k),$$

то Φ_0 и Ψ_0 будут решениями системы

$$\frac{d\Phi}{dr}=-k\Psi-A(r)\,\Phi,\ \frac{d\Psi}{dr}=k\Phi+A(r)\,\Psi,$$

$$A(r)=2\Gamma_{2r}(0,\ 2r)$$

с начальными условиями

$$\Phi(0,\ k)=I_n,\qquad \Psi(0,\ k)=0.$$

Функция $\Psi_0(r,\ k)$ будет также решением уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}-V(r)\,\Psi+k^2\Psi=0,\ V(r)=A(r)-\frac{dA(r)}{dr},$$

$$\Psi(0,\ k)=I_n,\qquad \Psi'(0,\ k)=kI_n.$$

Обратно, по любой непрерывной симметричной матрице-функции $A(r)$ $(0\leqslant r<T)$ или $V(r)$ можно построить одну и только одну порождающую её симметричную акселеранту $H(t)$.

Если $A(r)\in L_1(0,\ \infty)$, то

$$\lim_{r\to\infty}e^{-ikr}\mathcal{E}(r,\ k)=I_n-\int_0^\infty e^{-ikt}\Gamma(t)\,dt\equiv G(k).$$

Если, кроме того, и $H(t)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ (что имеет место, если, например, $A(r)$ вещественна), то $\det G(k)\neq 0$, а матрица $S(k)=G(k)\,G^{-1}(-k)$ унитарна. Эта матрица симметрична и обладает следующими свойствами:

$$S(-k)=S^{-1}(k),\ \arg\det S(+\infty)=\arg\det S(-\infty)\qquad(3)$$

$$S(k)=I_n+\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}F(t)\,dt,\quad F(t)\in L_1(-\infty,\ \infty)\qquad(4)$$

причем удовлетворяется интегральное уравнение

$$K(t)-\int_0^\infty K(s)\,F(s+t)\,ds=F(t)\ (0\leqslant t<\infty),\qquad(5)$$

где

$$K(t)=H(t)-\int_0^\infty\Gamma(s)\,H(t+s)\,ds,$$

$$\Gamma(t)=\Gamma_t(0,\ t)-\int_t^\infty\Gamma_\rho(0,\ \rho)\,\Gamma_\rho(0,\ \rho-t)\,d\rho.$$

Обратно, произвольная симметрическая матрица-функция $S(k)$ $(-\infty<k<\infty)$, удовлетворяющая условиям (3), (4), порождается некоторой акселерантой $H(t)$, если только уравнение (5) имеет единственное решение $K(t)$ в $L_1(0,\ \infty)$; эта акселеранта получается по формуле

$$H(-t)=H(t)=\int_0^\infty K(t+s)\,K(s)\,ds.$$

Результаты заметки, в частности, дают более простой способ восстановления скалярного потенциала по S-функции, чем известные ранее (РЖМат, 1956, 6569).

Г. Е. Шилов

406. Об одном классе интегральных уравнений. Л ю б и ч Ю. И., Матем. сб., 1956, 38, № 2, 183—202

Автор изучает интегральные уравнения вида

$$If\equiv\int_0^1 a(x)\,f(x+t)\,dx\simeq\varphi(t)\ (-\infty<t<\infty),\qquad(1)$$

причем $a(x)\in L(0,1)$ и $\varphi(t)$ — известные функции (ядро и правая часть), $f(t)$ — искомая функция, знак $\simeq$ означает равенство почти всюду. Оператор I определен в классе Λ функций, суммируемых в каждом конечном интервале, и отображает Λ на себя.

Если известно, что $f(t)\simeq f^0(t)$ $(T\leqslant t\leqslant T+1)$ и нужно продолжить это решение на всю вещественную ось, то такая задача называется задачей с начальными условиями.

Кроме того, уравнение (1) называется регулярным, если: 1) существует такое целое $m\geqslant 0$ (ранг уравнения), что $a(x)$ m раз дифференцируема и $a^{(m)}(x)\in$ Lip $(0,\ 1)$ и $a(1)\neq 0,\ a^{(m)}(0)\neq 0,\ a^{(k)}(0)=0\ (0\leqslant k<m)$; 2) $\varphi(t)$ принадлежит классу A функций, абсолютно непрерывных в каждом конечном интервале.

Автор устанавливает в общем случае единственность решения задачи с начальными условиями. Для регулярных уравнений нулевого ранга устанавливается разрешимость задачи с начальными условиями, если только $f^0(t)\in L(T,\ T+1)$.

П. Д. Калафати

407. Некоторые интегральные уравнения и самосопряженные функции. М а й н р а (Certain integral equations and self-reciprocal functions. M a i n r a V. P.), Ganita, 1955, 6, № 1—2, 55—73 (англ.)

Рассматриваются интегральные уравнения, которым при некоторых условиях удовлетворяют функции видов

$$F(x)=\sum_{r=1}^\infty f(rx),\ P(x)=\sum_{r=0}^\infty(-1)^r f[(2r+1)x],$$

$$Q(x)=f(x)-f(3x)-f(5x)+f(7x)+\ldots,$$

$$S(x)=f(x)-f(5x)-f(7x)+f(11x)+f(13x)-\ldots$$

В частности, первая из этих функций удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}f(0)+F(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty f(x)\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\psi_{\mu_1,\,\mu_2,\ldots,\,\mu_n}(xy)\,F(y)\,dy,$$

где $\psi_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(xy)$ определяется посредством некоторого кратного интеграла, содержащего бесселевы функции порядков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Н. А. Бразма

408. **Об условиях, необходимых и достаточных для полной аппроксимативной разрешимости уравнений весьма общей природы. Полак А. И.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 4, 587—590

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1956, 5342) были установлены достаточные признаки (теоремы 1 и 2) того, что все решения уравнения $L(y) = f(x)$ равномерно аппроксимируются решениями уравнений $L_n(y) = f(x)$, когда f фиксирована и операторы L_n равномерно сходятся к линейному или нелинейному оператору L. Здесь доказывается, что эти условия являются и необходимыми, причем правую часть можно и не фиксировать, т. е. рассматривать аппроксимирующие уравнения $L_n(y) = f_n(x)$, где f_n равномерно сходятся к f. В применении к нелинейным интегральным уравнениям устанавливается теорема 3. Пусть $K(x, t, \varphi)$ и $K_n(x, t, \varphi)$ — непрерывные по совокупности аргументов функции, причем при каждой фиксированной функции $\varphi(t)$ $K_n(x, t, \varphi(t))$ равномерно сходится к $K(x, t, \varphi(t))$ в квадрате $a \leqslant x, t \leqslant b$. Тогда, для того чтобы все непрерывные решения уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt = f(x) \qquad (1)$$

можно было представить в виде пределов равномерно сходящихся последовательностей $\varphi_n(x)$, где каждая функция $\varphi_n(x)$ — непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K_n(x, t, \varphi(t))\, dt = f_n(x), \qquad (2)$$

а f_n — произвольная последовательность непрерывных функций (для которых (2) имеет решение), необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \varphi) > 0$ такое, что для каждого n и любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\| f(x) - F(x) \| < \delta$, где $F(x)$ — значение оператора

$$\Omega\varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^b K_n(x, t, \varphi(t))\, dt$$

при данной функции $\varphi(x)$, найдется хоть одно непрерывное решение $\Psi(x)$ уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K_n(x, t, \varphi(t))\, dt = f(x),$$

удовлетворяющее условию $\| \psi(x) - F(x) \| < \varepsilon$ ($\| \ \|$ — норма в C). М. М. Вайнберг

409. **О нелинейных уравнениях с положительными нелинейностями. Ладыженский Л. А.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 211—212

Дано краткое изложение части результатов ранее опубликованных работ и кандидатской диссертации автора (РЖМат, 1955, 2759, 3798, 3839).

М. М. Вайнберг

410. **Об интегральном уравнении, встречающемся при исследовании выпуклой кривой, кривизна которой является функцией от длины дуги. Асколи** (Sull'equazione integrale da cui dipende la ricerca di una curva gobba di cui siano note le curvature in funzione dell'arco. Ascoli Guido, Matematiche, Catania, 1953, 8, № 2, 11—18 (англ.)

Здесь определяются условия для уравнения Вольтерра, данные Налли (Nalli, Ann. Mat. Pura Appl., 1938, 17 (4), 193—202) для исследования кручения пространственной кривой, дающей случай «замкнутого цикла» (ciclo chiuso), кроме того, находится результат, полученный Сораче (Sorace, Mathematiche, Catania, 1947, 2, 65—79; Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, 1948, 14 (4), 155—166; Boll. Accad. Gioenia Sci. Nat. Catania, 1948, (4), № 1, 55—73).

Результаты получаются с помощью применения методов преобразования Лапласа. Найдено, что кривые, удовлетворяющие требуемым условиям, могут быть либо циклами, либо круговыми спиралями, либо эволютами круговых спиралей. S. B. Jackson

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 620

См. также: 364, 394, 396, 479, 481, 507, 508, 611

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

411. **Вариационные задачи с допустимыми поверхностями произвольных топологических типов. Сигалов А. Г.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 53—98

Статья обобщает результаты работы автора «Двумерные задачи вариационного исчисления» (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 2, 16—101) на случай, в котором допустимыми поверхностями являются не только поверхности, гомеоморфные кругу, но и поверхности иных топологических типов.

Доказаны две основные теоремы. В первой из них при некоторых ограничениях утверждается существование поверхности T заданного топологического типа, на которой интеграл $\int\int_K F(f, A_f)\, du$ достигает в классе допустимых поверхностей наименьшего значения. Здесь $f(u)$ — каноническое параметрическое представление поверхности T, а A_f — якобианы вектор-функции $f(u)$:

$$A_f^1 = \frac{D(f^2, f^3)}{D(u^1, u^2)}, \quad A_f^2 = \frac{D(f^3, f^1)}{D(u^1, u^2)}, \quad A_f^3 = \frac{D(f^1, f^2)}{D(u^1, u^2)}.$$

Этот результат распространяется на случай, в котором граничные условия удовлетворяются лишь с точностью до эквивалентной системы граничных кривых.

Во второй теореме результаты первой теоремы обобщаются на случай, в котором допустимыми поверхностями являются конечные системы невырожденных поверхностей, ограниченных заданной системой кривых, причем сумма родов поверхностей не должна превосходить некоторого числа.

В начале статьи содержится краткий обзор работ по рассматриваемой проблематике. Библ. 25 назв.

Л. Э. Эльсгольц

412. **Об одном классе вариационных задач. Беллман** (On a class of variational problems. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1957, 14, № 4, 353—359 (англ.)

Рассматривается вариационная задача об экстремуме функционала

$$J(x) = \int_0^T [F_1(x - b_1(t), t) + F_2(x^1 - b_2(t), t) + \ldots$$
$$\ldots + F_K(x^{(K-1)} - b_K(t), t)]dt$$

с граничными условиями $x(0) = c_1$, $x^1(0) = c_2, \ldots$ $\ldots, x^{K-1)}(0) = c_K$, где $b_i(t)$ — заданные функции t.

Дается эффективный метод решения этой задачи для функционалов вида

$$J(x) = \int_0^T [a_1(t)(x - b_1(t))^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_K(t)\, x^{(K-1)} - b_K(t))^2]dt$$

при $K = 2$ и $K = 3$.

Предварительно решается аналогичная задача для дискретного случая — задача о минимуме квадратичной формы

$$\sum_{n=0}^{T} [a_1(n)(x_n - b_1(n))^2 + a_2(n)(\Delta x_n - b_2(n))^2 + \ldots]^2,$$

где $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, $\Delta^2 x_n = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} \ldots$

Л. Э. Эльсгольц

413. Исправление к статье Уилкинса «Вариационная задача, связанная с теорией реактора». (Errata, volume 5), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 1159 (англ.)

Указывается, как при некоторых дополнительных условиях можно избавиться от ошибки в статье Уилкинса (РЖМат, 1955, 1804), на которую обратил внимание Рид (Reid W. T., Math. Revs, 1955, 16, 266).

М. К. Керимов

414. Вывод минимальных принципов нелинейной теории упругости с помощью канонических преобразований. К о п п е (Die Ableitung der Minimalprinzipien der nichtlinearen Elastizitätstheorie mittels kanonischer Transformation. K o p p e E b e r h a r d), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa, 1956, № 12, 259—266 (нем.)

Из основного условия равновесия (виртуальная работа внутренних сил равна работе массовых и поверхностных сил) автор с помощью канонических преобразований и формулы Остроградского—Гаусса получает три эквивалентных формулировки вариационных принципов нелинейной теории упругости: 1) минимальный принцип для сдвигов, 2) минимальный принцип для напряжений, 3) смешанный принцип. При аналитической формулировке принципов учитывается различие между первоначальной формой граничной поверхности и тем ее положением, которое она занимает после деформации. Изложение ведется на основе тензорного анализа. Формулы автора принимают симметричный и компактный вид в связи с удачным введением обозначений (Ersatzspannungen и другие). Характерной особенностью трех принципов является их взаимность (двойственность) и возможность получения наряду с условиями равновесия также и граничных условий. В конце статьи дается краткий итог полученных результатов (аналитическая форма принципов и условия применимости). Библиографическая часть работы недостаточна: имеется лишь одна ссылка на работу Рейснера (РЖМат, 1954, 4432), в то время, как этим же вопросом занимались многие авторы.

И. С. Аржаных

415 К. Вариационные принципы в динамике и квантовой теории. Ю р г р а у, М а н д е л ь ш т а м (Variational principles in dynamics and quantum theory. Y o u r g r a u W., M a n d e l s t a m S. London, Pitman, 1956, IX, 155 pp., ill, 27 sh. 6 d.) (англ.)

Книга посвящена общим вариационным принципам классической и квантовой физики.

§ 1 представляет собой историческое введение, в котором рассматриваются различные попытки установления общих физических принципов в разные периоды, начиная от античных времен и кончая эпохой Лейбница. § 2 посвящен принципу Ферма. Пять следующих параграфов содержат вариационные принципы классической механики и уравнения Гамильтона—Якоби. Формулируется принцип наименьшего действия (Монертюи), выводятся уравнения Лагранжа и канонические уравнения (Гамильтон) для такой системы. С помощью функции Лагранжа L дается общая формулировка основного вариационного принципа механики:

$$\int L dt = 0$$

(принципа Гамильтона, по терминологии авторов). Выводится уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби и устанавливается его оптико-механический смысл и связь с каноническими уравнениями. Последний из этих пяти параграфов посвящен контактным преобразованиям уравнений Гамильтона.

Краткому изложению основ электродинамики в гамильтоновой форме посвящен § 8. Следующий, § 9 представляет собой резюме идей применения вариационных принципов в классической механике.

Два следующих параграфа посвящены применению вариационных принципов в квантовой механике. Первый из них называется «Вариационные принципы и старая форма квантовой механики» (имеется в виду квантовая механика до работ Гейзенберга и Шредингера, 1926 г.). Излагаются попытки Зоммерфельда—Эпштейна—Шварцшильда построения квантовой теории по образцу механики Гамильтона. Второй из упомянутых параграфов содержит, в основном, вариационный вывод уравнения Шрёдингера, основанный на идеях де Бройля.

Последний параграф «Значение вариационных принципов в натуральной философии» носит скорее историко-философский, чем математический характер и содержит изложение некоторых взглядов и высказываний Гельмгольца, Планка, Пуанкаре и других по поводу роли и границ применимости вариационных принципов в естествознании.

В конце книги помещено краткое добавление, содержащее вывод уравнений Эйлера (т. е. необходимых условий экстремума функционала).

С. В. Фомин

См. также: 232, 320 К

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

416. Заметка о распространении на комплексную область понятий среднего арифметического и геометрического. М а х о - Т о р р е н т (Nota sobre la extension al campo complejo de la media aritmetica y geometrica. M a j ó T o r r e n t J.), Gac. mat., 1956, 8, № 6—7, 195—198 (исп.)

Пусть имеется система комплексных чисел $\{z_k\} = \{r_k e^{i\vartheta_k}\}$. Среднее арифметическое может быть определено как обычно

$$m(z_k) = \frac{1}{n} \sum_1^n z_k.$$

Перенос же на рассматриваемый случай обычного определения среднего геометрического приводит к многозначному результату. Автор вводит «полярные» средние арифметическое и геометрическое:

$$m_{ap}(z_k)=\left(\frac{1}{n}\sum_1^n r_k\right)e^{i\frac{1}{n}\sum\theta_k},$$

$$m_{gp}(z_k)=\left(\sqrt[n]{\prod_1^n r_k}\right)e^{i\frac{1}{n}\sum\theta_k}.$$

Устанавливаются некоторые простые соотношения между средними. Например, если даны две системы комплексных чисел, то произведение их полярных средних геометрических оказывается равным среднему геометрическому всех произведений попарно взятых элементов этих систем. Г. М. Фихтенгольц

417. Формы и функции. Перфект (Forms and functions. Perfect Hasel), Math. Gaz., 1957, 41, № 336, 91—94 (англ.)

Противопоставляются понятия «формы», т. е. выражения вида

$$\frac{a_0+a_1X+a_2X^2+\dots}{a_0'+a_1'X+a_2'X^2+\dots}$$

(где X — «неопределенное», а коэффициенты — числа, либо тоже «неопределенные») и «функции», которые отсюда получается (при числовых коэффициентах) подстановкой вместо X числа x. Указывается, что некоторые результаты получаются именно рассмотрением «форм»; к их числу относятся, например, формулы Вронского

$$a_1-h_1=0,\quad a_2-a_1h_1+h_2=0,\dots,\quad a_k-a_{k-1}h_1+\dots$$
$$\dots+(-1)^kh_k=0,\dots,$$

где a_r — элементарные симметрические функции величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, а h_r — суммы их произведений, взятых по r, с возможными повторениями; при этом природу величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ нет необходимости уточнять. Г. М. Фихтенгольц

418. О некоторых разложениях действительных чисел в бесконечные быстро сходящиеся произведения. Серпинский (O pewnych rozwinięciach liczb rzeczywistych w iloczyny nieskończone szybko zbieżne. Sierpiński W.), Roczn,. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 1, 2, № 1, 131—138 (польск.; рез. русск., англ.)

Доказываются теоремы:

1. Для любого действительного числа x и любой последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, \dots$ существует единственное разложение в произведение

$$x=(1+n_1/d_1)(1+n_2/d_2)\dots,$$

где $d_1, d_2, \dots$ — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$d_{k+1}>(d_k-1)(d_k+n_k)n_{k+1}/n_k\quad(k=1,2,\dots).$$

Числа d_k определяются по индукции: d_{k+1} есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x}{(1+d_1/n_1)\dots(1+d_k/n_k)}>1+\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}}.$$

2. Число x рационально тогда и только тогда, когда существует натуральное число s такое, что

$$n_k(d_{k+1}-1)=(d_k-1)(d_k+n_k)/n_{k+1}\text{ для }k\geqslant s.$$

Эти теоремы являются обобщением и упрощением результатов Оппенгейма (РЖМат, 1955, 600).

В качестве иллюстрации автор выводит разложение Эскотта (Escott E. B., Amer. Math. Monthly, 1937, 44, 644—646):

$$\sqrt{\frac{k+2}{k-2}}=\left(1+\frac{2}{k_1-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_2-1}\right)\dots$$
$$k_1=k,\ k_{n+1}=k_n(k_n^2-3),$$

и одну теорему Кантора (Cantor G., Z. Math. und Phys., 1869, 14, 152—158) J. Mycielski

419. О модифицированных δ-функциях Дирака. Инфельд Л., Плебанский Г., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 10, 679—683

Отмечается три способа введения δ-функции Дирака в физических исследованиях 1) аксиоматически (с помощью перечисления ее свойств), 2) с помощью задания ее разложения Фурье (или разложения по какой-либо произвольной полной системе функций) и 3) с помощью задания некоторой последовательности непрерывных функций, условным пределом которой и является символическая «δ-функция». В наиболее аккуратных физических исследованиях обычно третий способ введения считается обоснованием первого способа. Отмечается, что иногда в физике бывает полезно рассматривать «модифицированные δ-функции» $\hat{\delta}(\mathbf{x})$ (для определенности аргумент $\mathbf{x}$ считается точкой трехмерного пространства), удовлетворяющие, кроме обычных свойств δ-функции (включая сюда и свойство неограниченной дифференцируемости), еще и следующему свойству: (A_4). Интегралы

$$\int_\Omega d\mathbf{x}\frac{\hat{\delta}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^p},\ p=1,2,\dots,k,$$

имеют смысл и равны нулю для любой области интегрирования Ω (здесь k — фиксированное заранее целое положительное число). Для обоснования возможности использования таких δ-функций показывается, что их можно ввести и при помощи третьего способа; для этого явно строится последовательность $\{\hat{\delta}_n(\mathbf{x})\}$ функций $\hat{\delta}_n(\mathbf{x})$, обладающая всеми свойствами последовательности «сходящейся к δ-функции» и в то же время такая, что

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to0}|\mathbf{x}|^{-k+2+\varepsilon}\hat{\delta}_n(\mathbf{x})=0$$

при любых $n=1, 2, \dots$ и $\varepsilon>0$ и притом

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega d\mathbf{x}\frac{\hat{\delta}_n(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^p}=0,\quad p=1,2,\dots,k,$$

для любой области Ω. А. М. Яглом

420. Доказательство признаков сходимости Раабе-Дюамеля. Шайкин (O demonstrație a criteriului de convergență al lui Raabe—Duhamel. Șaichin A.), Gaz. mat. și fiz., 1957, **A9**, № 2, 69—70 (рум.)

421. Обобщение понятия выпуклости. Молдован (Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate. Moldovan Elena), Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Cluj. Ser. I., 1955, 6, № 3—4, 65—73 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $F(x; a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть некоторая стандартная функция вещественной переменной x и n вещественных параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$ определенная и непрерывная для $a\leqslant x\leqslant b$ и $-\infty<a_i<+\infty$, $i=1, 2, \dots, n$. Предполагается еще, что, каковы бы ни были n различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ из проме-

жутка $[a, b]$ и n чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$, система уравнений $F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеет единственную систему решений относительно параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Так будет, например, если в качестве функции F выбран целый многочлен $a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$.

Положив $y_i = f(x_i)$, где $f(x)$ есть любая определенная в $[a, b]$ функция, и подставив в F вместо a_i упомянутые решения, соответствующие взятым y_i, получим функцию от x, которую обозначим через $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f; x)$. Если для любых $n+1$ точек из $[a, b]$: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ всегда будет $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f; x_{n+1}) < f(x_{n+1})$, то функцию $f(x)$ называют выпуклой в $[a, b]$. Заменяя в последнем неравенстве знак $<$ на $\leqslant$, $\geqslant$ или $>$, получим, соответственно определение невогнутой, невыпуклой или вогнутой функции. Эти определения, вместо промежутка $[a, b]$, можно отнести и к другому множеству точек в нем содержащемуся.

Автор устанавливает непрерывность функции $f(x)$, выпуклой (невогнутой и т. д.) в $[a, b]$, внутри этого промежутка, предполагая при этом, что число параметров $n \geqslant 2$. Для непрерывной в $(a, b]$ функции $f(x)$ даются условия, необходимые и достаточные для ее выпуклости (вогнутости). Исследования автора примыкают к работам Т. Поповича. Г. М. Фихтенгольц

422. Сходимость по вариации и сходимость по длине. Дарбо (Convergenza in variazione e convergenza in lunghezza. Darbo Gabriele), Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII, 1953—1954, 3, 1—9 (итал.; рез. франц.)

Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ограниченной вариации сходится в каждой точке промежутка к функции $f(x)$ — также ограниченной вариации. Если при этом полная вариация $\overset{b}{V}_a [f_n(x)]$ сходится к полной вариации $\overset{b}{V}_a [f(x)]$, то говорят, что последовательность «сходится к предельной функции по вариации». Если же длина $\overset{b}{L}_a [f_n(x)]$ кривой $y = f_n(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ сходится к длине $\overset{b}{L}_a [f(x)]$ кривой $y = f(x)$, то говорят о «сходимости по длине».

Адамс и Леви в 1935 г. доказали, что сходимость по длине не влечет сходимость по вариации, но обратное, в общем случае, не имеет места. Основной результат работы: сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по длине равносильна сходимости последовательности $\{f_n(x) + \lambda x\}$ к $f(x) + \lambda x$ по вариации, каково бы ни было вещественное число λ. Доказательство основано на рассмотрении следующего выражения для длины кривой $y = f(x)$:

$$\overset{b}{L}_a [f(x)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{b}{V}_a [f(x) + \lambda x] (1 + \lambda^2)^{-3/2} d\lambda$$

в предположении лишь ограниченности вариации функции $f(x)$.

Установив попутно выпуклость функции $H(\lambda) = \overset{b}{V}_a [f(x) + \lambda x]$, откуда следует наличие асимптот у кривой $\mu = H(\lambda)$, автор в заключение отмечает, что обращение в нуль ординаты точки пересечения этих асимптот

$$\mu_0 = \lim_{|\lambda| \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} [H(\lambda) - H(-\lambda)] - |\lambda| (b - a) \right\}$$

есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(x)$ ограниченной вариации была абсолютно непрерывной. Г. М. Фихтенгольц

423. Обобщение теоремы Кнезера для одного класса операторных уравнений. Викторовский Е. Е., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 216—224

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, аргумент которой $t = (x_1, \ldots, x_m)$ пробегает m-мерный параллелепипед $X: x_i^0 \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и значения которой являются точками n-мерного евклидова пространства. Пусть далее V — оператор, ставящий в соответствие каждой такой функции функцию $V(t, \varphi)$, определенную в том же параллелепипеде X и значения которой также являются точками n-мерного евклидова пространства, причем значение $V(\bar{t}, \varphi)$, где $\bar{t} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, зависит лишь от значений $\varphi(t)$ при $x_i \leqslant \bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а значения $V(t^i, \varphi)$, где $t^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, не зависят от выбора функции φ. Кроме того, если $\varphi_\nu(t)$ равномерно стремятся к $\varphi(t)$, то $V(t, \varphi) = \lim_{\nu \to \infty} V(t, \varphi_\nu)$, и, наконец, существует положительная функция $\varepsilon(\delta, M)$ от произвольных положительных чисел δ и M, возрастающая при увеличении δ и стремящаяся к нулю при $\delta \to 0$, такая, что если координаты точки $\varphi(t)$ при $t \in X$ по абсолютной величине меньше числа M, то из $|x_i' - x_i''| < \delta$ $(i = 1, \ldots, m)$ вытекает $|V(t', \varphi) - V(t'', \varphi)| \leqslant \varepsilon(\delta, M)$, где $t' = (x_1', \ldots, x_m')$, $t'' = (x_1'', \ldots, x_m'')$ (в реферируемой статье последнее условие сформулировано в форме, пригодной и в случае бесконечных α_i).

Путем обобщения доказательства А. Н. Тихонова (Бюлл. МГУ, секция А, 1938, 1, вы. 8, 1—25), относящегося к случаю $m = 1$, доказывается теорема существования. Существует хотя бы одно непрерывное решение уравнения $\varphi(t) = V(t, \varphi)$ на достаточно малом кубе $x_i^0 \leqslant x_i^0 + t_0$ $(i = 1, \ldots, m)$, а если функцию $\varepsilon(\delta, M)$ можно взять не зависящей от M, то непрерывное решение существует на всем параллелепипеде X. С помощью соответствующего видоизменения применяемой в этом доказательстве аппроксимации решений доказывается обобщение теоремы Кнезера. Множество значений всех непрерывных решений уравнения $\varphi(t) = V(t, \varphi)$ при любом фиксированном $t \in X$ связно, а если $\varepsilon(\delta, M)$ не зависит от M, то это множество есть континуум. Из этого результата, в частности, следует доказанная референтом (Уч. зап. МГУ, 1939, вып. 15, 3—72) теорема Кнезера для систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям Каратеодори; однако метод доказательства автора совсем иной, чем у референта, использовавшего приближения правых частей полиномами, тогда как здесь аппроксимируются сами решения. Отметим, что автор строит не кусочно-непрерывные, а непрерывные аппроксимации решений, так что оператор $V(t, \varphi)$ достаточно считать определенным лишь для непрерывных функций $\varphi(t)$, а не кусочно-непрерывных, как указано в работе. М. Ф. Бокштейн

424. Об асимптотических решениях нелинейных разностных уравнений первого порядка. II. Танака (On asymptotic solutions of non-linear difference equations of the first order. II. Tanaka Seniciro), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, **A10**, № 1, 45—83 (англ.)

Первая часть см. РЖМат, 1956, 345. Изучаются решения разностного уравнения $\Delta y(x) = f(x, y(x))$, где функция $f(x, y)$ является аналитической в области $|x| \geqslant R$, $|y| \leqslant r$. Предполагается существова-

ние числа g_0 такого, что $|g_0|<r$ и $f(\infty, g_0)=0$. Рассматриваются следующие случаи:

1) $$f'_y(\infty, g_0)\neq 0,$$

2) $$f_y^{(k)}(\infty, g_0)=0 \ (k=1, 2, \ldots, (m-1)),$$
$$f_y^{(m)}(\infty, g_0)\neq 0,$$

3) $$f_y^{(k)}(\infty, g_0)=0 \ (k=1, 2, \ldots),$$

которые в свою очередь разбиваются на ряд подслучаев; в каждом из них строится формальное решение уравнения в окрестности $x=\infty$, а затем доказывается существование решения, асимптотическое разложение которого сколько угодно мало отличается от разложения, полученного формально.

Л. Э. Эльсгольц

425. Об использовании «D-перевернутого» оператора. Ландау (Use of a «D-backwards» operator. Landau B. V.), Math. Gaz., 1957, 41, № 336, 127—129 (англ.).

Предлагается вместо знака оператора D (оператор дифференцирования) использовать оператор «$\dot{D}$», перевернутое D, который означает дифференцирование не той функции, которая стоит после знака оператора, а той, которая стоит перед этим знаком.

В. В. Немыцкий

426. Экстремальные свойства собственных значений эрмитовых преобразований и сингулярные значения суммы и произведения линейных преобразований. Амир-Моэз (Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformations. Amir-Moéz Ali R.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 3, 463—476 (англ.)

В работе доказана следующая теорема: Пусть H— эрмитово преобразование n-мерного унитарного пространства E_n с собственными значениями $\alpha\geqslant h_1\geqslant h_2\geqslant\ldots\geqslant h_n\geqslant\beta$ и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — набор натуральных чисел таких, что $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$. Пусть далее $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — симметрическая функция k вещественных переменных, монотонная по каждому переменному в области $\alpha\geqslant t_1\geqslant\beta, \ldots, \alpha\geqslant t_k\geqslant\beta$.

Тогда

$$\varphi(h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k})=$$
$$=\sup_{\substack{M_1\subset\ldots\subset M_k\\ \dim M_p=i_p}}\ \inf_{\substack{\bar{x}_p\in M_p\\ \{\bar{x}_p\}\text{ o. n.}}}\tilde{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k), \qquad (1)$$

где $\tilde{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)=\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — собственные значения эрмитова преобразования, индуцируемого преобразованием H в подпространстве, натянутом на векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$. Поясним смысл правой части формулы (1). В пространстве E_n выбирается цепочка вложенных подпространств $M_1\subset M_2\subset\ldots\subset M_k$, причем размерность каждого подпространства M_p равна i_p. Далее выбирается ортонормированный репер $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$, такой, что $\bar{x}_p\in M_p$; на этот репер натягивается подпространство. Сначала берется $\inf\tilde{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$ по всем реперам, а затем sup по всевозможным цепочкам подпространств. Эта теорема является обобщением теоремы Виланда (РЖМат, 1956, 5094). Используя приведенную выше теорему, автор получает ряд неравенств для собственных чисел суммы и произведения двух симметрических матриц. В работе, кроме того, доказаны неравенства для «сингулярных значений» суммы и произведения двух матриц (сингулярными значениями матрицы A автор называет собственные числа матрицы $+\sqrt{A^*A}$).

В. Б. Лидский

427. О формуле Тейлора с n членами. Гонсалвиш (Sur la $n^{\text{ième}}$ formule de Taylor. Gonçalvеš J. Vicente. Univ. Iisboa. Revista Fac. Ci., A., 1954, (2) **3**, 187—190) (франц.)

Автор показывает, что если $f_y(x, 0)$ и $f_{xy}(0, 0)$ существуют, а $f'_{x^2y}(x, y)$ остается ограниченной в окрестности начала, то $f_{yx}(0, 0)$ также существует и удовлетворяет соотношению $f_{yx}(0, 0)=f_{xy}(0, 0)$. Аналогичный результат получен для частных производных высших порядков.

E. F. Beckenbach

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 453

428. Замечание о формуле Тейлора. Флетт (A note on Taylor's theorem. Flett T. M.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 336, 131—133 (англ.)

Устанавливается формула

$$\psi(b)=\psi(x)+(b-x)\psi'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}\psi''(x)+$$
$$+\ldots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(x)+$$
$$+\frac{(b-x)^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\psi(b)-\psi(x)}{b-x}\right).$$

В. В. Немыцкий

429. Вполне монотонные функции в конусах. Гилберт (Completely monotonic functions on cones. Gilbert Walter M.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 4, 685—689 (англ.)

Функцию $f(x)$, $0\leqslant x<\infty$, называют вполне монотонной, если $f(0)=f(+0)$ и $(-1)^m f^{(m)}(x)\geqslant 0$ ($m=0, 1, 2, \ldots$; $x\geqslant 0$). Последнее неравенство может быть заменено таким:

$$(-1)^m\Delta_\delta^m f(x)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}f(x+i\delta)\geqslant 0,$$

при любых $\delta\geqslant 0$. Фундаментальная теорема, относящаяся к вполне монотонным функциям (доказанная независимо Хаусдорфом и С. Н. Бернштейном), устанавливает совпадение класса таких функций с классом преобразований Лапласа-Стилтьеса ограниченных монотонных функций. Работа посвящена распространению этой теоремы на многомерные образы.

Прежде всего, пользуясь понятиями монотонной и вполне монотонной функции n переменных $x_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$, автор приводит непосредственное обобщение теоремы Хаусдорфа-Бернштейна на n-мерный случай. Затем вводится «n-конус» — выпуклый многогранный конус с вершиной в начале, определяемый n линейно независимыми векторами $x^i=(x_1^i, \ldots, x_n^i)$, $i=1, \ldots, n$; при этом предполагается существование гиперплоскости, пересекающей конус лишь в начале. Функция $f(x)$, определенная в таком n-конусе D и непрерывная на его границе, называется «вполне монотонной (A)» в нем, если

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{i_n=0}^{m_n}(-1)^{i_1+\ldots+i_n}\binom{m_1}{i_1}\ldots\binom{m_n}{i_n}f(x+i_1\delta_1x^1+$$
$$+\ldots+i_n\delta_nx^n)\geqslant 0$$

для каждого x из D и для всех $\delta_i\geqslant 0$. По аналогии с теоремой Хаусдорфа-Бернштейна, автор устанавливает, что для того, чтобы функция $f(x)$ была в D

вполне монотонной (А), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = \int_{D^*} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i t_i} d\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — ограниченная монотонная функция в D^*, а D^* означает множество точек $t = (t_1, \ldots, t_n)$, для которых $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i \geqslant 0$ при всех $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из D. При этом функция $\varphi(t)$ «в существенном» единственна.

Указывается приложение этой теоремы к функции $f(x)$, вполне монотонной (А) в каждом из конусов системы «налегающих» n-конусов. В заключение, приводится пример функции двух переменных, вполне монотонной вдоль каждой линии с неотрицательным уклоном, которая, однако, не будет вполне монотонной как функция двух переменных.

Г. М. Фихтенгольц

430. Вычисление интегралов $(m, n) = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\, dx$, **где** m **и** n **— целые положительные числа,** $m \geqslant n$. **До, Делькурт** (Calcul des intégrales $(m, n) = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\, dx$, m et n entiers positifs, $m \geqslant n$. Deaux R., Delcourte M.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 16—22 (франц.)

431. Двумерная интегральная теорема. Хаяси (二次元の積分定理. 林嘉男), 徳島大學工學部研究報告, Токусима дайгаку когакубу кэнкю хококу, Scient. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1955, № 6, 104—105 (япон.)

432. Решение уравнений второй и третьей степени с помощью интегрирования. Швабе (Lösungen der Gleichungen 2. und 3. Grades durch Integration. Schwabe J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 1, 23—26 (нем.)

Автор предлагает способ определения корней квадратного и кубического уравнений путем дифференцирования по свободному члену, рассматриваемому как независимое переменное, от которого зависит искомый x.

В. В. Немыцкий

433. К. Упражнения по математическому анализу. Том 1. Изд. 3-е. Бончини, Онофри (Esercizi di analisi matematica. Vol. I. 3 ed. Bononcini V. E., Onofri L. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1956, 367 p., 3500 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 667, 591 (итал).

434. К. Курс математического анализа. (Для гос. ун-тов). Т. 1. Изд. 3-е, переработ. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. М., Гостехиздат, 1957, 487 стр., илл., 9 р. 95 к.

Раздел первый. Введение в анализ (Функциональная зависимость. Действительные числа и предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывные функции. Техника нахождения пределов). Теория действительных чисел изложена по Кантору. Вводится понятие предела независимого переменного в предположении, что его значения «частично упорядочены». Понятие предела функции распространяется и на случай многозначной функции, что существенно для дальнейшего.

Раздел второй. Дифференциальное исчисление. (Правила нахождения производных. Некоторые приложения дифференциального исчисления.)

Раздел третий. Теория числовых рядов и приложения дифференциального исчисления к вычислению значений функции (Теория числовых рядов. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Исследование поведения функции) Теория рядов помещена в данный раздел для того, чтобы «сразу же применить эту абстрактную теорию к важнейшему и доступному для учащихся вопросу о вычислении значений функции». В последней главе уделено внимание доказательству неравенств, вводится понятие выпуклой функции, которое также используется для вывода интересных неравенств.

Раздел четвертый. Интегральное исчисление. (Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Приближенное вычисление определенных интегралов. Несобственные интегралы.) Определенный интеграл определяется сначала через первообразную, а затем через предел интегральных сумм; впоследствии устанавливается связь между обоими определениями. Интегрируемость непрерывной функции доказывается с помощью критерия Коши, до введения верхних и нижних сумм. В интересах приложений определенного интеграла вводится «обобщенная интегральная сумма», которая от обычной отличается слагаемыми, равномерно стремящимися к нулю.

В книге есть немало материала, обычно не умещающегося в лекционный курс, но расширяющего кругозор учащихся.

Г. М. Фихтенгольц

435 К. Интегральное исчисление. Том I. Учебник для ВУЗ'ов. Изд. 3-е. Ярник (Integrální počet. 1. díl. Celost. vysokoškolská učebnice. 3. vyd. Jarník Vojtěch. Praha, ČSAV, 1956, 360 s., il., 19, 30 Kcs.), Bibliogr. katal. CSR. Ceske knihy, 1956, № 52, 1055 (чешск.)

436 К. Теория рядов для студентов, высших педагогических школ и для учителей. Фемпль (Teorija redova za studente viših pedagoških škola i za nastavnike. Fempl Stanimir. Belgrade, Naučna Knjiga), 1954, IV, 135 s. (сербо-хорв.)

Элементарные сведения о рядах. Гл. I. Ряды с постоянными членами. Гл. II. Функциональные ряды. Гл. III. Применение рядов. Гл. IV. Элементарные функции комплексного переменного.

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 583

437 К. Математический анализ. I. Георгиев (Математичен анализ. I. Георгиев Г. Ив. София, Наука и изкуство, 1955, 718 стр., 20.30 лв.) (болг.)

В т. I заключаются основы дифференциального исчисления одной и нескольких переменных и интегральное исчисление одной переменной. При составлении своего учебника автор широко использовал советские учебники математического анализа. Список использованных учебников приведен в конце книги.

В. В. Немыцкий

438 К. Теория функций. Ричард (Teoria delle funzioni. Richard Ubaldo. Torino, Casa Ed. Libr. Rosenberg and Sellier, VII, 367 p., s. a., 2800 li.) (итал.)

Необычно аккуратное введение в теорию функций действительного и комплексного переменных. Содержание: гл. I. Кольца, поля, упорядоченные поля; гл. II — n-мерное пространство, элементы теории множеств, метрические пространства, меры Пеано-Жордана, мера Бореля, мера Лебега; гл. III. Функции точки и функции множества, кривые Жордана, длина дуги, теорема Жордана, выпуклые области и выпуклые функции; гл. IV. Комплексные числа, ряды с комплексными числами, степенные ряды; гл. V. Интеграл Римана; гл. VI. Интеграл Лебега; гл. VII. Интеграл Римана-Стилтьеса; гл. VIII. Комплексное переменное, регулярные функции, теорема Коши, вычеты, аналитическое продолже-

ние, ряды Лорана; гл. IX. Гармонические функции.

Изложение сжатое, но ясное. Материал сводится к основным фактам с немногими иллюстрациями приложений. Эти иллюстрации подобраны хорошо, подтверждением чего служит пример бесконечно дифференцируемой функции от x, которая не является регулярной ни в какой точке оси x. W. H. J. Fuchs

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 577

439 К. Гиперболические функции. Шерватов (Hyperbelfunktionen. Scherwatow W. G. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss. 1956, 53 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (М., Гостехиздат, 1954).

Популярные лекции по математике (вып. 16).

440 К. Таблица основных интегралов и методы интегрирования функций. Консультация по высш. матем. для студентов 2 курса всех специальностей. Изд. 2-е, испр. и доп. Полозков Д. П. М., 1957, 10 стр.

441 К. Математические методы физики. II. Элементарная теория распределения. III. Свертка. IV. Ряды Фурье. VI. Преобразования Лапласа. VII. Уравнения колебания струны. VIII. Специальные функции. Шварц (Méthodes mathématiques de la physique. II. Théories élémentaires de distribution. III. Convolution. IV. Séries de Fourier. VI. Transformations de Laplace, VII. Equations des cordes vibrantes. VIII. Fonctions spéciales. Schwartz Laurent. Paris, Centre docum univ., 1956, 1.050 fr.-Multigr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 21, 487 (франц.)

442 К. Введение в математический анализ. Микусинский (Wstęp do analizy matematycznej. Mikusiński Jan. G. Warszawa, PWN, 1957, 268 s., il., 22 zł.), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 17, 249 (польск.)

443 К. Курс математического анализа (Для втузов). Ч. 1. Изд. 10-е, стереотипн. Берман А. Ф. М., Гостехиздат, 1957, 466 стр., илл., 10 р. 15 к.

444 К. Лекции по математическому анализу. Часть 1. Дополнение. Каччопполи (Lezioni di analisi matematica. Parte I. Completamento. Cacciopoli Renato. Napoli, Ed. Treves di L. Lupi, 1956, 273—487 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 667, 591 (итал.)

445 К. Основы математики. Упражнения. Для студентов-химиков и естественников. Первый год. Брунелли (Istituzioni di matematica. Esercizi. Per gli studenti di chimica e scienze naturali. Anno I. (Univ. studi Roma). Brunelli Bruno. Roma, Ed. Libr. Eredi V. Veschi, 1956, 428 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 667, 591 (итал.)

446 К. Обзорные материалы теории функций многих переменных. Гасанов (Чохдəйишəнли функсиялар нəзəриййəсинə даир ичмал. Һəсənов Ə. Ч. Бакы, 1957, 58 сəh. шəкилли, пулсуз) (азерб.)

Настоящая книга является конспектом лекций автора по разделу функций многих переменных математического анализа, прочитанных заочникам. Книга содержит ряд неточных утверждений и формулировок, которые указаны референтом автору и редактору книги. И. И. Ибрагимов

447 К. Вычисление логарифма и показательной функции посредством сложения. 1. Маркс (Additionsverfahren zur Rechnung des Logarithmus und der Exponentialfunktion (I). Marx Helmut. Mitt. math. Semin. Giessen, 1956, № 54, 26 S.) (нем.)

Числа записываются в симметричной двоичной системе, т. е. употребляются знаки 0, +1, —1 так, чтобы между любыми двумя значащими цифрами находилось не менее одного нуля (лишь при этом дополнительном требовании запись единственна).

Даются алгорифмы, содержащие только действия сложения и вычитания, для вычисления с заданным числом N двоичных знаков функций $\ln x$, e^x, $\ln(x+iy)$, e^{x+iy}. При этом требуется таблица N-значных натуральных логарифмов чисел 1 ± 2^{-n}, $1 \pm i2^{-n}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, N/2$.

Максимальное число действий таково ($N = 32$, что дает 10 десятичных знаков): 33 для $\ln x$, 40 для e^x, 120 для $\ln(x+iy)$, 131 для e^{x+iy}. Г. И. Натансон

448 К. Алгебраический анализ. Фернандес-де-Троконис, Бельда (Análisis algebraico. Fernández de Troconiz A., Belda E. Bilbao, Imp. Ed. Moderna, 1957, XXII, 719 p., 180,00 pes.), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 3, 71 (исп.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

449. Об одном ряде Абеля. Клуни (On a certain series of Abel. Clunie J.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, 9, № 3, 132—144 (англ.)

Как известно, рядом Абеля для функции $f(z)$ называется ряд

$$\sum_0^\infty \frac{z(z-n)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(n).$$

Этот ряд, если он сходится, не всегда сходится именно к данной функции $f(z)$. Отправляясь от известных функций, мы можем тем самым с помощью рядов Абеля получать новые функции. Так, для функции $f(z) = \frac{1}{z+1}$ рядом Абеля будет ряд

$$G(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z(z-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}},$$

определяющий собой целую функцию $G(z)$. В статье находится асимптотическое представление функции $G(z)$ при больших $|z|$. Показывается, что в угле $|\arg z| \leqslant \frac{3}{2}\pi - \eta$, $\eta > 0$,

$$G(z) = J(z+1) + H(z+1) + \frac{1}{z+1}[1 - e^{-(z+1)}],$$

где

$$J(-z) = e^z \left\{ \frac{1}{z} + \sum_1^n \frac{c_r}{z^{r+1}} + O\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right) \right\}$$

(c_r — некоторые постоянные) и

$$H(z) \approx \frac{1}{z \ln z}.$$

Отсюда, в частности, следует, что в угле $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \eta$ $G(z) \approx 1/(z+1)$ и в этом смысле функция $G(z)$ схожа с исходной функцией $1/(z+1)$.

А. Ф. Леонтьев

450. Некоторые дополнения к теореме Фробениуса. Цзюй Дэ-хан (Frobenius 定理的若干擴充. 鞠德航), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао Acta sci. natur., 1956, № 2, 285—290 (кит.)

Доказывается теорема: Пусть радиус сходимости ряда $g(x) = \sum_0^\infty b_i x^i$ ($b_i \geqslant 0$) равен единице, причем $x = 1$ является существенно особой точкой для функции

$g(x)$. Тогда для любых функций с ограниченным изменением на интервале $[0, 1]$ из

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_0^n a_i}{\sum_0^n b_i}=1$$

следует

$$\lim_{k\to 1-0}\frac{\sum_0^\infty a_i x^i f(x^i)}{\sum_0^\infty b_i x^i}=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\int_0^{t_{m-1}}\dots\int_0^{t_1}\frac{f(t)}{t_1\dots t_{m-1}}\times$$

$$\times\, dt\,dt_1\dots dt_{m-1},$$

если выполнено одно из следующих трех условий:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^\rho\log\sum_0^\infty b_i x^i=\sigma>0\quad(\rho>0)$;

2) $x=1$ есть единственная существенно особая точка для функции $g(x)$ порядка ρ, причем существует вещественное число α такое, что для всех z $g(z)\neq\alpha$;

3) $\sum_0^\infty b_i x^i\sim\overbrace{\exp\dots\exp}^{n}\left(\frac{1}{1-x}\right)^\rho\ (x\to 1-0,\ \rho>0)$.

В случае, когда $x=1$ является полюсом функции, результат уже известен (РЖМат, 1957, 4115).

Ши Чжун-цы, Цзэн Кэнь-чэнь

451. О некоторых случаях различия между интегралами и рядами. Сарджент (On some cases of distinction between integrals and series. Sargent W. L. C.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 26, 249—264 (англ.)

Положим для $t\geqslant 1$

$$x_\lambda(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\lambda)}\displaystyle\int_1^t(t-u)^{\lambda-1}x(u)\,du, & \lambda>0,\\ x(t), & \lambda=0.\end{cases}$$

Будем говорить, что $\int_1^\infty x(t)\,dt$ ограничен (C,λ), если $t^{-\lambda}x_{\lambda+1}(t)$ ограничено для $t\geqslant 1$, суммируем (C,λ), если $t^{-\lambda}x_{\lambda+1}(t)$ стремится к конечному пределу при $t\to\infty$, и суммируем $|C,\lambda|$ (абсолютно суммируем (C,λ)), если, кроме того, $t^{-\lambda}x_{\lambda+1}(t)$ имеет ограниченную вариацию в $[1,\infty)$. В работе установлены следующие теоремы:

Теорема 1. Если $0\leqslant\mu<\lambda$, $\int_1^\infty x(t)\,K(t)\,dt$ ограничен (C,μ) и $\int_1^\infty x(t)\,dt$ суммируем $|C,\lambda|$, то тогда найдется некоторое $c\geqslant 1$ такое, что: 1) $K(t)$ измеримо и существенно ограниченно в $(1, c)$, 2) $K(t)=0$ почти всюду в (c,∞). Теорема 2. Если $0\leqslant\mu<\lambda+1$, $\int_1^\infty x(t)\,K(t)\,dt$ суммируем $|C,\mu|$ и $\int_1^\infty x(t)\,dt$ суммируем (C,λ), то тогда найдется некоторое $c\geqslant 1$ такое, что: 1) $K(t)$ измеримо и существенно ограниченно в $(1, c)$, 2) $K(t)=0$ почти всюду в (c,∞).

И. И. Огиевецкий

452. Множества и частичные ряды. Петерсен (Sets and subseries. Petersen G. M.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 223—224 (англ.)

Рассмотрим ряд $\sum a_n$ и предположим, что $a_n\neq 0$ для всех n. Заменяя часть членов ряда нулями, образуем частичные ряды для исходного ряда. Эти частичные ряды можно поставить в однозначное соответствие с бесконечными двоичными разложениями чисел промежутка $(0,1)$ по следующему правилу. Точка $\xi=0$, $b_1b_2\dots b_n\dots$ считается соответствующей частичному ряду, если $b_n=0$, когда n-й член основного ряда заменяется нулем, и $b_n=1$, когда n-й член сохраняется. Теперь можно говорить о множестве частичных рядов первой категории, меры нуль и т. д.

Если члены ряда $\sum a_n$ образуют положительную монотонно убывающую последовательность, то существует такой «индекс» p, что ряд $\sum a_n^q$ сходится для $q>p$ и расходится для $q<p$. В работе устанавливается, что для подобного ряда $\sum a_n$ множество частичных рядов, имеющих индекс, отличный от индекса исходного ряда, будет первой категории.

Г. М. Фихтенгольц

453. О формуле Иман для бесконечных рядов

$$\sum^\infty f(n^2)=\int_0^\infty f(n^2)\,dn-\frac{1}{2}f(0).$$ **Като, Исобэ**

(今井氏の無限級數總和式«$\sum^\infty f(n^2)=\int_0^\infty f(n^2)\,dn-\frac{1}{2}f(0)$»について. 加藤信義, 磯部豊作), 電氣通信學會雜誌, Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan, 1956, **39**, № 5, 487—492 (япон.)

454. Норма итераций регулярной матрицы. Петерсен (The norm of iterations of regular matrices. Petersen G. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, **53**, № 2, 286—289 (англ.)

Пусть $B=\{b_{mn}\}$, $t_n=\sum b_{n\nu}s_\nu$, $\tau_m=\sum b_{m\nu}t_\nu$. Матрицу, соответствующую непосредственному преобразованию s_ν в τ_m, назовем итерацией матрицы B и обозначим через $B^2=(b^2_{mn})$, где $b^2_{mn}=\sum_{k=1}^\infty b_{mk}b_{kn}$. Повторяя указанный процесс, приходим соответственно к матрицам $B^3,\dots, B^\nu$. Матрицы A и B назовем o-совместными, если любая ограниченная последовательность, суммируемая каждой из матриц, суммируется ими к одному же числу. Матрицы A и B o-эквивалентны, если они суммируют одни и те же ограниченные последовательности и, кроме того, o-совместны. Норму матрицы $A=\{a_{mn}\}$ определяют следующим образом $h(A)=\sup\limits_m\sum_{n=1}^\infty|a_{mn}|$. Норма метода суммирования A определяется (Брудно, Матем. сб., 1945, **16**, 191—247) как $\|A\|=\inf h(A)$, где inf берется по всевозможным матрицам, o-эквивалентным матрице A. В работе устанавливается следующий результат: Пусть $A=(a_{mn})$ — регулярная (теплицева) матрица, для которой $\limsup\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^\infty|a_{mn}|=M>1$, и пусть существует подпоследовательность $\{n_\mu\}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\mu=1}^\infty|a_{mn_\mu}|=0.$$

Тогда существует регулярная матрица B, o-эквивалентная матрице A, причем $\|B^\nu\|\geqslant M^{\nu-1}$.

Приводится также краткое доказательство следующей теоремы Брудно (см. цитированную выше работу): Если $A=\{a_{mn}\}$ и $B=\{b_{mn}\}$ — регулярные матрицы и B суммирует все ограниченные последовательности, суммируемые A, то $\|B\|\geqslant\|A\|$.

И. И. Огиевецкий

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

455. Порождающие функции типа Аппеля для классических ортогональных полиномов. Смит (Generating functions of Appell form for the classical orthogonal polynomials. Smith R. C. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 636—641 (англ.)

Говорят, что последовательность полиномов $P_n(x)$ (степени n) будет типа Аппеля, если она может быть представлена через порождающую функцию вида

$$K(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n P_n(x) = A(g(w))\,\psi(xg(w)) \quad \text{с}$$

$$g(w) = g_1 w + g_2 w^2 + \ldots;$$

$$A(y) = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots,$$

$$\psi(t) = 1 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \ldots,$$

где коэффициенты суть постоянные. Найдены необходимые условия, когда полиномы Якоби, Эрмита и Лагерра будут полиномами типа Аппеля. В частности, доказана теорема: Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ будут аппелева типа, если разность $\alpha-\beta$ принимает значения -1, 0, 1. В. К. Захаров

456. Формулы приведения для классических полиномов и функций. Тоскано (Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici. Toscano Letterio), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 1—2, 117—140 (итал.)

Рекуррентная формула $G_{n,\nu}(x) - xG_{n-1,\nu}(x) + (n+\nu)G_{n-2,\nu}(x) = 0$, $G_{0,\nu} = 1$, $G_{1,\nu} = x$ определяет полиномы $G_{n,\nu}(x)$, которые при $\nu = 1$ обращаются в полиномы Эрмита (с весовой функцией $e^{-x^2/2}$), а при $\nu = 0$ — в полиномы, которые называются ассоциированными с полиномами Эрмита (также присоединенными полиномами Эрмита, полиномами Эрмита второго рода). Эти полиномы изучались в других статьях автора и Палама (РЖМат, 1955, 2287, 2748, 3825, 3826; 1956, 3118). В этой статье $G_{n,\nu}$ рассматриваются при любом натуральном ν и для них даются: представление в виде определителя Якоби; граница $\sqrt{\nu+n-1}+\sqrt{\nu+n}$ для наибольшего по модулю нуля; рекуррентное соотношение для туранового выражения

$$\Delta_n \left(\equiv G_{n,\nu}^2 - G_{n-1,\nu} G_{n+1,\nu}\right) = G_{n-1,\nu}^2 + (n+\nu)\,\Delta_{n-1};$$

рекуррентные формулы для самих $G_{n,\nu}$, из которых отметим

$$G''_{n,\nu} + xG'_{n,\nu} + (n+2\nu+2)\,G_{n,\nu} = 2(n+\nu+1)\,G_{n,\nu-1};$$

некоторый аналог формулы Родрига $\nu!\,G_{n-1,\nu} = (-1)^{n+\nu}\left[h_\nu \frac{d^{n+\nu}}{dx^{n+\nu}} - H_\nu \frac{d^{n+\nu}}{dx^{n+\nu}} h_0\right] e^{-x^2/2}$, где H_ν — полиномы Эрмита, h_ν — функция Эрмита второго рода; разложения по полиномам Эрмита, например $G_{n,\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\leqslant \nu/2} (-1)^r \binom{n-r}{r} (\nu+1)_r H_{n-2r}(x)$; выражение через гипергеометрическую функцию двух аргументов. Используя эти свойства и соотношение $h_\nu(x) H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x) h_{n+\nu}(x) = \nu!\, e^{x^2/2} G_{n-1,\nu}(x)$, автор выводит несколько «формул приведения», выражающих $h_{n+\nu}$ через h_ν и полиномы Эрмита. Вычислены некоторые интегралы, содержащие $G_{n,\nu}$.

Большинство найденных соотношений имеет место и для целого отрицательного ν. В связи с равенствами

$$G_{n,-\rho}(x) = i^{\rho-1} H_{\rho-1}(-ix)\, H_{n-\rho+1}(x) \quad (1 \leqslant \rho \leqslant n+1) \text{ и}$$

$$G_{n,-n-\sigma-2}(x) = i^n G_{n,\sigma}(-ix) \quad (\sigma \geqslant 0),$$

это дает многочисленные соотношения для произведений полиномов Эрмита. В конце статьи показано, что используемые методы переносятся и на случай полиномов Лагерра. Г. К. Энгелис

457. О вычислении выражений $J_\nu(Z)\,Y_{\nu+p}(z) \pm Y_\nu(Z)\,J_{\nu+p}(z)$. Ма Минь-юань. Брепсон (Sur le calcul des expressions $J_\nu(Z)\,Y_{\nu+p}(z) \pm Y_\nu(Z)\,J_{\nu+p}(z)$. Ma Min-Yuan, Brepson Roger), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 5, 548—550 (франц.)

Дается видоизменение асимптотических формул для указанных в заголовке выражений, составленных из функций Бесселя первого и второго рода, при больших по модулю значениях независимого переменного. Авторы указывают, что новые формулы более удобны для вычислений и позволяют оценить величину погрешности. И. Б. Погребысский

458. Суммирование медленно сходящихся рядов Фурье, встречающихся в задаче движения жидкости. Миллер (Summation of a slowly convergent Fourier series occurring in a fluid motion problem. Miller G. F.), Proc. Roy. Soc., 1956, A237, № 1208, 17—27 (англ.)

Рассматриваются методы суммирования рядов, возникающих в задаче о неустановившемся течении жидкости, заданных формулой

$$S(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} b_{2r-1} \sin(2r-1)\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2) \qquad (1)$$

где

$$b_{2r-1} = (2r + \sqrt{2} - 2)\,a_{2r} + (2r - \sqrt{2})\,a_{2r-2},$$

$$[2r^2 + (2\sqrt{2}-1)r]\,a_{2r+2} + 2[2r^2 - r + \sqrt{2} - 1]\,a_{2r} +$$

$$+ [2r^2 - (2\sqrt{2}+1)r + 2]\,a_{2r-2} = 0, \quad a_0 = 0.$$

$$a_2 = 1.$$

Устанавливается связь между $S(\theta)$ и гипергеометрическими функциями, и показывается, что b_{2r-1} асимптотически ведет себя как

$$(-)^r r^{-\sqrt{2}}\,(A + B\log r) \text{ при } r \to \infty,$$

где A и B — константы.

«Основной» метод суммирования (заключающийся в том, что ряд разбивается на два ряда, один из которых быстро сходится, а другой оценивается через элементарные функции и гамма-функцию), разбирается для рядов $\sum_0^\infty p_r z^r$, где z — комплексное переменное, p_r имеет асимптотическое представление (для больших r) вида

$$p_r \sim \lambda^r \frac{\Gamma(r-k)}{r!}\left\{\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{r-k-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_2}{(r-k-1)(r-k-2)} + \ldots\right\}, \qquad (2)$$

причем λ, k, γ_0, γ_1, γ_2, ... не зависит от r. Без доказательства утверждается, что метод суммирования применим когда p_r выражается через конечную сумму слагаемых вида (2) и слагаемых, полученных почленным дифференцированием выражения (2) по k. Приведены два метода суммирования ряда (1), основанные на «основном» методе суммирования. В пер-

вом методе используется связь $S(\theta)$ с гипергеометрической функцией, во втором методе коэффициенты b_{2r-1} получаются как решения некоторого разностного уравнения. Исследуется поведение $S(\theta)$ при $\theta \to \pi/2$, а также доказывается, что ряд, полученный после применения преобразования Эйлера к ряду типа (1), сходится в угле $-\pi/3 < \theta < \pi/3$.

В. К. Захаров

459. Квадрат и произведение гипергеометрических функций. Сандем (A square and a product of hypergeometric functions. Sandham H. F.) Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 153—154 (англ.)

Доказываются известные теоремы Клаузена и Орра о квадрате и произведении гипергеометрических функций.

В. К. Захаров

460. Замечание о теореме Фату-Рисса. Авакумович (Remark on Fatou-Riesz' s theorem. Avakumović Vojislav G.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 85—92 (англ.)

Референту не удалось проследить за рассуждениями автора вследствие обилия в статье опечаток и неточностей. Так, теорема A и лемма на стр. 87 (теорема Винера—Палея) сформулированы неправильно. Формулировка основного результата автора (теорема I на стр. 87) представляется референту также неточной.

Б. И. Коренблюм

461 К. Специальные функции и их приложения. Лебедев (Speciální funkce a jejich použití. Lebeděv N. N. Překl. z rušt. Praha, SNTL, 1956, 296 s., il., 29 Kčs) Bibliogr. katal. CSR. Ceske knihy, 1956, № 52, 1055 (чешск.)

Перевод с русского (РЖМат, 1955, 1829 К).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

462. Соотношение между критериями реализации для функциональных преобразований. Гумовский (Relation entre un critère de réalisabilité, et les transformations fonctionnelles. Gumowski Igor), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 11, 1466—1468 (франц.)

Рассматривается неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(D)\,y(t) = f(t) = \begin{cases} f_1(t) & t < 0, \\ f_2(t) & t > 0, \end{cases}$$

где $L(D)$ — оператор порядка n, конечного или бесконечного, и $D = d/dt$. Задаются начальные условия, обеспечивающие единственность решения данного уравнения посредством, соответственно, преобразования Лапласа и преобразования Фурье. Приводится пример, показывающий, что указанные преобразования могут приводить к различным решениям. Решения, доставляемые преобразованием Лапласа и Фурье, совпадают, если функция L, порождающая оператор $L(D)$, есть решение уравнения Фредгольма

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,\frac{1}{L(j\omega)}\,d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ g(t) & t > 0. \end{cases}$$

Л. Я. Цлаф

463. Соотношение между преобразованиями Лапласа некоторой функции и ее ступенчатой аппроксимацией. Дёч (Der Zusammenhang zwischen den Laplace-Transformiertien einer Funktion und der zugeordneten Treppenfunktion. Doetsch G.), Regelungstechnik, 1957, 5, № 3, 86—88 (нем.; рез. англ.)

Пусть дана функция $y(t)$, определенная на интервале $(0, \theta)$ и пусть $\vartheta < \theta$. Образуем функцию

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(n\theta) & \text{при } n\theta \leqslant t \leqslant n\theta + \vartheta \\ 0 & \text{при } n\theta + \vartheta < t < (n+1)\,\theta. \end{cases}$$

Имеет место предложение: Пусть $y(t)$ в каждом конечном интервале имеет ограниченную вариацию и дифференцируема при $t \geqslant T > 0$. Пусть, далее, существует интеграл

$$\int_T^{\infty} e^{-p_0 t}\,|\,y'(t)\,|\,dt$$

для некоторого $p_0 > 0$. Тогда, если $Y(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \times y(t)\,dt$ — преобразование Лапласа функции $y(t)$, при $Rp > P_0$ выполняется соотношение

$$\frac{y(+0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p\theta n}\,\frac{y(\theta n + 0) + y(\theta n - 0)}{2} = \frac{1}{\theta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y\left(p + jm\frac{2\pi}{\theta}\right).$$

При условии непрерывности функции $y(t)$ последняя формула может быть записана в виде

$$\bar{Y}(p) = \frac{1}{p}\,(1 - e^{-p\vartheta})\left\{\frac{1}{2}\,y(+0) + \frac{1}{\theta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y\left(p + jm\frac{2\pi}{\theta}\right)\right\}, \quad (*)$$

где $Y(p)$ есть преобразование Лапласа ступенчатой функции $\bar{y}(t)$. Автор отмечает, что впервые формула $(*)$ была дана Цыпкиным (РЖМат, 1955, 258), и уточняет предположения, при которых справедлив вывод этой формулы.

Л. Я. Цлаф

464. Теоремы об интегрируемости для преобразований Лапласа—Стилтьеса. Боас, Гонсалес-Фернандес (Integrability theorems for Laplace-Stieltjes transforms. Boas R. P., Jr, González-Fernández J. M.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 48—53 (англ.)

Дается обобщение результатов Хейвуда (РЖМат, 1956, 5963)

Теорема 1. Пусть μ — функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале $[0, R]$, неубывающая на некотором интервале $[0, r]$ и пусть

$$\Phi(s) = \int_0^{\to\infty} e^{-st}\,d\mu(t) \qquad (1)$$

существует для всех $s > 0$. Пусть $\psi(s)$ — положительная измеримая функция на $[a, R]$, $a > 0$ для каждого $R > a$ и пусть $\psi(s) = O(e^{\delta s})$ при $s \to \infty$ для каждого положительного δ. Положим $\Psi(t) = \int_0^{\infty} e^{-st}\psi(s)\,ds$. Тогда $\Phi(s)\,\psi(s) \in L(a, \infty)$, если и только если $\int_0^r \Psi(t)\,d\mu(t) < \infty$.

Теорема Хейвуда получается отсюда, если положить $\psi(s) = s^{-\gamma}$ и предположить, что μ есть интеграл и не убывает на $(0, \infty)$.

Теорема 2. Пусть μ — функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале $[0, R]$, неубывающая на некотором $[r, \infty]$ и пусть (1) существует для всех $s > 0$. Пусть $\psi(s)$ — положительная функция на $(0, a)$, $a > 0$, принадлежащая $L(\delta, a)$ для каждого δ, $0 < \delta < a$. Обозначим $\psi_{(0)}(s) = \psi(s)$,

$$\psi_{(j)}(s) = \int_s^a du_j \ldots du_2 \int_{u_2}^a \psi(u_1)\, du_1$$

(j интегрирований). Положим $\Psi_k(t) = \int_0^a e^{-st}\psi_{(k)}(s)\, ds$.

Если для некоторого неотрицательного целого k

$$\psi_{(k)}(s) \in L(0, a), \text{ но } \psi_{(j)}(s) \notin L(0, a) \quad j < k$$

и если при $k > 0$ $\Phi(0+) = \Phi'(0+) = \ldots = \Phi^{(k-1)}(0+) = 0$, тогда $\Phi(s)\,\psi(s) \in L(0, a)$, если и только если

$$\int_r^\infty t^k \Psi_k(t)\, d\mu(t) < \infty.$$

В случае, когда μ есть ступенчатая функция со скачками, равными целым числам, последняя теорема может быть формулирована как теорема о степенных рядах. Л. Я. Цлаф

465. Преобразование Лапласа логарифмически-нормальной функции распределения. Хигути (對數 正規型分布函數の Laplace 変換. 樋口伊佐夫), 統計數理研究所彙 報, Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 4, № 2, 8—18 (японск; рез. нем.)

В практических задачах часто встречается интеграл, который имеет вид преобразования Лапласа логарифмически-нормальной функции распределения. Такие интегралы встречаются в технических задачах микроволн и в коллоидной статистике. Вычисляются приближенные значения интегралов методом перевала и изучаются их свойства. Из резюме автора.

466. О связи между преобразованиями Лапласа функций $g(t)$ и $g(it)$. Лавуан (Sur le passage de l'image de $g(t)$ à celle de $g(it)$ dans la transformation de Laplace. Lavoine Jean), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 8, 991—993 (франц.)

Преобразование Лапласа функции $g(t)$ определяется автором по формуле

$G(p) = \mathrm{Pf} \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt} dt$ (Pf = Partie fini, по Адамару).

Если функция $g(z)$ аналитична при $\mathrm{Re}\, z > -\alpha$, $\mathrm{Im}\, z > -\alpha$ ($\alpha > 0$), однозначна при $\mathrm{Re}\, z > 0$, в окрестности каждой из точек $z = iy_n$ допускает разложение

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{c_{nm}}{(z - iy_n)^m} + c_n \ln(z - iy_n) + h(z)$$

(ν не зависит от n, $|c_{mn}| < A y_n^k$, $|h(z)| < A|z|^k$) и вне кругов $|z - iy_n| \leqslant \beta < \alpha$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| \leqslant A|z|^k$, то $G_1(p) = \lim_{\substack{\xi\to\infty \\ |\xi - iy_n| \geqslant \beta}} \mathrm{Pf} \int_0^\xi g(iy) \times e^{-py} dy$ связана с $G(p)$ соотношением

$$G_1(p) = \frac{1}{i} G\left(\frac{p}{i}\right) - \pi\left(\frac{1}{2} r_0 + \sum_1^\infty r_w\right),$$

где r_n — вычет функции $g(z)\, e^{tpz}$ при $z = iy_n$ и r_0 — ее вычет при $z = 0$. Приводятся некоторые примеры.

Г. Е. Шилов

467. О двух теоремах операционного исчисления. Бхонсле (On two theorems of operational calculus. Bhonsle B. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 2, 95—102 (англ.)

Устанавливаются следующие теоремы:

1. Если $\psi(p) \doteqdot \varphi(x)$, $\varphi(p) \doteqdot x^\nu h(x)$,

$h(p) \doteqdot g(x)$ и $p^{2-\lambda} f(p) \doteqdot g(x)$, то

$$\psi(p) = p\, \frac{\Gamma(\nu+2)\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda-\nu)}{\Gamma(\lambda+2)} \int_0^\infty s_2^{\nu-\lambda} \times$$

$$\times F_1\left[\begin{matrix}\lambda-\nu,\ 2 \\ \lambda+2\end{matrix};\ 1 - \frac{p}{s}\right] g(s)\, ds \qquad (*)$$

в предположении, что $R(p) > 0$, $R(\nu+2) > 0$, $R(\lambda) > 0$, λ — не целое, существует преобразование Лапласа для $|g(s)|$, и интеграл в правой части (*) абсолютно сходящийся.

2. Если $\psi(p) \doteqdot f(x)$, $f(p) \doteqdot h(x)$,

$p^{-2\nu} h(1/p) \doteqdot g(x)$ и $F(p) \doteqdot x^{1/2-\nu-l} g(x)$, то

$$\psi(p) = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma\left(\nu - l + \frac{5}{2}\right)}\, p \int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}2,\ 2+2\nu \\ \nu - l + 5/2\end{matrix};\ -\frac{p}{t}\right] \times$$

$$\times t^{l-\nu-5/2} F\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

в предположении, что $R(p) > 0$, $R(2+2\nu) > 0$, $R(\mu) > -1$, $R(\mu + 2\nu) > -1$, $R(2 - \rho) > 1$, где $t^{l-\nu-1/2} F(1/t) = O(t^\mu)$ для малых t и $t^{l-\nu-1/2} F(1/t) = O(t^\rho)$ для больших t. Приведены приложения к функциям Бейтмана, Мак-Роберта и полиномам Сонина.

Л. Я. Цлаф

468. Интегральные преобразования и анализ линейных систем. II. Дери (Les transformations intégrales et l'analyse des systèmes linéaires. 2-me partie. Dery Marcel), Revue E, 1956, 1, № 13, 325—344 (франц.; рез. флам.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 5123.

Обзорное изложение основных свойств преобразования Фурье, частично снабженное доказательствами и содержащее многочисленные примеры. Для функций $f(t)$, у которых отсутствует обычное преобразование Фурье

$$F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-j\omega t} f(t)\, dt,$$

рассматривается таковое с дополнительным предельным переходом в виде

$$F\{f(t)\} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} f(t)\, dt\right],$$

при этом широко привлекается импульсная δ-функция. В частности, рассматривается преобразование Фурье функции, разложенной в ряд Фурье, а также и самой δ-функции. Среди основных свойств преобразования Фурье приводятся, в частности, теоремы свертывания оригиналов и изображений и теорема Парсеваля.

Далее рассматривается применение преобразования Фурье к интегрированию интегро-дифференциального уравнения, соответствующего линейной системе с постоянными сосредоточенными параметрами, а также системы интегро-дифференциальных уравнений. Вы-

водятся закон Ома в области спектральных частот и интеграл Дюамеля для преобразования Фурье. Рассматривается применение преобразования Фурье к исследованию идеального фильтра низких частот.

Указывается возможность экспериментального определения частотной характеристики, входящей в выражение закона Ома для спектральных частот, а также возможность построения частотной характеристики сложной системы по характеристикам составных частей системы. Приводятся примеры исследования частотных характеристик в комплексной плоскости и построения графиков модуля и аргумента частотных характеристик. Н. А. Бразма

469. Интегральные преобразования и анализ линейных систем. III. Дери (Les transformations intégrales et l'analyse des systèmes linéaires. 3-me partie. Dery Marcel), Revue E, 1956, **1**, № 14, 383—395 (франц.; рез. флам.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 5123, часть II — реф. 468.

Рассматриваются соотношения между частотной характеристикой $Y(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ и переходными функциями $\omega(t)$ и $h(t)$ линейной системы, выражающими процесс при воздействии единичного импульса соответственно единичной функции. Различаются сильная и слабая устойчивости систем (последняя существует в случае, если частотная характеристика системы не имеет полюсов правее мнимой оси и не имеет кратных полюсов на мнимой оси).

Выводятся выражения функций $\omega(t)$, $h(t)$ и их преобразований Лапласа $Y(p)$ соответственно $H(p)$, содержащие одну из функций P и Q, а также взаимные соотношения между функциями P и Q. Примером таких зависимостей в случае сильной устойчивости является равенство

$$\omega(t) - P(\infty)\,\delta(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \omega t\,[P(\omega) - P(\infty)]\,d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \omega t Q(\omega)\,d\omega$$

(см. также РЖМат, 1957, 7987). Полученные соотношения пояснены на примерах электрических цепей с сосредоточенными параметрами R, L и C.

При сильной устойчивости дополнительно рассматриваются соотношения между P и Q, содержащие интегрирование по логарифму частот, например

$$Q(\omega) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_{\theta=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dP}{d\theta} - \left(\frac{dP}{d\theta}\right)_{\theta=0}\right\} \times \ln \operatorname{cth}\frac{|\theta|}{2}\,d\theta,$$

где $\theta = \ln(\eta/\omega)$, а η — переменная интегрирования, имеющая смысл частоты. Кроме того, приводятся аналогичные предыдущему соотношения между функциями φ и G, определяемыми равенством

$$Y(j\omega) = e^{G(\omega) + j\varphi(\omega)},$$

причем предполагается, что у функции $\ln Y(p)$ все полюсы расположены левее мнимой оси. После перехода к десятичным логарифмам отсюда получаются формулы, названные автором формулами Боде (Bode). Приводятся примеры. Библ. 13 назв. Н. А. Бразма

470 К. Символическое исчисление двух переменных и его приложения. Поли, Дельрю (Le calcul symbolique à deux variables et ses applications. Poli L., Delerue P.), Mém. Sci. Math., Paris, 1954, № 127, 79 p.) (франц.)

После краткого исторического введения авторы определяют в гл. I

$$f(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ps-qt}F(s, t)\,dsdt$$

как образ $F(s, t)$. Предполагается, что двойной интеграл абсолютно сходится. Рассматриваются область сходимости и элементарные свойства двойных интегралов Лапласа и формулы обращения. В гл. II описываются «правила» операционного исчисления, в гл. III изучаются преобразования $F(xy)$, $F(x \pm y)$, прообразами которых являются $f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ и т. д. В гл. IV развиваются применения к оценке интегралов, интегралов решений дифференциальных уравнений в частных производных и даются некоторые приложения к изучению «функции Бесселя третьего порядка» и полиномов Лагерра двух переменных. Имеется приложение, включающее в себя операционное исчисление n переменных и библиографию. Брошюра, по-видимому, является первой по этим вопросам на французском языке. Для иностранцев она не дает ничего нового, так как эти вопросы более полно изложены в книге Фёлькера и Дёча (Voelker, Doetsch, Die zweidimensionale Laplace—Transformation, Birkhäuser, Basel, 1950) или в гл. XVI книги Ван-дер-Поля и Бреммера (van der Pol, Bremmer, Operatinal calculus, Cambridge, 1950). Исключение составляет библиография, которая является более обширной, чем встречающаяся где-либо в других публикациях. К сожалению, ценность библиографии уменьшается за счет того, что книги и статьи даются вперемежку, в некоторых названиях допущены ошибки, ссылки приведены не полностью и иногда неправильно.

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 243

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

471. Некоторые применения теории обобщенных функций Лорана Шварца к задачам электрических цепей. Клавье (Some applications of the Laurent Schwartz distribution theory to network problems. Clavier P. A.), Proc. Sympos. Mod. Network Synthesis, 5, New York, 1955, Brooklin, 1956, 249—265 (англ.)

После приведения кратких сведений об обобщенных функциях рассматриваются следующие конкретные вопросы, исследование которых не отличается до некоторой степени от применения обычных формальных действий над импульсной δ-функцией: дифференциальное уравнение цепи параллельного соединения постоянных элементов L и C при воздействии прямоугольного импульса тока; свертка и преобразование Фурье обобщенных функций; исследование линейных дифференциальных уравнений посредством преобразования Фурье обобщенных функций, преимущественно уравнений с постоянными и с периодическими коэффициентами; линейные дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами. Рассмотренных вопросов частично касался референт в своей работе (Zinātniskie raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1957, 10, № 3, 59—69). Н. А. Бразма

472. О выводе принципа двойственности в гидравлике и в термодинамике. Ломбардо (Sulla deduzione dei principi di reciprocita nell'idraulica e nella termodinamica. Lombardo Giorgio. Atti Accad. Ligure, 1952 (1953), 9, 332—334) (итал.)

Если $q = -\mu \operatorname{grad} h$, $\operatorname{div} q = 0$, $q' = -\mu \operatorname{grad} h'$, $\operatorname{div} q' = 0$, то применение теоремы Гаусса к замкнутой поверхности σ дает теорему двойственности

$$\int_\sigma h'q \times n d\sigma = \int_\sigma hq' \times n d\sigma,$$

где $\times$ обозначает скалярное умножение.

L. M. Milne-Thomson

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 81

См. также: 246, 268, 294, 389, 396, 397, 402 К, 410, 492, 503, 504

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

473. Пример из теории топологических линейных пространств. Кли (An example in the theory of topological linear spaces. Klee V. L., Jr), Arch. Math., 1956, 7, № 5, 362—366 (англ.)

Топологическое линейное пространство E обладает свойством (а), если в нем есть достаточное число непрерывных линейных функционалов, т. е. если (а) для любого $x \in E \sim \Phi$ найдется такой непрерывный линейный функционал $f \in E^*$, что $f(x) \neq 0$.

Здесь Φ — некоторый «нейтральный» элемент пространства E (нулевой элемент в случае нормированного линейного пространства) и $E \sim \Phi$ — множество, состоящее из всех элементов E, отличных от Φ.

Обсуждается следующая задача Хенриксена (M. Henriksen): Пусть E — хаусдорфово линейное пространство, обладающее свойством (а), M — замкнутое подпространство из E и Q — фактор-пространство E/M. При каких дополнительных условиях E/M также обладает свойством (а)?

Доказывается, что дополнительное условие действительно необходимо, для чего строится пример такого сепарабельного метрического линейного пространства E, что: 1) в E существует достаточное число непрерывных линейных функционалов; 2) для любого целого $n \geqslant 2$ существует семейство замкнутых линейных подпространств M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, прямая сумма которых есть E, и для каждого i в факторпространстве E/M_i нет нетривиальных непрерывных линейных функционалов.

Это пространство E получается путем введения соответствующей топологии в декартово произведение счетного числа пространств типа $L_{1/2}(0, 1)$.

В. И. Соболев

474. Слабые локально мультипликативно-выпуклые алгебры. Уорнер (Weak locally multiplicatively-convex algebras. Warner Seth), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 1025—1032 (англ.)

Пусть E — алгебра над полем K вещественных или комплексных чисел. Топология в E называется локально мультипликативно-выпуклой (короче: локально m-выпуклой), если она локально выпукла и обладает фундаментальной системой таких окрестностей нуля U, что $U^2 \subset U$. Пусть E' — «тотальное» пространство линейных функций на E со значениями из K и $\sigma(E, E')$ — определяемая им слабая топология в E. $\sigma(E, E')$ локально m-выпукла (соответственно умножение непрерывно в $\sigma(E, E')$) тогда и только тогда, когда ядро (нуль-пространство) каждой $g \in E'$ содержит слабо замкнутый идеал конечной фактор-размерности (соответственно слабо замкнутое подпространство J конечной фактор-размерности такое, что JE и EJ также содержатся в ядре g). Пусть E — алгебра всех полиномов над K без свободного члена. Для любого множества $L \subset K$, содержащего 0, существует такая локально m-выпуклая топология в E, что пространство всех непрерывных мультипликативных линейных форм на E, наделенное слабой топологией, гомеоморфно L.

Д. А. Райков

475. Совместимые полунормы в векторной структуре. Гофман (Compatible seminorms in a vector lattice. Goffman Casper), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 8, 536—538 (англ.)

Пусть X — векторное пространство, ω — отношение порядка в X, превращающее X в структуру X_ω, и X'_ω — линейная оболочка совокупности всех положительных линейных функций на X_ω, причем для каждого $x \neq 0$ существует такое $f \in X'_\omega$, что $f(x) \neq 0$. Полунорма $p(x)$ на X называется совместимой с ω, если $p(x) \geqslant p(y)$ при $|x| \geqslant |y|$; локально выпуклая топология в X называется совместимой с ω, если ее можно задать полунормами, совместимыми с ω. Для каждого ω существует сильнейшая локально выпуклая топология τ_ω в X, совместимая с ω, причем пространством всех линейных функций на X, непрерывных в τ_ω, служит X'_ω. Если в X имеется банахова топология, совместимая с ω, то она совпадает с τ_ω и тем самым единственна.

Д. А. Райков

476. О линейных ретрактах. Павел (Asupra retractelor liniare. Pavel Monica), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955, Timișoara Acad. RPR, 1956, 357—359 (рум.; рез. русск., франц.)

Устанавливаются следующие теоремы: 1) Для того чтобы подпространство E_1 топологического векторного пространства E было линейным ретрактом E (т. е. чтобы $E_1 = p(E)$, где p — непрерывный проектор), необходимо и достаточно, чтобы E_1 обладало в E топологическим дополнением; 2) если подпространство E_1 банахова пространства E имеет конечную коразмерность, то линейный непрерывный оператор, отображающий E_1 в банахово пространство F, допускает непрерывное продолжение на E со значениями в F. Обе теоремы вытекают непосредственно из известных предложений, формулируемых, например, в сводке результатов (стр. 11—12) к монографии Бурбаки (реф. 516К).

С. Н. Крачковский

477. Об одном классе банаховых пространств. Рутицкий Я. Б., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 230—234

Обзорный доклад на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.) с изложением результатов автора и М. А. Красносельского по теории пространств Орлича.

В частности, рассматриваются вопросы об одном новом определении слабой сходимости в пространствах Орлича, порожденных N'-функциями, не удовлетворяющими Δ_2-условию, и о построении N'-функций, эквивалентных дополнительным к заданным (По последнему вопросу см. РЖМат, 1956, 582).

В. И. Соболев

478. Об однозначности представления функций многих переменных суперпозицией функций меньшего числа переменных в банаховых пространствах. Тр е н о г и н В. А., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 2, 184—187

Рассматриваются функции, аргументы и значения которых суть элементы банаховых пространств. Изучается вопрос о представлении функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ в следующей форме:

$$f = y_{n+l}, \quad y_{n+s} = f_s\left(y_{\alpha(1,s)}, \; y_{\alpha(2,s)}, \; \ldots, \; y_{\alpha(k_s,s)}\right), \tag{1}$$

$$s = 1, \; 2, \; \ldots, \; l; \qquad 2 \leqslant k_s \leqslant n-1; \qquad \alpha(j, \; s) < n+s$$

$$(j = 1, \; 2, \; \ldots, \; k_s), \qquad y_i = x_i \qquad (i \leqslant n).$$

Это представление называется однозначным, если для любого другого представления $f = y^*_{n+l}, \ldots,$ сходного в некотором смысле с данным, будет

$$y^*_{n+s} = \varphi_s(y_{n+s}), \qquad s = 1, \; 2, \; \ldots, \; l.$$

Оказывается, что нарушение однозначности, если оно имеет место, наступает, вообще говоря, в каких-то отдельных подпространствах. Так, в одном из случаев нарушение однозначности представления (1) возможно лишь тогда, когда в двух пространствах Y_{n+s} и Y_{n+t} существуют такие подпространства $\tilde{Y}_{n+s}$ и $\tilde{Y}_{n+t}$, что

$$f(x_1, \; \ldots, \; x_n) = \varphi\left(p\left(\tilde{y}_{n+s}\right) + q\left(\tilde{y}_{n+t}\right)\right),$$

причем существуют $[dp/d\tilde{y}_{n+s}]^{-1}$ и $[dq/d\tilde{y}_{n+t}]^{-1}$. Здесь прописными буквами обозначены пространства, составленные из элементов, обозначенных теми же, но строчными буквами, p и q — некоторые функции. Зависимость φ от целого ряда других элементов явно не показана.

Начало статьи посвящено формулировке некоторых теорем о зависимых функциях в банаховых пространствах. М. К. Гавурин

479. Теория Фредгольма. Гр о т е н д и к (La théorie de Fredholm. Grothendieck A.), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 4, 319—384 (франц.)

Впервые в абстрактном виде теория Фредгольма была изложена в работах Растона (Ruston A. F., Proc. London Math. Soc., 1951, ser. 2, 53, 109—124, 1951, ser. 3, 1, 327—384) для операторов с конечными следами, действующих в банаховом пространстве (класс операторов, введенный Шаттеном, естественно возникающий в теории топологических тензорных произведений). В реферируемой статье дано изложение теории Фредгольма с этой общей точки зрения, но в иной форме, чем у Растона. В первой главе рассматриваются различные вопросы из мультилинейной алгебры, необходимые для построения теории; сюда относятся тензорные и внешние произведения линейных операторов в векторных пространствах, фундаментальные мультилинейные формы, с помощью которых строятся определитель Фредгольма и его миноры (для конечномерного оператора), рекуррентные соотношения между фундаментальными формами, формулы Фредгольма. Во второй главе прежде всего изложены основные сведения относительно топологических тензорных произведений банаховых пространств, после чего теория Фредгольма в собственном смысле получается предельным переходом от конечномерных операторов к произвольным операторам рассматриваемого класса. В конце главы теория обобщается на локально выпуклые пространства. В третьей главе сначала рассмотрен вопрос об определении операторов Фредгольма интегралами, а потом показано, как предыдущая общая теория может быть применена к различным частным случаям. Классический случай интегрального оператора с непрерывным ядром рассмотрен довольно подробно, а другие случаи (операторы Фредгольма в пространстве $L^1(\mu)$, в ядерных пространствах, в пространствах голоморфных функций) лишь эскизно.

С. Н. Крачковский

480. Об устойчивости некоторых свойств нормально разрешимых операторов. Го х б е р г И. Ц., Ма р к у с А. С., Матем. сб., 1956, 40, № 4, 453—466

Пусть A — аддитивный замкнутый нормально разрешимый оператор, отображающий банахово пространство E в себя, B — линейный ограниченный оператор, играющий роль возмущения; величины α, β, m имеют тот же смысл, что и в РЖМат, 1956, 5972; значение α (а тем самым и m) предполагается конечным. Устанавливаются условия, при которых возмущенный оператор $A+B$ сохраняет нормальную разрешимость, конечность α и некоторые другие дополнительно формулируемые характеристики оператора A. К последним относятся: конечность числа β и значение индекса $\varkappa = \alpha - \beta$ (теоремы 1 и 2), конечность числа β и равенства $\varkappa = m = 0$ (теорема 3), соотношение $m = \alpha$ (теорема 4), многообразие ядра (теорема 5). В известной части доказываемые теоремы являются обобщением предыдущих работ И. Ц. Гохберга, а также работ других авторов. С. Н. Крачковский

481. Некоторые обобщения принципа неподвижной точки. Ст е п а н ю к К. Л., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 1, 105—110 (рез. франц.)

Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий множество M вида:

$$M = M_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где M_1 — бесконечномерное ограниченное множество банахова пространства, $x_i \in M_1$, во множество $\bar{M}_1$. Тогда либо существует неподвижная точка $x_0 \in M$ преобразования A, либо существует такая последовательность $y_n \to y_0$, что и $Ay_n \to y_0$. В качестве примера применения данной теоремы рассматривается уравнение

$$\varphi(x) = A\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(x, \; y) f(y, \; \varphi(y)) \, dy + F(x), \tag{1}$$

где $K(x, \; y)$ и $F(x)$ непрерывны для $x, \; y \in [a, \; b]$, $f(y, \; u)$ ограничена и равномерно непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant y \leqslant b$, $|u| \leqslant 2 \max |F(x)|$, за исключением не более чем счетного числа кривых $y = p(x)$ ($p(x)$ — произвольные многочлены). Доказывается, что для всех достаточно малых вещественных λ либо уравнение (1) имеет непрерывное решение, либо существует такая последовательность непрерывных функций $\varphi_k(x)$, равномерно сходящаяся к непрерывной функции $\varphi_0(x)$, что $A\varphi_k \to \varphi_0(x)$.

Примечание референта. Аналогичное обобщение принципа неподвижной точки было известно (РЖМат, 1956, 596). М. М. Вайнберг

482. Об одном свойстве вполне непрерывных линейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича. Ру т и ц к и й Я. Б., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 201—208

Пусть M, N и M_i, N_i ($i = 1, \; 2, \; 3$) — пары дополнительных N'-функций (Birnbaum Z. W., Orlicz W., Studia math., 1931, 3, 1—67). Класс Орлича L_M есть множество всех таких измеримых функций $u(x)$ (определенных на фиксированном компактном подмножестве евклидова пространства), что $\rho(u, \; M) = \int M[u(x)] \, dx < \infty$. Пространство Орлича L^*_M есть наименьшее линейное множество, содержащее L_M,

с нормой $\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N)\leqslant 1} \left|\int u(x)v(x)\,dx\right|$. Пусть E_M — наибольшее линейное подмножество класса L_M. Последовательность $u_n \in L_M^*$ называется (o)-слабо сходящейся, если последовательность $\int u_n(x)v(x)\,dx$ сходится для каждой функции $v \in E_N$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Линейный функционал F на L_M^* представим в виде $F(u) = \int u(x)v(x)\,dx$, где $v \in E_N$, в том и только в том случае, если он (o)-слабо непрерывный.

2. Пусть $\iint |K(x,y)u(y)v(x)|\,dxdy < \infty$ для $u \in L_{M_1}^*$ и $v \in L_{N_2}^*$ и оператор $Au(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy$ из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ вполне непрерывен. Оператор A преобразует каждую (o)-слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся в том и только в том случае, если сопряженный оператор $A^*v(x) = \int K(y,x)v(y)\,dy$ отображает E_{N_2} в E_{N_1}.

3. Пусть $\|u(x)v(y)\|_{M_3} \leqslant C\|u\|_{M_1}\|v\|_{N_2}$ для $u \in L_{M_1}^*$ и $v \in L_{N_2}^*$ и $K(x,y) \in L_{N_3}^*$.

Тогда оператор A, определенный в предложении 2, вполне непрерывен и преобразует каждую (o)-слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

4. Если оператор f, определенный формулой $fu(x) = f[x, u(x)]$ (где f непрерывна), отображает открытый единичный шар пространства $L_{M_1}^*$ в класс L_{M_2}, то из $u_n \to u_0$ (u_n, $u_0 \in S$) следует, что $fu_n \to fu_0$ (o)-слабо.

Указывается на применение последней теоремы к доказательству полной непрерывности оператора Гаммерштейна:

$$B\varphi(x) = \int K(x,y)f[y,\varphi(y)]\,dy.$$

R. Sikorski

483. К теории подпространств в линейных пространствах с индефинитной метрикой. Лоухивааара (Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. Louhivaara Ilppo Simo), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1957, Sar. A-I, № 242, 7 S. (нем.)

В комплексном линейном пространстве R заданы две метрики с помощью эрмитовых билинейных форм $Q(x,y)$ и $H(x,y)$. При этом форма $H(x,y)$ — положительно определенная, и пространство R полно по отношению к определяемой ею метрике. Форма $Q(x,y)$, вообще говоря, индефинитна, но ограничена в H-метрике: $|Q(x,x)| \leqslant H(x,x)$ $(x \in R)$. Элементы $x, y \in R$, для которых $Q(x,y) = 0$ или $H(x,y) = 0$, называются соответственно Q-ортогональными и H-ортогональными. Через R^0 обозначается подпространство R, состоящее из всех векторов $y \in R$, на которых форма Q вырождается: $Q(x,y) = 0$ для всех $x \in R$. Аналогично, если U — любое (замкнутое в H-метрике) подпространство R, то U^0 — подпространство U, на котором вырождается $Q(x,y)$, как форма, заданная на U. Очевидно, $U \cap R^0 \subseteq U^0$.

Ставится задача: для заданного подпространства $U \subset R$ и произвольного элемента $a \in R$ найти все «Q-нормали из a на U», т. е. все векторы $a - p$ $(p \in U)$, Q-ортогональные к U (РЖМат, 1955, 4534).

Если $a - p^*$ $(p \in U)$ есть одна из искомых Q-нормалей, то очевидно, что общее решение задачи имеет вид: $a - p = a - p^* + u_0$, где u_0 — произвольный элемент из U^0.

Основной результат: для того чтобы существовала Q-нормаль из a на U, необходимо и достаточно, чтобы $Q(a, u_0) = 0$ для всех $u_0 \in U^0$. Это условие при заданном U выполняется для всех $a \in R$ в том и только том случае, когда $U^0 = U \cap R^0$.

Утверждается, что этот результат допускает применение в теории задачи Дирихле для самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. И. С. Иохвидов

484. О максимальной вероятности совместности двух состояний. Фаринья (Sur la probabilité maximum d'accord de deux états. Farinha João), Rev. Fac. ciènc. Univ. Coimbra, 1954, 23, 21—22 (франц.)

Устанавливается тривиальный факт: для двух единичных векторов $\varphi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ и $\psi = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ в гильбертовом пространстве всегда существует $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n |\alpha_i\beta_i|\right)^2 \leqslant 1$. При доказательстве в трех формулах из шести допущены ошибки, в частности всюду вместо $p \neq q$, $k \neq l$ должно быть $p < q$, $k < l$, а в формуле 1), кроме того, следует знак $=$ заменить на $\leqslant$. Основное же утверждение автора о том, что упомянутый выше предел достигает максимального значения $(=1)$ в том и только том случае, когда φ и ψ коллинеарны, неправильно, так как из равенства предела единице вытекает пропорциональность не координат α_i и β_i, а лишь их модулей $|\alpha_i|$ и $|\beta_i|$. И. С. Иохвидов

485. Коммутаторы A и A^*. Като, Таусски (Commutators of A and A^*. Kato T., Taussky O.), J. Wash. Acad. Sci., 1956, 46, № 2, 38—40 (итал.)

Пусть $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор двух операторов. Оператор называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным: $[A, A^*] = 0$. В работе доказывается, что для операторов в n-мерном евклидовом (вещественном или комплексном) пространстве из условия $[A,[A,A^*]] = 0$ следует, что A — нормальный оператор. Одно из четырех приводимых доказательств этого факта обобщается для случая ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Для неограниченных операторов приводится противоречащий пример — оператор, задаваемый в ортогональном базисе следующей матрицей:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Доказывается также, что для не нормальных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве не коммутируют коммутаторы $[A, A^*]$ и $[A,[A,A^*]]$.

Для матриц второго порядка показывается, что

$$[A,[A,[A,A^*]]] = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\,[A,A^*],$$

где λ_1 и λ_2 — собственные числа. Ю. А. Шрейдер

486. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов. Бирман М. Ш., Матем. сб., 1956, 38, № 4, 431—450

Подробное изложение результатов автора, опубликованных ранее без доказательств (РЖМат, 1953, 1250). И. М. Глазман

487. О расщеплении линейных операторов. Соболев В. И., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 951—954

Пусть E — банахово пространство и E^* — пространство, сопряженное к E. Предполагается, что $E \subset H \subset E^*$, где H — гильбертово пространство, всюду плотное в E^*, внутреннее произведение (x,y) для $x \in E$ и $y \in E^*$ совпадает со скалярным произведением, задан-

ным в H, если $y \in H$, причем $\| x \|_{E^*} \leqslant a \| x \|_H$ для $x \in H$ и $\| x \|_H \leqslant b \| x \|_E$ для $x \in E$. Рассматривается линейный ограниченный оператор A, действующий из E^* в E и удовлетворяющий условию: $(Ax, y) = (Ay, x) \geqslant 0$ для $x, y \in E^*$. Доказывается, что определенный в H положительный квадратный корень B из оператора A действует из H в E^{**}, а значит сопряженный оператор B^* действует из E^{***} в H, так что $BB^* = \tilde{A}$ — расширение оператора A, действующее из E^{***} в E^{**}. Если E рефлексивно, то $\tilde{A} = A$. М. М. Вайнберг

488. **О жордановых клетках бесконечномерных операторов. Бродский М. С.**, Докл. АН СССР, 1956, 111, № 5, 926—929

Линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, называется одноклеточным, если одно из любых двух его инвариантных подпространств является частью другого. Такой оператор можно рассматривать как аналог конечномерного оператора, имеющего лишь один элементарный делитель. Устанавливается достаточный признак одноклеточности, который используется затем для доказательства одноклеточности определенного в $L_2[0, l]$ оператора

$$Af(x) = i \int_0^x \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(x) \overline{\varphi_\nu(t)} f(t)\, dt,$$

где все $\varphi_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, r$) имеют абсолютно непрерывные производные первого порядка; при этом каждое инвариантное подпространство оператора A состоит из всех функций, равных нулю почти всюду на некотором промежутке $[0, a]$, $a \leqslant l$. Как следствие, отмечается, что последовательность $f_k(x) = A^k f_0(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) полна в $L_2[0, l]$ в том и только в том случае, когда мера множества тех точек интервала $[0, \varepsilon]$, в которых $f_0(x) \neq 0$, положительна при любом $\varepsilon > 0$. С. Н. Крачковский

489. **Неравенство Шварца для выпуклых операторных функций. Дейвис** (A Schwarz inequality for convex operator functions. Davis Chandler), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 42—44 (англ.)

Пусть K — множество всех ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, со спектром, принадлежащим (конечному или бесконечному) интервалу I. Вещественная функция $f_0(\lambda)$, определенная на I, относит оператору $A \in K$ ассоциированную с I операторную функцию $f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda)\, dE_\lambda$, где E_λ — спектральное разложение A.

Операторная функция f называется выпуклой, если для любых $A, B \in K$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$f(tA + (1-t)B) \leqslant tf(A) + (1-t) f(B).$$

Теорема. Операторная функция f, ассоциированная с I, выпукла в том и только том случае, когда для $A \in K$ и любого проектирующего оператора P

$$Pf(PAP)P \leqslant Pf(A)P.$$

Сочетание этой теоремы с результатами Бендата и Шермана (РЖМат, 1957, 1526) позволяет охарактеризовать класс выпуклых функций f в терминах функций f_0. В частности, необходимо (но далеко не достаточно), чтобы f_0 была выпуклой и аналитической.

Теорема допускает следующее применение к теории положительных функций на C^*-алгебрах (РЖМат, 1956, 8151): пусть μ — вполне положительное линейное отображение C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ на гильбертово пространство H', f — выпуклая операторная функция, ассоциированная с I, $f(0) = 0$ и A — элемент из $\mathfrak{A}$ со спектром из I. Тогда $f(\mu(A)) \leqslant \mu(f(A))$. И. С. Иохвидов

490. **Возмущение при замене одномерного граничного условия. Вольф** (Perturbation by changes one-dimensional boundary conditions. Wolf Frantisek), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 3, 360—366; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 360—366 (англ.)

Изучается изменение спектра дифференциального самосопряженного оператора при изменении конечного числа граничных условий. В силу индукции можно предполагать, что изменяется одно условие. В абстрактной формулировке задача ставится так: пусть A и B — самосопряженные операторы в пространстве Гильберта H, и пусть существует оператор A', который является сужением как A, так и B и такой, что фактор-пространства $D(A)/D(A') = 1$ и $D(B)/D(A') = 1$. Конкретно, для дифференциальных операторов, A есть дифференциальный оператор с граничными условиями, и B получается из A с помощью замены одномерного граничного условия U одномерным граничным условием V, а A' получается из A добавлением граничного условия. Далее предполагается, что существует такое действительное число μ, что резольвенты $(\mu I - A)^{-1}$ и $(\mu I - B)^{-1}$ существуют. При этих предположениях относительно A и B доказывается, что существуют действительное число γ и элемент $x_0 \in H$ такие, что оператор возмущения

$$P(x) = [(\mu I - A)^{-1} - (\mu I - B)^{-1}](x) = x_0(x, x_0)/\gamma.$$

При доказательстве этой теоремы используется разложение оператора в прямую сумму операторов с простыми спектрами и сведение последних операторов к умножению функций на аргумент. В работе имеются также другие результаты. Б. М. Левитан

491. **Разложение по собственным функциям для формально самосопряженных операторов с частными производными. I. Браудер** (Eigenfunction expansions for formally self-adjoint partial differential operators. I. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1956, 42, № 10, 769—771 (англ.)

Пусть A — формально самосопряженный и B — положительный операторы в некотором пространстве Гильберта. Доказывается существование разложения по обобщенным собственным функциям для оператора $(A - \lambda B)$. Для эллиптических операторов A доказывается существование разложения по обычным собственным функциям и изучается гладкость собственных функций в зависимости от гладкости коэффициентов оператора. Аналогичные вопросы изучались И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко (РЖМат, 1956, 3924), которые предполагали, что оператор $B^{-1}A$ допускает самосопряженное расширение в пространстве со скалярным произведением (Bf, g). Результаты работы переносятся на системы. Б. М. Левитан

492. **Факторизация в групповой алгебре на действительной прямой. Рудин** (Factorization in the group algebra of the real line. Rudin Walter), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 4, 339—340 (англ.)

Пусть L — множество интегрируемых по Лебегу комплексных функций, определенных на всей числовой прямой, с умножением в виде свертки:

$$(g * h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) h(t)\, dt.$$

Если норму $\| f \|$ определить по формуле

$$\| f \| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |\, dx,$$

то L превращается в нормированное кольцо. Доказывается теорема: Пусть $f \in L$. Существуют такие функции $g \in L$ и $h \in L$, что: а) $f = g * h$; б) h и ее преобразование Фурье $\hat{h}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixy} dx$ положительны; с) g принадлежит замкнутому идеалу, порожденному f. Автор замечает, что если f неотрицательна, то g и h не обязательно неотрицательны, и в связи с этим ставит вопрос о характеристике функций, которые являются сверткой неотрицательных функций. Б. М. Левитан

493. Аналитические функции от нескольких элементов банаховой алгебры. Аренс, Кальдерон (Analytic functions of several Banach algebra elements. Arens Richard, Calderon A. P.), Ann. Math., 1955, 62, № 2, 204—216 (англ.)

Статья реферируется повторно, поскольку в первом реферате (РЖМат, 1956, 8149) референт ошибочно приписал авторам неправильное утверждение.

Пусть A — нормированная алгебра, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \subset A$ конечная совокупность ее элементов. Каждому максимальному идеалу M алгебры A сопоставляется точка $\langle z_1(M), \ldots, z_n(M)\rangle$ n-мерного комплексного пространства C^n. Полученное множество $S_Z(A)$ замкнуто и ограничено в C^n; оно называется совместным спектром совокупности Z относительно алгебры A. Если $Z \subset A_1 \subset A$, где A_1 есть подалгебра алгебры A, то $S_Z(A_1) \supset S_Z(A)$. Для заданной области $W \supset S_Z(A)$ (в C^n) всегда можно так подобрать элементы $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$, что $S_Z(A_1) \subset W$, где A_1 — подалгебра, порожденная элементами $z_1, \ldots, z_n, \ldots, z_{n+k}$.

Если $f(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+k})$ — аналитическая функция на пространстве $\mathfrak{M}(A_1)$ максимальных идеалов алгебры A_1, то, согласно теореме референта (РЖМат, 1953, 335), в алгебре A_1 имеется элемент φ, для которого $\varphi(M) \equiv f(\zeta_M)$ при $M \in \mathfrak{M}(A_1)$. Комбинируя этот результат с предыдущим, авторы получают теорему: если $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — аналитическая функция на $S_Z(A)$, то в алгебре A имеется элемент φ, для которого $\varphi(M) \equiv f(\zeta_M)$ при $M \in \mathfrak{M}(A)$. Этим решается положительно проблема об аналитических функциях на совместном спектре, поставленная референтом в указанной выше статье.

Далее рассматриваются многозначные аналитические функции. Пусть дана аналитическая функция $f(\zeta)$, локально однозначная на $S_Z(A)$. Предположим, что можно добавить элементы $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ так, что функция $f(\zeta)$ на множестве $\mathfrak{M}(A_1)$ максимальных идеалов алгебры A_1, порожденной элементами $z_1, \ldots, z_n, \ldots, z_{n+k}$, определена (этого всегда можно достичь по предыдущему) и однозначна. Тогда $f(\zeta)$ отвечает некоторому элементу $\varphi \in A_1$. На этом пути устанавливается следующая основная теорема. Если уравнение $\Phi(w, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ с аналитической функцией Φ имеет на $S_Z(A)$ непрерывное решение $w(\zeta)$ и $\frac{\partial \Phi(w(\zeta), \zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{dw} \neq 0$ на $S_Z(A)$, то решение имеется и в алгебре A. В частности, уравнение $w^k = a$ разрешимо в алгебре A, если оно разрешимо в алгебре $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на $\mathfrak{M}(A)$ и элемент a имеет обратный в алгебре A. Г. Е. Шилов

494. Банахова алгебра l^1 с применением к линейным преобразованиям. Донохью (The Banach algebra l^1 with an application to linear transformations. Donoghue William F., Jr), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 533—537 (англ.)

Пусть l^1 — банахова алгебра функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, с абсолютно суммируемыми тейлоровыми коэффициентами и нормой $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, I — замкнутый идеал в l^1. Доказывается, что фактор-алгебра l^1/I рефлексивна в том и только в том случае, если она конечномерна. Отсюда выводится, что если E — рефлексивное бесконечномерное банахово пространство, а T — такое линейное ограниченное преобразование E в себя, что $\sup_n \|T^n\| < \infty$, то в E не существует элемента x, для которого замкнутая центрально-симметричная выпуклая оболочка последовательности $T^n x$ $(n \geqslant 0)$ содержит внутреннюю точку. Приводимые далее лемма и пример показывают, что условие рефлексивности пространства E существенно и что теорема может не иметь места, если $\sup_n \|T^n\| = \infty$.

С. Н. Крачковский

495. Изоморфизм колец операторов конечного типа II. Фелдман (Isomorphisms of finite type II rings of operators. Feldman Jacob), Ann. Math., 1956, 63, № 3, 565—571 (англ.)

Пусть **A**, **B** — W^*-алгебры конечного типа II, **L**, **M** — структуры их проектирующих элементов, **U**, **V** — группы их унитарных операторов.

Доказывается, что:

I. Для всякого взаимно однозначного отображения g структуры **L** на структуру **M**, сохраняющего соотношение $\leqslant$ и переводящего ортогональное дополнение всякого элемента $P \in \mathbf{L}$ в ортогональное дополнение его образа (ортоморфизма **L** на **M** в терминологии автора), существует $*$-изоморфизм **A** на **B**, совпадающий с g на **L**.

II. Для всякого группового изоморфизма u группы **U** на группу **V** существуют $*$-изоморфизм $\hat{g}$ алгебры **A** на алгебру **B** и мультипликативное отображение $\bar{u}$ группы **U** в центр группы **V** такие, что $u(U) = \bar{u}(U)\,\hat{g}(U)$ для всех $U \in \mathbf{U}$.

Доказательство основано на следующем предложении:

III. Пусть **R** — кольцо всех неограниченных операторов A присоединенных A (в смысле Меррея—Нёймана), тогда **R** регулярно, всякий главный идеал $I \subset \mathbf{R}$ содержит единственный проектирующий элемент P такой, что $I = P \cdot \mathbf{R}$ и, таким образом, установленное соответствие $P \to I$ есть структурный изоморфизм между **L** и структурой главных идеалов в **R**, упорядоченной включением.

Примечание референта. 1) Для AW^*-факторов близкий результат предложению II получил Сакаи (РЖМат, 1957, 5716). 2) На стр. 566, строка 6 снизу, вместо $d(E)$ напечатано $D(E)$.

М. А. Наймарк

496. Обобщенные аппроксимативно конечные W^*-алгебры. Мисоноу (Generalied approximately finite W^*-algebras. Misonou Yosinao), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 3, 192—205 (англ.)

Теория аппроксимативно конечных W^*-алгебр распространяется на случай W^*-алгебр в несепарабельном гильбертовом пространстве. Сначала рассматривается случай фактора. Фактор **M** класса II_1 называется аппроксимативно конечным (именно α-аппроксимативно конечным, где α — кардинальное число), если в **M** существует семейство $\{\mathbf{M}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ подфакторов $\mathbf{M}_\lambda$, удовлетворяющее следующим условиям: а) все $\mathbf{M}_\lambda$ класса I; б) $\mathbf{M}_\lambda$ попарно перестановочны; в) $\mathbf{M} = R(\mathbf{M}_\lambda; \lambda \in \Lambda)$; г) α — кардинальное число множества Λ. Доказывается, что α не зависит от выбора семейства $\{\mathbf{M}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, удовлетворяющего условиям а) — в) и что:

I. α-аппроксимативный и β-аппроксимативный факторы $*$-изоморфны тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

II. Прямое произведение аппроксимативно конечных факторов аппроксимативно конечно.

То же определение аппроксимативной конечности (α-аппроксимативной конечности) дается и для произвольной W^*-алгебры (не обязательно фактора) класса II_1, но в дополнение к условиям а)—г) требуется, чтобы все $\mathbf{M}_\lambda$ и $\mathbf{M}$ имели общий центр.

Далее, W^*-алгебра класса I называется типа равномерно большего 1, если для всякого неравного нулю центрального оператора проектирования $E \in \mathbf{M}$ существует неравный нулю нецентральный оператор проектирования $P \in \mathbf{M}$ такой, что $P < E$; аппроксимативно конечная W^*-алгебра $\mathbf{M}$ называется равномерно α-аппроксимативно конечной, если соответствующее семейство $\{\mathbf{M}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ можно выбрать так, что каждое $\mathbf{M}_\lambda$ типа равномерно большего 1. Доказывается, что:

III. W^*-алгебра $\mathbf{M}$ равномерно α-аппроксимативно конечна тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}$ $*$-изоморфна прямому произведению α-аппроксимативно конечного фактора и коммутативной W^*-алгебры.

IV. Если $\mathbf{M}$ — аппроксимативно конечная W^*-алгебра, то для каждого $\alpha \geqslant \aleph_0$, $\alpha \leqslant \alpha_0$ (α_0 — фиксированное кардинальное число, зависящее от $\mathbf{M}$) существует такой центральный оператор проектирования E_α, что операторы E_α попарно ортогональны, их сумма равна 1 и, при $E_\alpha \neq 0$, $\mathbf{M}_{E_\alpha}$ α-равномерно аппроксимативно конечно. Две аппроксимативно конечные алгебры $*$-изоморфны тогда и только тогда, когда существует $*$-изоморфизм их центров, переводящий друг в друга соответствующие E_α.

Некоторые результаты недостаточно четко сформулированы; в частности, о смысле формулировок лемм 1.4, 3.7 и теоремы 2.4 можно догадаться только после чтения их доказательств, а в формулировке предложения IV отсутствуют условия $\alpha \leqslant \alpha_0$, $E_\alpha \neq 0$. Имеются опечатки, затрудняющие чтение: 1) стр. 193, строка 19 сверху, вместо $\mathbf{N}_1$ должно быть $\mathbf{N}_2$; 2) стр. 196, строка 12 сверху, напечатано $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M} = R(\mathbf{P}_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ вместо $\mathbf{M}^x$ и $\mathbf{M}^x = R(\mathbf{P}_n;\ n = 1, 2, \ldots)$; 3) стр. 196, строка 13 сверху, вместо I_2 должно быть I_{2n}; 4) стр. 197, строка 19 снизу, пропущен знак произведения; 5) стр. 201, строка 14 сверху, вместо $\mathbf{M}$ должно быть $\mathbf{N}$; 6) стр. 201, строка 2 снизу; вместо $R(A_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ должно быть $R(\mathbf{Z}, A_n;\ n = 1, 2, \ldots)$; 7) стр. 204, строка 1 сверху, вместо $\mathfrak{F}$ должно быть $\mathfrak{F}_1$.

М. А. Наймарк

497. Об одном обобщении понятия H^*-алгебры. Заворотнов (On a generalization of the notion of H^*-algebra. Saworotnow Parfeny P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 49—55 (англ.)

Пусть A — нормированное кольцо (в терминологии автора — банахова алгебра), являющееся гильбертовым пространством. A называется право-дополняемой алгеброй (п.-д. алгеброй), если ортогональное дополнение каждого правого идеала есть снова правый идеал. Аналогично определяется лево-дополняемая (л.-д.) алгебра. Алгебра называется дополняемой, если она п.-д. и л.-д. Примером п.-д. алгебры является правая H^*-алгебра (РЖМат, 1953, 612).

Пример 1. Пусть A — алгебра квадрируемых операторов (в терминологии автора—операторов типа Гильберта—Шмидта) в гильбертовом пространстве H, а α — положительный ограниченный оператор в H, увеличивающий норму. Скалярное произведение $a, b \in A$ определяется как $[a, b] = \mathrm{tr}(a^*b)$. Если же ввести в A скалярное произведение $(a, b) = [\alpha a, b]$, то A превратится в правую H^*-алгебру, т. е. в п.-д. алгебру.

Теорема 1. Каждая полупростая п.-д. алгебра A есть прямая сумма простых алгебр, каждая из которых есть двусторонний идеал в A.

Теорема 2. Каждая собственная H^*-алгебра (т. е. такая, что $Ax = \{0\}$ только при $x = 0$) есть двусторонняя H^*-алгебра.

Полупростая п.-д. алгебра A называется хорошо право-дополняемой (х. п.-д.) (right well-complemented), если у каждого собственного правого идеала в A существует ненулевой левый аннигилятор. Соответственно определяются хорошо лево-дополняемая (х. л.-д.) и просто хорошо дополняемая (х. д.) алгебра.

Теорема 3. Каждая х. п.-д. алгебра есть двусторонняя H^*-алгебра. В частности, простая х. п.-д. алгебра A изоморфна алгебре примера 1.

Пример 3. Пусть λ — непрерывно обратимый линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 и увеличивающий норму, и пусть A — совокупность всех квадрируемых операторов a из H_1 в H_2. Если умножение для $a, b \in A$ определить как $a \circ b = a\lambda b$, а скалярное произведение как $(a, b) = \mathrm{tr}(ab^*)$, то A превратится в х. д. алгебру.

Теорема 4. Каждая простая х. д. алгебра A изоморфна алгебре примера 3.

И. С. Иохвидов

498. О вложении право-дополняемой алгебры в H^*-алгебру Амброза. Заворотнов (On the imbedding of a right complemented algebra into Ambrose's H^*-algebra. Saworotnow Parfeny P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 56—62 (англ.)

Сохраняются определения и обозначения предыдущей статьи автора (реф. 497) и работы Смайли (РЖМат, 1953, 612). Полупростая банахова алгебра называется простой, если она не содержит собственных двусторонних идеалов, за исключением плотных во всей алгебре. Элемент x^l называется левым сопряженным к x, если $(xy, z) = (y, x^l z)$ для всех y, z из алгебры.

Теорема 2. Множество элементов простой право-дополняемой алгебры A, имеющих левые сопряженные, плотно в A.

Как следствие отсюда получается, что каждая полупростая право-дополняемая алгебра есть лево-дополняемая алгебра.

Основным результатом статьи является.

Теорема 3. Каждая простая дополняемая алгебра A изоморфна алгебре квадрируемых операторов a (в терминологии автора — операторов типа Гильберта—Шмидта) в гильбертовом пространстве H, для которых $\mathrm{tr}((a\alpha)^* a\alpha) < \infty$, где α — некоторый (вообще говоря, неограниченный) самосопряженный оператор в H.

И. С. Иохвидов

499. Характеристика максимального идеала в факторе. II. Суноути (A characterization of the maximal ideal in a factor. II. Sunouchi Haruo), Kōdai Math. Sem. Repts, 1955, **7**, № 3—4, 65—66 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1956, 5349. Исправляется ошибка в формулировке основного результата, допущенная в ч. I и замеченная Диксмье (Dixmier J., Math. Revs, 1954, **15**). Эта ошибка состоит в том, что идеал, указанный автором, незамкнут. Кроме того, результат ч. I следующим образом обобщается на кольца в несепарабельном пространстве: всякий фактор M бесконечного класса, за исключением счетноразложимого фактора класса III, имеет единственный максимальный двусторонний идеал; этот идеал состоит из всех операторов $A \in M$, для которых всякий оператор проектирования $E(\Delta)$ оператора $(A^*A)^{1/2}$, содержащийся в $R((A^*A)^{1/2})$, имеет относительную размерность, строго меньшую размерности всего пространства.

Примечание референта. Для случая сепарабельного пространства этот результат также по

существу имеется в цитированной в РЖМат, 1956, 5349 статье И. М. Гельфанда и референта.

М. А. Наймарк

500. Некоммутативная теория интегрирования операторов. Огасавара, Йосинага (A non-commutative theory of integration for operators. Ogasawara Tôzirô, Yoshinaga Kyôichi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A 18, № 3, 311—347 (англ.)

Дается новое изложение некоммутативной теории интегрирования Сигала (РЖМат, 1954, 1713, 5665) и Диксмье (РЖМат, 1953, 816), основанное на следующей теореме: Если θ — $*$-изоморфизм слабо замкнутых самосопряженных колец операторов **M**, **N**, то θ можно продолжить и притом единственным образом, до $*$-изоморфизма кольца всех m-измеримых операторов на кольцо всех n-измеримых операторов, где m — один из идеалов m_0, m_1, m_2 в **M**, а n — отвечающий ему идеал при изоморфизме θ.

При этом m_0 обозначает идеал в **M**, порожденный всеми конечными операторами проектирования из **M**; m_1 — идеал в **M**, порожденный всеми конечными счетноразложимыми операторами проектирования из **M**; а m_2 — идеал в **M**, порожденный всеми метрически конечными операторами проектирования из **M**.

Далее, замкнутый оператор $T \eta$ **M** называется m-измеримым, если существует такая последовательность операторов проектирования $P_n \in$ **M**, что $P_n \to 1$, P_n $\mathfrak{H}$ содержится в области определения T и $1 - P_n \in m$ при всех $n = 1, 2, \ldots$

Сформулированная выше теорема дает возможность развить теорию интегрирования для любого кольца **L**, $*$-изоморфного данному кольцу **M**, причем достаточно ограничиться случаем полуконечного кольца. Но тогда в качестве **L** удобно выбрать слабо замкнутое кольцо, порожденное операторами левого сдвига в H-системе **H**. В таком кольце **L** понятия интеграла и пространства L_p определяются проще, чем в общем случае; например, интеграл $\mu(T)$ оператора $T = L_x^* L_y$, $xy \in$ **H** определяется по формуле $\mu(T) = (x, y)$, где (x, y) — скалярное произведение в **H**. Выводится ряд следствий из излагаемой теории, в частности получаются обобщения теоремы Радона—Никодима и теоремы Лебега о монотонной сходимости. В заключение дается аксиоматическое определение пространства L_1 и доказывается эквивалентность этого определения первоначальному.

М. А. Наймарк

501. Представления групп. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Граев М. И., Наймарк М. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 6, 13—40

Обзорный доклад, прочитанный на конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.). Изложены основные результаты по теории представлений локально бикомпактных групп, в частности групп Ли, полученные за последние 10—15 лет.

Гл. I. Унитарные представления полупростых групп Ли. Первые систематические результаты в этом направлении, относящиеся к унитарным представлениям классических групп (в частности, группы Лоренца), были получены И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком, которые в 1947—1950 гг. дали описание всех неприводимых унитарных представлений комплексных классических групп. При этом обнаружился ряд существенных отличий от теории конечномерных представлений (например, существование дополнительных серий, не входящих в разложение регулярного представления). Теория характеров для бесконечномерных представлений была построена в работах И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка и Хариш-Чандра. Ф. А. Березиным теория характеров была применена к описанию всех неприводимых унитарных представлений классических групп. Им же были найдены дифференциальные уравнения для характеров. Применению обобщенных функций в теории представлений посвящен цикл заметок Брюа. В теории представлений вещественных полупростых групп Ли возникают, по сравнению с комплексными группами, дополнительные трудности. Характерной особенностью вещественных групп является наличие у них серий представлений, реализующихся в пространстве функций, аналитических по всем или некоторым переменным. Представления вещественных групп изучали И. М. Гельфанд, М. И. Граев и Хариш-Чандра.

Гл. II. Теория сферических функций на группах. Сферические функции на группе тесно связаны с задачей о разложении неприводимого представления группы по неприводимым представлениям некоторой ее подгруппы G_0. Таким путем можно получить обычные сферические функции, а также ряд других специальных функций. В основном изучен случай компактной подгруппы G_0. Сферические функции на группах изучали Э. Картан, Н. Я. Виленкин, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, М. Г. Крейн, М. А. Наймарк и др.

Гл. III. Общая теория представлений локально бикомпактных групп. Если локально бикомпактная группа коммутативна, то все ее неприводимые представления одномерны и теория их является обобщением теории классического интеграла Фурье. Основные результаты в области гармонического анализа на коммутативных локально бикомпактных группах были получены А. Вейлем, М. Г. Крейном, Д. А. Райковым, Амброзом, Годманом, М. А. Наймарком. Если коммутативность группы не предполагается, то теория существенно усложняется, так как соответствующие неприводимые представления, вообще говоря, бесконечномерны. Одним из первых результатов здесь была теорема И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова о существовании у всякой локально бикомпактной группы полной системы неприводимых унитарных представлений. В задаче о разложении представлений локально бикомпактных групп на неприводимые первые результаты (для счетных дискретных групп) были получены А. Н. Колмогоровым. Для группы Лоренца существование такого разложения было доказано И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Дальнейшие результаты в этой задаче были получены Г. М. Адельсон-Вельским, Маутнером, Томита и др. Нерешенным остается вопрос об условиях единственности разложения представления на неприводимые. Здесь обнаруживаются тесные связи с теорией факторов Меррея и Неймана. Библ. 69 назв.

С. В. Фомин

502. О неприводимых представлениях полной группы Лоренца. Наймарк М. А., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 4, 583—586

Даны точная постановка и решение задачи об описании всех (в том числе неунитарных), с точностью до эквивалентности, вполне неприводимых представлений полной группы Лоренца. Аналогичный результат для собственной группы Лоренца был получен автором ранее (РЖМат, 1955, 5153). Пусть $\mathfrak{A}$ — группа комплексных матриц второго порядка. Ее вполне неприводимые представления $S_{m,\rho}$ определяются значениями параметров m и ρ (m — целое, ρ — комплексное). Пусть, далее, оператор S в пространстве $R_{0,\rho}$ представления $S_{0,\rho}$ определен одной из формул

$$Sf(u) = f(su), \quad Sf(u) = -f(su),$$

где

$$s = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Эти операторы S вместе с представлением $S_{0,\rho}$ группы $\mathfrak{A}$ определяют два представления $D^+_{0,\rho}$ и $D^-_{0,\rho}$ группы $\mathfrak{G}$. Сходным образом по представлениям $S_{m,0}$, $S_{-m,0}$ и $S_{m,\rho}$, $S_{-m,\rho}$ группы $\mathfrak{A}$ строятся представления $D^+_{m,0}$, $D^-_{m,0}$ и $D_{m,\rho}$ группы G. Основной результат: представления $D^+_{0,\rho}$, $D^-_{0,\rho}$, $D^+_{n,0}$, $D^-_{n,0}$, $D_{m,\rho}$ $(m>0,\ \rho\neq 0)$ вполне неприводимы, попарно неэквивалентны и исчерпывают все, с точностью до эквивалентности, вполне неприводимые представления полной группы Лоренца. С. В. Фомин

503. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы евклидовых движений трехмерного пространства и их свойства. Виленкин Н. Я., Акимэ. Л., Левина А. А., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 6, 987—989

Вычисляются в интегральной форме матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $M(3, R)$ евклидовых движений трехмерного пространства, найденные ранее А. М. Родовым, и устанавливаются некоторые свойства этих матричных элементов. Каждое неприводимое унитарное представление группы $M(3, R)$ определяется целым числом m и положительным числом ρ и реализуется в пространстве H_m функций, заданных на группе трехмерных вращений, интегрируемых в квадрате по инвариантной мере на этой группе и удовлетворяющих условию $f(\gamma\omega)=e^{-im\alpha}f(\omega)$, где γ — поворот на угол α вокруг оси Oz. За базис принимается совокупность функций

$$\sqrt{2l+1}\,T^l_{mn}(\omega),\quad |m|\leqslant l,\quad -l\leqslant n\leqslant l,$$

где $T^l_{mn}(\omega)$ — матричные элементы неприводимых унитарных представлений веса l группы трехмерных вращений. В этом базисе операторы, отвечающие вращению, имеют матричные элементы T^l_{nk}, а операторы Q_g, отвечающие сдвигу вдоль оси Oz на r, задаются матрицами, состоящими из клеток $\|J^{ll_1}(g)\|$, $l,\ l_1\geqslant m$, причем элементы $q_{ln,l_1n_1}(g)$ клетки $\|J^{ll_1}(g)\|$ равны нулю при $n\neq n_1$, а при $n=n_1$ равны $J_{m,l,l_1,n}(\rho r)$, где

$$J_{m,l,l_1,n}(x)=(-1)^{m-n}\sqrt{\frac{\pi(2l+1)(2l_1+1)}{2x}}\times$$

$$\times\sum_{k=|l-l_1|}^{|l+l_1|}C^{k,0}_{-n,n}C^{k,0}_{-m,m}J_{k+\frac12}(x)\,i^k;$$

здесь $J_{k+\frac12}(x)$ — функции Бесселя полуцелого индекса, а $C^{k,i+j}_{ij}$ — коэффициенты Клебша—Гордона. Для функций $J_{m,l,l_1,n}(x)$ устанавливается ряд соотношений (теорема сложения и др.), обобщающих соответствующие соотношения между функциями Бесселя.

С. В. Фомин

504. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы вещественных ортогональных матриц и группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Виленкин Н. Я., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 1, 16—19

Вычисляются матричные элементы, указанные в заглавии, и устанавливается ряд соотношений для них. Эти элементы представляют собой специальные функции, обобщающие многочлены Гегенбауэра (в случае группы ортогональных матриц) и функции Бесселя (в случае группы движений). Результаты, относящиеся к группе движений, являются обобщением результатов, полученных автором, Э. Л. Акимом и А. А. Левиным для трехмерного пространства (реф. 503).

С. В. Фомин

505. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах. Березин Ф. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 152—156

Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ — однородное многообразие с группой движений $\mathfrak{G}$ и стационарной подгруппой $\mathfrak{G}_0$. В пространстве функций на $\mathfrak{M}$ вводятся операторы $T_gf(x)=f(g^{-1}x)$. Дифференциальные операторы, перестановочные с T_g, называются операторами Лапласа на $\mathfrak{M}$. Оператор Лапласа Δ, рассматриваемый на множестве таких функций f, что $f(gx)=f(x)$ для всех $x\in\mathfrak{M}$, если $g\in\mathfrak{G}$, называется радиальной частью оператора Лапласа. Вычисляются радиальные части операторов Лапласа для случая, когда $\mathfrak{M}$ — полупростая группа и движения задаются формулой $g\to g_1^{-1}gg_2$ $(g,\ g_1,g_2\in\mathfrak{G})$, а также для некоторых симметрических пространств. Указывается, что сферические функции на группе являются собственными функциями операторов Лапласа, в частности зональные функции на однородных многообразиях являются собственными для радиальных частей операторов Лапласа. В случае, когда $\mathfrak{M}$ — полупростая группа, соответствующие зональные функции суть характеры неприводимых представлений группы. Автор указывает, что полученные им формулы дают возможность вычислить эти характеры и дать описание всех, с точностью до эквивалентности, неприводимых представлений полупростых групп в нормированных пространствах. С. В. Фомин

506. Унитарные представления вещественных простых групп Ли. Граев М. И., Успехи. матем. наук, 1957, 12, № 1, 179—182

При изучении унитарных представлений вещественных простых групп Ли возникают новые, по сравнению с комплексным случаем, трудности, вызванные более сложной алгебраической структурой вещественных групп. Характерной особенностью вещественных групп является наличие у них представлений, реализующихся в пространствах функций, аналитических по всем или некоторым аргументам. Автор описывает некоторые серии представлений, реализующихся в пространствах аналитических функций нескольких переменных для группы $G_{p,q}$ комплексных унимодулярных матриц порядка $n=p+q$, оставляющих инвариантной эрмитову форму $z_1\bar z_1+\ldots+z_p\bar z_p-z_{p+1}\bar z_{p+1}-\ldots-z_{p+q}\bar z_{p+q}$. Указывается также метод вычисления следов подобных представлений, основанный на переходе от вещественной группы к ее комплексной оболочке.

С. В. Фомин

507. Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применения к задаче о продольном изгибе сжатого стержня. Красносельский М. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 203—208

Вводится определение точки бифуркации нелинейного оператора A, действующего в банаховом пространстве E. Число $\lambda_0\neq 0$ называется точкой бифуркации оператора A, если каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое λ, $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, которому отвечает решение $\varphi\neq\theta$ уравнения $\varphi=\lambda A\varphi$ $(A\theta=\theta)$, удовлетворяющее неравенству $\|\varphi\|<\varepsilon$. Если A допускает представление $A=B+C+D$, где B — линейный оператор, $C(\alpha\varphi)=\alpha^kC\varphi$, $\|C\varphi_1-C\varphi_2\|\leqslant M(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)^{k-1}\|\varphi_1-\varphi_2\|$, $\lim\limits_{\|\varphi\|\to 0}\|D\varphi\|\cdot\|\varphi\|^{-k}=0$, то точки бифуркации A есть характеристические значения оператора B.

Исследуется вопрос о том, для какого максимального класса операторов A множество точек бифуркации совпадает с множеством характеристических значений оператора B. Дано приложение к задаче о продольном изгибе шарнирно закрепленного стержня.

Э. С. Цитланадзе

508. **Аналитическое продолжение решения нелинейного уравнения в B-пространствах. Ахмедов К. Т.**, Элми эсэрлэр. Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1956, № 12, 3—18 (рез. азерб.)

Пусть $f(u)$ — аналитический оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве, и u_0 — решение уравнения

$$u = \lambda f(u) \qquad (1)$$

при $\lambda = \lambda_0$ (λ — параметр, принимающий комплексные значения). Если в некоторой окрестности λ_0 существует единственное решение уравнения (1) вида: $u = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k u_k$, то λ_0 называется точкой однозначной аналитической продолжаемости решения уравнения (1); если решений такого вида имеется более одного, то λ_0 — точка многозначной аналитической продолжаемости. Доказываются следующие предложения: 1. Если λ_0 — точка однозначной аналитической продолжаемости, то оператор $E - \lambda_0 f'(u_0)$, где E — единичный оператор и $f'(u_0)$ — производная от $f(u)$ в точке u_0, представим в виде суммы вполне непрерывного оператора и оператора, имеющего обратный оператор. 2. Для того чтобы λ_0 была точкой однозначной аналитической продолжаемости, достаточно, чтобы λ_0 была регулярной точкой линейного оператора $f'(u_0)$. 3. Если λ_0 — точка спектра оператора $f'(u_0)$, то при выполнении некоторых дополнительных условий, приведенных в работе, λ_0 — точка многозначной продолжаемости. Устанавливаются и другие предложения.

М. М. Вайнберг

509. **Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов, зависящих от параметра. Далецкий Ю. Л.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 182—186

Обзорный доклад на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.) с изложением результатов автора и С. Г. Крейна.

Рассматривается ограниченный эрмитов оператор $H(\tau)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, зависящий от параметра τ, $A \leqslant \tau \leqslant B$, имеющий производную $H'(\tau)$, непрерывную в смысле сходимости по норме в пространстве операторов. Пусть $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция с непрерывной второй производной на отрезке $[a, b]$, содержащем спектр S оператора $H(\tau)$ при всех τ. Для функции от оператора $f(H(\tau))$ устанавливается формула

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau} = \int_S \left[\int_S \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} \, dE_\lambda(\tau) \frac{dH}{d\tau} \right] dE_\mu(\tau),$$

где интеграл понимается как равномерный предел соответствующих интегральных сумм. Дается оценка

$$\left\| \frac{df(H(\tau))}{d\tau} \right\| \leqslant \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\| \left[\max_\lambda |f'(\lambda)| + \frac{b-a}{2} \max_\lambda |f''(\lambda)| \right].$$

Если $f(\lambda)$ имеет непрерывные производные до порядка $2n$, то устанавливается выражение для $\frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n}$ и выводится формула Тейлора для $f(H(\tau))$. Показывается, каким способом полученные результаты можно применить к теории возмущения самосопряженных операторов.

В. И. Соболев

510. **Полугруппы мер на группах Ли. Хант** (Semigroups of measures on Lie groups. Hunt G. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 264—293 (англ.)

Пусть G — группа Ли, G_c — компактное пространство, полученное из G присоединением одного элемента (бесконечной точки) ω, C — банахово пространство всех непрерывных на G функций $f(\sigma)$ с нормой $\|f\| = \max |f(\sigma)|$, а C_k — банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на C_c, постоянных в некоторой окрестности ω (своей для каждой функции), с нормой

$$\|f\|_k = \|f\| + \Sigma_i \|X_i f\| + \ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_k} \|X_{i_1} \ldots X_{i_k}\|,$$

где $X_1, \ldots, X_d$ — базис алгебры Ли группы G. Дается описание всех семейств p_t, $0 < t < \infty$ положительных мер на борелевских множествах пространства G_c, образующих полугруппу по отношению к свертыванию мер и удовлетворяющих условиям:

$$1)\ p_t(G_c) = 1,\ t > 0;\ 2)\ \lim_{t \to 0} p_t(E) = 1$$

для некоторой окрестности единичного элемента ε группы G, причем предел берется в смысле слабой топологии для мер. Именно, производящий оператор M каждой такой полугруппы, т. е. оператор

$$Mf \cdot (\tau) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[\int f(\tau + \sigma)\, p_t(d\sigma) - f(\tau) \right]$$

(в действительности M есть производящий оператор тесно связанной с p_t подгруппы операторов $S_t f \cdot (\tau) = \int_{G_c} f(\tau\sigma)\, p_t(d\sigma)$ в банаховом пространстве C), определен по крайней мере на C_2 и имеет вид

$$Mf \cdot (\tau) = \sum_i a_i X_i f \cdot (\tau) + \sum_{ij} a_{ij} X_i X_j f \cdot (\tau) +$$

$$+ \int_{G_c - \{\varepsilon\}} [f(\tau\sigma) - f(\tau) - \sum X_i f \cdot (\tau)\, x_i(\sigma)]\, G(d\sigma), \qquad (1)$$

где $\|a_{ij}\|$ — симметричная неотрицательно определенная матрица; $x_1, \ldots, x_d$ — такие функции из C_2, что $x_i(\varepsilon) = 0$, $X_i x_j(\varepsilon) = \delta_{ij}$; G — такая положительная мера на $G - \{\varepsilon\}$, что $\int \Phi(\varepsilon)\, G(d\sigma) < \infty$ для функции $\Phi \in C_2$, положительной на $G_c - \{\varepsilon\}$ и эквивалентной $\sum x_i^2$ в окрестности ε. Мера G и оператор $\Delta_2 \equiv \sum a_{ij} X_i X_j$ определяются оператором M независимо от выбора базиса $X_1, \ldots, X_d$ и функций x_i, а сужение оператора M на C_2 полностью определяет данную полугруппу.

Обратно, всякий оператор M, определенной на C_2 по формуле (1), где матрица $\|a_{ij}\|$ и мера G удовлетворяют перечисленным выше условиям, есть сужение на C_2 производящего оператора некоторой такой полугруппы p_t.

Для полугрупп, удовлетворяющих дополнительному условию $p_t(\omega) = 0$, утверждения теоремы остаются верными, если пространство C заменить пространством $\bar{C}$ всех ограниченных равномерно непрерывных функций на G с нормой $\|f\| = \sup |f(\sigma)|$ и аналогичным образом заменить C_2 на $\bar{C}_2$. Отсюда, если взять в качестве G аддитивную группу вещественных чисел, получается результат Леви (Lévy P. Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1934, 3, 337—366). Полученные результаты переносятся на полугруппы мер, заданных на однородном пространстве левых

смежных классов группы Ли по некоторой ее компактной подгруппе; это дает возможность обобщить предыдущую теорему на полугруппы, не удовлетворяющие условию 2). Дается теоретико-вероятностное истолкование полученных результатов; кроме того, рассматривается тот случай, когда операторы $S_t f(t) = \int f(\tau\sigma)\, p_t(d\sigma)$ нормальны или эрмитовы в гильбертовом пространстве L^2_ρ по отношению к правоинвариантной мере ρ на G. М. А. Наймарк

511. **Аппроксимация и проекция. Сард** (Approximation and projection. Sard Arthur), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 2, 127—144 (англ.)

Пусть Y — пространство с мерой m; H_Y — пространство квадратичносуммируемых (m) (комплекснозначных) функций на Y; Ω — пространство с вероятностью p (такой мерой, что $p\Omega = 1$); $H_{Y\Omega}$ — пространство квадратичносуммируемых (mp) функций двух переменных $y \in Y$ и $\omega \in \Omega$. Аналогичным образом вводятся X, H_X, $H_{X\Omega}$ (автор рассматривает несколько более общий случай, когда H_X — произвольное пространство Гильберта). Пусть, далее, J — некоторое линейное множество ограниченных линейных операторов T из H_X в H_Y.

Функция $h(y, \omega) \in H_{Y\Omega}$ трактуется как стохастически заданный элемент H_Y. Аналогично трактуется функция $g(x, \omega) \in H_{X\Omega}$.

Пусть g и h заданы. Оператор $T_1 \in J$ называется эффективным, если $\| T_1 g - h \|_{H_{Y\Omega}} \leqslant \| Tg - h \|_{H_{Y\Omega}}$ для всех $T \in J$; он называется сильно эффективным, если $\int_\Omega |T_1 g - h|^2 dp \leqslant \int_\Omega |Tg - h|^2 dp$ для почти всех $y \in Y$ при всяком $T \in J$. Вводятся также операторы, эффективные и сильно эффективные с точностью до ε.

Множество элементов вида Tg (T пробегает J) обозначается L^0, его замыкание — L. Доказывается, что эффективный оператор существует тогда и только тогда, когда $\theta \equiv \Pr_L h \in L^0$, и в этом случае эффективны те T, для которых $Tg = \theta$. Приводятся также необходимые и достаточные условия существования сильно эффективного оператора и его характеристика. Аналогичные теоремы имеются об операторах, эффективных и сильно эффективных с точностью до ε.

Далее выясняется, когда L^0 замкнуто и когда можно так расширить J, чтобы стало $\theta \in L^0$. М. К. Гавурин

512. **О группах, не меняющих среднего значения функционала. Полищук Е. М.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 175—179, 212 (рез. англ.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 1600) было дано определение среднего значения функционала для некоторого класса функционалов $F = F[x(t)]$, заданных на множестве таких непрерывных функций $x(t)$, что

$$a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ b(t) - a(t) = r(t) > 0.$$

Явная формула для функционала $F[x(t)]$ при этом представлялась в виде предела некоторого выражения, содержащего функции $H(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n)$ от $2n$ аргументов, удовлетворяющие определенным условиям. Доказывается, что соответствующее среднее значение функционала не меняется при некоторой группе G подстановок аргументов функций H, фигурирующих в выражении функционала $F[x(t)]$. Дается геометрическое истолкование подстановок группы G. А. М. Яглом

513. **Свойства периодичности ограниченных групп операторов в гильбертовом пространстве. Якобс** (Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum. Jacobs Konrad), Math. Z., 1955, 61, № 4, 408—428 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа равномерно ограниченных по норме линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Элемент $f \in \mathfrak{H}$ называется почти периодическим относительно группы $\mathfrak{G}$, если множество $\mathfrak{M}$ элементов вида xf ($x \in \mathfrak{G}$) вполне ограничено, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует в $\mathfrak{M}$ конечное число таких элементов g_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), что для каждого $g \in \mathfrak{M}$ существует по крайней мере один индекс ν с $\| g - g_\nu \| < \varepsilon$. С другой стороны, элемент $f \in \mathfrak{H}$ называется исчезающим (Fluchtvektor), если существует такая последовательность $x_n \in \mathfrak{G}$, что последовательность элементов $x_n f$ в $\mathfrak{H}$ сходится слабо к 0.

Основной результат работы: Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму подпространства всех почти периодических векторов и подпространства всех исчезающих векторов.

Аналогичное предложение для частного случая унитарных групп доказано Годманом (Godement R., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 63, 1—84). L. Pukánszky

514. **Некоторые эргодические теоремы для однопараметрических полугрупп операторов. Кендалл, Рёйтер** (Some ergodic theorems for one-parameter semigroups of operators. Kendall D. G., Reuter G. E. H.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1956, A249, № 962, 151—177 (англ.)

Пусть $G = \{T_t,\ t \geqslant 0\}$ — однопараметрическая полугруппа операторов в банаховом пространстве X. Элемент $x \in X$ называется эргодическим, если $T_t x$ при $t \to \infty$ имеет предел (в том или ином смысле). Первые два параграфа содержат в основном изложение результатов Эберлейна (Eberlein W. F., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 217), а также некоторые вспомогательные предложения. Далее устанавливается, что четыре определения эргодичности, исходящие из определения предела $T_t x$ с помощью сильной или слабой топологии и абелева или чезаровского суммирования, эквивалентны между собой. Устанавливаются условия (в терминах производящего оператора полугруппы) эргодичности любого элемента $x \in X$. Например (теорема 6): если $\| \alpha J_\alpha \| \leqslant A = \text{const}$ ($0 < \alpha < 1$) и оператор μJ_μ при некотором $\mu > 0$ слабо квазикомпактен, то все $x \in X$ эргодичны. Здесь J_α — резольвента производящего оператора; оператор U называется слабо квазикомпактным, если существует такое целое положительное m, что $U^m = V + D$, где V слабо вполне непрерывен и $\| D \| < 1$. Вообще, эргодические свойства полугруппы G вполне определяются ее производящим оператором. В конце работы рассматриваются эргодические свойства сопряженной полугруппы. С. В. Фомин

515. **Решение линеаризированного уравнения переноса Больцмана для пластинки. Ленер, Уинг** (Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry. Lehner Joseph, Wing G. Milton), Duke Math. J., 1956, 23, № 1, 125—142 (англ.)

Результаты предыдущей статьи авторов (РЖМат, 1957, 3293; ниже используются те же обозначения) применяются для решения задачи

$$\left.\begin{array}{l} u_t = Au,\ u = u(x, \mu, t),\ |x| \leqslant a,\ |\mu| \leqslant 1,\ t > 0 \\ u(\pm a, \mu, t) = 0,\ \mu \lessgtr 0,\ t > 0;\ u(x, \mu, 0) = f(x, \mu) \end{array}\right\}, \quad (1)$$

где $A = -\mu \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{c}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} d\mu'$, возникающей при изучении распространения нейтронов в бесконечной пластинке ширины $2a$.

Основные результаты:

1) Решение задачи (1) имеет вид:

$$u(x, \mu, t) = \sum_{j=1}^{m} (f, \psi_j^*)\, \psi_j(x, \mu)\, e^{\beta_j t} + \zeta(x, \mu, t),$$

где $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m$ — все собственные значения оператора A, ψ_j — соответствующие собственные функции,

$$\psi_j^*(x, \mu) = \overline{\psi(-x, \mu)} \text{ и } (\psi_j; \psi_j^*) = 1, \text{ а}$$

$$\zeta(x, \mu, t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\lambda t} R_\lambda f d\lambda \quad 0 < \gamma < \beta_m.$$

2) Если $f \in \mathfrak{D}(A)$, $Af \in \mathfrak{D}(A)$ ($\mathfrak{D}(A)$ обозначает область определения оператора A) и $\| \partial f / \partial x \| < \infty$, $\| \partial (Af)/\partial x \| < \infty$, то $\lim\limits_{t \to \infty} \zeta(x, \mu, t) = 0$ для почти всех фиксированных (x, μ).

Тем не менее, если $(f, \psi_j^*) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то для всякого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} e^{\varepsilon t} \| \zeta \| = \infty$.

На стр. 135 и 136 имеются ошибки в оценках, однако эти ошибки относятся только к константам и не имеют существенного значения. На стр. 127 в формулах (1. 17) опечатка: вместо ε напечатано ζ.

М. А. Наймарк

516 К. Элементы математики. XIX. Часть 1. Основы анализа. Книга V. Топологические векторные пространства. (Сводка результатов). Бурбаки (Eléments de mathématique. XIX. 1-re partie. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. (Fascicule de résultats). Bourbaki N. (Actual. scient. et industr., № 1230). Paris, Hermann et Cie, 1955, 39 p.) (франц.)

Предложения, формулируемые в реферируемой сводке, группируются вокруг фундаментальных понятий теории топологических векторных пространств, составляющей содержание 5-й книги Бурбаки (РЖМат, 1956, 2861, 3163). Результаты первых четырех книг и введенные там обозначения предполагаются известными (в той мере, в какой они используются в 5-й книге). Соответственно характеру сводки, в ней отсутствуют доказательства формулируемых предложений, и только для наиболее трудных теорем указаны места 5-й книги, где проводятся соответствующие доказательства. Содержание сводки разбито на следующие семь параграфов: 1) Топологические векторные пространства; окрестности, полунормы, ограниченные множества. 2) Линейные и мультилинейные отображения. 3) Подпространства; фактор-пространства; произведения пространств. 4) Выпуклость. 5) Пространства линейных непрерывных отображений. 6) Двойственность. 7) Основные типы локально выпуклых пространств. Все параграфы тесно переплетаются друг с другом в том смысле, что понятия и обозначения, вводимые в одном из них, встречаются как в предшествующих, так и в последующих параграфах (впрочем, место, где впервые вводится какое-либо понятие или обозначение, всегда может быть легко найдено по спискам терминов и обозначений в конце сводки). В дополнении к сводке охарактеризованы топологические векторные пространства, связанные с теорией обобщенных функций, а также некоторые другие пространства. В виде приложения дана диаграмма, показывающая связь различных типов локально выпуклых пространств (ею охвачены пространства Гильберта, Банаха, Фреше, Монтеля, рефлексивные пространства, t-пространства (espaces tonnelés).

С. Н. Крачковский

См. также: 304, 305, 323, 328, 329, 336, 362, 392, 423, 426

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

517. Еще один случай центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин. Ломницкий, Заремба (A further instance of the central limit theorem for dependent random variables. Lomnicki Z. A., Zaremba S. K.), Math. Z., 1957, 66, № 5, 490—494 (англ.)

Случайные величины $\xi_{i,k}$ ($i = 1, 2, \ldots$; $k = i+1, i+2, \ldots$) подчинены следующим условиям: 1) если любые 2 конечных множества переменных ξ_{ik} не имеют общих индексов, то они независимы; 2) $E\xi_{ik} = 0$ и $E\xi_{ik}^2 = \mu_2$ ($i = 1, 2, \ldots$; $k = i+1, i+2, \ldots$), μ_2 — постоянно; 3) $E(\xi_{ik}\xi_{ij}) = E(\xi_{ij}\xi_{kj}) = c$ ($i = 1, 2, \ldots$; $k = i+1, i+2, \ldots$; $j = k+1, k+2, \ldots$); 4) ξ_{ik} имеют любые ограниченные моменты до порядка m. Пусть $\bar{\xi}_N = 2\,[N(N-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \xi_{ik}$. Тогда при $n \leqslant m$

$$\lim_{N \to \infty} N^{n/2} E\left(\bar{\xi}_N^n\right) = \begin{cases} 2^{n/2} n!\, c^{n/2}/(n/2)! & \text{при } n \text{ четном} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Если выполнены первые 3 условия и интегралы, выражающие $E\xi_{ik}^2$ сходятся равномерно по i, k, распределение $N^{1/2}\bar{\xi}_N$ стремится к нормальному с параметрами 0 и $4c$. В частности, если $x_1, \ldots, x_n$ — выборочные значения случайной величины, имеющей вторые конечные моменты, то

$$g_N = 2\,[N(N-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} |x_i - x_k|$$

асимптотически нормальна.

С. С. Кислицын

518. Об идентификации некоторых стохастических структур. Тейкер (Identification of a certain stochastic structure. Teicher Henry), Econometrica, 1956, 24, № 2, 172—177 (англ.)

Рассматриваются структуры вида $X_i = U_i + aU_{i-1}$, где U_i независимы и одинаково распределены. Доказывается несколько теорем об идентификации структур такого вида.

В. П. Скитович

519. Об аппроксимации некоторых предельных распределений. Макабэ, Моримура (On the approximation to some limiting distributions. Makabe Hajime, Morimura Hidenori), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 1, 31—40 (англ.)

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть

$$b(k; np) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k},$$

$$p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (\lambda = np),$$

тогда

$$b(k;\ np) = p(k;\ \lambda) - \frac{\lambda^2}{2n}\Delta^2 p(k;\ \lambda) + R_1,$$

где $\Delta^2 p(k;\lambda) = [\{p(k-2;\lambda) - p(k-1;\lambda)\} - \{p(k-1;\lambda) - p(k;\ \lambda)\}]$ и $|R_1| < \frac{A(\lambda,\ n)}{\pi n^2} e^{2\lambda^2/n}$,

$$A(\lambda,\ n) = \frac{I_4(\lambda)}{8} + \frac{I_3(\lambda)}{3}\,\frac{\exp\{8\lambda^3/3n^2(1-2\lambda/n)\}}{1-2\lambda/n},$$

$$I_j = \lambda^j \int_0^{\pi} \exp\left\{-2\lambda \sin^2\frac{t}{2}\right\} t^j dt.$$

Теорема 2.

$$\sum_{k=l+1}^{l'} b(k;\ np) = \sum_{k=l+1}^{l'} p(k;\ \lambda) - \frac{\lambda^2}{2n}[\Delta^2 P(l';\ \lambda) - \Delta^2 P(l;\ \lambda)] + S_1,$$

где $P(l;\lambda) = \sum_{k=0}^{l} P(k;\ \lambda)$, $|S_1| < B(\lambda,\ n)/n^2$, где $B(\lambda,\ n)$ имеет выражение, аналогичное $A(\lambda,\ n)$.

Теорема 3.

$$P\left\{x < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n/12}} < x + h\right\} = \Phi(x+h) - \Phi(x) - \frac{1}{20\sqrt{2\pi n}}[\{3(x+h) - (x+h)^3\} e^{-(x+h)^2/2} - (3x - 3x^3) e^{-x^2/2}] + R,$$

где X_i равномерно распределены в $[-0{,}5;\ +0{,}5]$, при этом

$$|R| < \frac{0{,}0217}{n^2} + \frac{0{,}335}{n^3} + \frac{0{,}111}{n^4} + \alpha e^{-n},\quad \alpha > 0.$$

В. П. Скитович

520. Закон повторного логарифма для зависимых случайных величин. Мацуяма, Такахаси (The law of the iterated logarithm for dependent random variables. Matsuyama Noboru, Takahashi Shigeru), Sci. Repts Kanazawa Univ., 1956, 4, № 2, 177—182 (англ.)

Пусть $\{\xi_i\}$ — m-связная последовательность случайных величин (РЖМат, 1953, 828) таких, что

1) $E\{\xi_i\} = 0$,

2) для некоторого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно i

$$\int_{|\xi_i| \leqslant n} \xi_i^2 dP = O\left(\frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}}\right) \qquad (n \to \infty),$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n/n = \sigma^2 > 0$,

где $B_n = E(S_n^2)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Тогда имеет место

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \log_2 B_n}} = 1\right) = 1.$$

Доказательство сформулированного предложения опирается существенно на известную теорему Колмогорова — Хинчина о сходимости ряда случайных величин и теорему Колмогорова о законе повторного логарифма для независимых случайных величин (Kolmogorov A. N., Math. Ann., 1929, 101, 126—135).

А. А. Бобров

521. Одна теорема из теории безгранично делимых законов. Ибрагимов И. А., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 4, 485—489 (рез. англ.)

Доказывается теорема: Класс $\mathfrak{F}$ всех безгранично делимых функций распределения F таких, что из $F \in \mathfrak{F}$ и $F * H = Q$, где Q — безгранично делимая функция распределения, следует, что H безгранично делима, совпадает с совокупностью всех нормальных распределений.

В. Рихтер

522. Одномерные диффузионные процессы. Феллер (Diffusion processes in one dimension. Feller William), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 1, 1—31 (англ.)

Ранее автор (Ann. Math., 1952, 55, 468—519) нашел все фундаментальные решения обратного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1)$$

на интервале $(r_1,\ r_2)$ с коэффициентами, не имеющими особенностей внутри интервала $(r_1,\ r_2)$. Оказалось, что такое фундаментальное решение не единственно, вообще говоря, а для получения единственного решения нужно потребовать, чтобы оно удовлетворяло некоторым дополнительным условиям, которые в простейших случаях совпадают с обычными граничными условиями, но, вообще говоря, к ним не сводятся, так как уже не носят локального характера.

В реферируемой работе изучается вероятностный смысл этих дополнительных условий и получаемых при этом решений (1) и указывается вероятностная конструкция, позволяющая построить процессы самого общего вида, удовлетворяющие (1). Автор называет элементарным возвратным процессом процесс, в котором частица, попав на границу, находится на ней некоторое случайное время T_i, $P\{T_i > t\} = e^{-t/\sigma_i}$, а потом с вероятностями p_{ij} перескакивает на границу r_j и с вероятностью $\tau_i \int_{x_1}^{x_2} dp_i(y)$ попадает в интервал $(x_1,\ x_2) \subset (r_1,\ r_2)$, причем может быть $p_{i1} + p_{i2} + \tau_i \int_{r_1}^{r_2} dp_i(y) < 1$, так что процесс с положительной вероятностью может прекратиться. Предельным переходом строится процесс с эластичным экраном, который является обобщением известных процессов с поглощающим и отражающим экранами. Если процесс с эластичным экраном не вырождается в процесс с отражающим экраном, то частица с вероятностью 1 попадет на границу. Процесс самого общего вида получается в том случае, если частица попадает на границы как в процессе с эластичным экраном, а уходит с границы как в элементарном возвратном процессе. Для переходных вероятностей этого процесса вычисляются преобразования Лапласа по времени.

Автор указывает на интерес, который представляет изучение траекторий процесса с эластичным экраном вблизи границы.

А. В. Скороход

523. Заметка об отображениях вероятностных пространств. Базу Д., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 5, 33—35

Вероятностное пространство $(X, \bar{B}, P)$ определяется произвольным абстрактным пространством X, σ-алгеброй $\bar{B}$ подмножеств пространства X и вероятностной мерой P на $\bar{B}$. Вероятностное пространство $(X_1, \bar{B}_1, P_1)$ отображается в вероятностное пространство $(X_2, \bar{B}_2, P_2)$, если существует отображение $f(x)$ простран-

ства X_1 в X_2, такое, что для всякого $G \in \bar{B}_2$, $f^{-1}(G) \in \bar{B}_1$ и $P_2(G) = P_1(f^{-1}(G))$.

Показывается, что при некоторых условиях поле вероятностей случайной равномерно распределенной величины отображается в пространство вероятностей дискретного случайного процесса. Имеются опечатки.
А. В. Скороход

524. **К понятию энтропии конечной вероятностной схемы. Фаддеев Д. К.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 227—231

Предлагаются следующие аксиомы для энтропии $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ конечной вероятностной схемы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$: 1) $H(p, 1-p)$ непрерывна при $0 \leqslant p \leqslant 1$ и положительна хотя бы в одной точке; 2) $H(p_1 \ldots p_n)$ симметрична относительно $p_1, \ldots, p_n$; 3) при $n \geqslant 2$, $p_n = q_1 + q_2$ имеет место равенство $H(p_1, \ldots, p_{n-1}; q_1, q_2) = H(p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n) + p_n H(q_1/p_n, q_2/p_n)$. Приводятся все нужные вычисления.
M. Rosenblatt-Rot

525. **Понятие «байесовского горизонта». Финетти** (La notion de «horizon bayesien». Finetti Bruno de), Colloq. analyse statist., CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 57—71 (франц.)

Автор излагает свою точку зрения на основы теории вероятностей и математической статистики, стремясь примирить современные идеи с прежними субъективистскими построениями, основывающимися на обратных теоремах. Он дает свою интерпретацию концепции Вальда об оптимальных байесовских правилах решения в терминах развиваемой им «мультисубъективной» теории вероятностей.
Н. В. Смирнов

526. **Последняя неизданная рукопись Дёблина. Леви** (Le dernier manuscrit inédit de W. Doeblin. Lévy Paul), Bull. sci. math., 1956, **80**, mars-avril (франц.)

Описание последней неизданной рукописи Дёблина и некоторые замечания к ней. Рукопись составляют отрывки в 20 рукописных страниц, в которых имеются наметки для характеризации класса всех предельных распределений для «частичных сумм»

$$b_{n_\rho}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n_\rho} X_i - a_{n_\rho}\right) \quad (\rho \to \infty)$$

независимых и одинаково распределенных случайных величин X_i.
А. А. Бобров

527. **О сумме положительных случайных величин. Жервез** (Sur la somme de variables aléatoires positives. Gervaise Anne-Marie), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 7, 840—842 (франц.)

Рассматривается $m-1$ положительных случайных величин, характеристическая функция среднего арифметического которых равна

$$\int_0^\infty g^{m-1}(tx^{-1}(m-1)^{-1})\, dF^m(x);$$

здесь

$$g(t) = \int_0^\beta e^{itx} dF(x)/F(\beta),$$

$F(x)$ — непрерывная функция распределения неограниченной случайной величины. Пусть $k_m(u)$ — решение уравнения

$$m(1-F(x)) = u \quad (0 \leqslant u \leqslant m), \quad M(\beta) = \beta^{-1}\int_0^\beta x dF(x) \Big/ \int_0^\beta dF(x).$$

Доказывается, что плотность распределения $f_m(y)$ среднего арифметического при $m \to \infty$ стремится к пределу $f(y)$. Если $\lim_{m\to\infty} M(k_m(u))$ зависит от u, то $f(y) = 0$ при $y > 1$, $f(y) = \exp(-u_0(y))$ при $y < 1$, где $u_0(y)$ есть решение уравнения $\lim_{m\to\infty} M(k_m(u)) = y$. Если $\lim_{m\to\infty} M(k_m(u)) = c$ не зависит от u, то $f(y) = \delta(y-c)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака.
И. П. Кубилюс

528. **Векторная форма теоремы Вальда — Вольфовитца—Хёфдинга. Фрейзер** (A vector form of the Wald—Wolfowitz-Hoeffding theorem. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 2, 540—543 (англ.)

Пусть $\|C_{n1}(i, j)\|, \ldots, \|C_{nk}(i, j)\|$ — матрицы n-го порядка с действительными элементами. Пусть, далее, $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ — случайный вектор, возможными значениями которого являются перестановки из чисел $1, 2, \ldots, n$, каждая из которых имеет вероятность $(n!)^{-1}$.

Пусть $S_{n\alpha} = \sum_{i=1}^n C_{n\alpha}(i, R_i)$. Подсчитываются $ES_{n\alpha}$, $\operatorname{Var} S_{n\alpha}$, $\operatorname{cov}(S_{n\alpha}, S_{n\gamma})$. Находятся условия, при которых вектор

$$\left(\frac{S_{n1} - ES_{n1}}{(\operatorname{Var} S_{n1})^{1/2}}, \ldots, \frac{S_{nk} - ES_{nk}}{(\operatorname{Var} S_{nk})^{1/2}}\right)$$

при $n \to \infty$ имеет k-мерное нормальное распределение.
С. Х. Туманян

529. **Распределение корней квадратных уравнений со случайными коэффициентами. Хамблен** (Distributions of roots of quadratic equations with random coefficients. Hamblen John W.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1136—1143 (англ.)

Изучается совместная функция распределения корней η_1 и η_2 квадратного уравнения $\eta^2 - \xi_1\eta + \xi_2 = 0$, если дана плотность $f(x, y)$ совместной функции распределения его коэффициентов. Разобраны примеры, когда $f(x, y)$ есть плотность двумерного нормального закона и когда $f(x, y) = \exp\{-(x+y)\}$, $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$.
Р. З. Хасьминский

530. **О характеризации нормального распределения. Блум** (On a characterization of the normal distribution. Blum J. R.), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1-2, 59—62 (англ.)]

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — характеристические функции и

$$\varphi(t)\psi(t) = e^{ict}\varphi^{m_1}\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\varphi^{n-m_1}\left(\frac{-t}{n^{1/2}}\right) \times \psi^{m_2}\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\psi^{n-m_2}\left(\frac{-t}{n^{1/2}}\right)$$

($0 \leqslant m_i < n$, $i = 1, 2$ — целые числа) при любых t. Тогда $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — характеристические функции нормальных распределений.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $M(t)$ — характеристические функции и

$$\varphi(\alpha t)\psi(t) = M[(\alpha^2+1)^{1/2}t]$$

при всех t и при α из некоторого множества A. Тогда все эти функции суть характеристические функции нормальных распределений.
В. П. Скитович

531. **Характеризация нормального распределения по свойствам подходящих линейных статистик. Лага Р. Г.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 90—98

Вводится определение: условное распределение случайной величины y при фиксированном значении случайной величины x есть ЛРГ (β, σ_0^2), если регрессия y по x линейна и равна βx, а условная дисперсия y при фиксированном x есть σ_0^2 и не зависит от x.

Доказывается лемма: Пусть x и y — две случайные величины с конечными дисперсиями. Для того чтобы условное распределение y при фиксированном x было ЛРГ (β, σ_0^2), необходимо и достаточно

$$\left.\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}\right|_{v=0} = \beta\frac{\partial\varphi(u, 0)}{du},$$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi(u, v)}{\partial v^2}\right|_{v=0} = -\sigma_0^2\varphi(u, 0) + \beta^2\frac{d^2\varphi(u, 0)}{du^2},$$

где $\varphi(u, v)$ и $\varphi(u, 0)$ — соответствующие характеристические функции распределения (x, y) и частного распределения x.

Далее рассматриваются последовательности (x_j, y_j) $(j = 1, 2, \ldots, n)$ независимо (не неодинаково) распределенных двумерных величин, имеющих конечные дисперсии, таких, что условное распределение y_j для фиксированных x_j есть ЛРГ $(\beta_j, \sigma_{j_0}^2)$ и линейные формы

$$X = \sum a_j x_j \text{ и } Y = \sum b_j y_j, \quad a_j b_j \neq 0.$$

Доказываются теоремы.

Теорема 3.1. Условное распределение Y при фиксированном X будет ЛРГ (β, σ_0^2), если

$$\frac{b_1\beta_1}{a_1} = \frac{b_2\beta_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n\beta_n}{a_n}.$$

Теорема 3.2. Для того чтобы условное распределение Y при фиксированном X было ЛРГ (β, σ_0^2), необходимо и достаточно, чтобы каждая случайная величина x_j, для которой $b_j\beta_j/a_j \neq \beta$, имела нормальное распределение. Все y и остальные x_j могут иметь произвольное распределение. β задается равенством $\beta = \sum a_j b_j \beta_j \sigma_j^2 / \sum a_j^2 \sigma_j^2$, суммирование здесь производится по всем индексам j, для которых $b_j\sigma_j/a_j \neq \beta$.

На основании этих теорем дается несколько следствий, характеризующих нормальное распределение. В частности при дополнительном условии существования дисперсий приводится теорема, доказанная референтом (РЖМат, 1953, 346). В. П. Скитович

532. Условие для существования моментов бесконечно-делимых распределений. Шапиро (A condition for existence of moments of infinitely divisible distributions. Shapiro J. M.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 69—71 (англ.)

Пусть $G(u)$ — ограниченная невозрастающая функция, с помощью которой выражается по формуле Леви—Хинчина характеристическая функция бесконечно-делимого закона распределения $F(x)$. Доказывается, что для того чтобы момент порядка $2k$ распределения $F(x)$ был конечным, необходимо и достаточно, чтобы момент того же самого порядка функции $G(u)$ существовал (k — натуральное число). Выражаются моменты $F(x)$ через моменты $G(u)$.

M. Rosenblatt-Rot

533. Метод введения понятия «меры», особенно удобный для теории вероятностей. Финетти (Une façon d'introduire la notion de «mesure», particulièrement convenable pour la théorie des probabilités. Finetti Bruno de), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 289—290 (франц.)

Рассматривается класс $\mathfrak{E}$ множеств E пространства $\mathfrak{E}$. Пусть F — пространство действительных, ограниченных, определенных над $\mathfrak{E}$, функций. Определяется функционал $\mu(f)$ для $f \in A \subset F$. Если $E \in \mathfrak{E}$, то пусть $f_E(x) = 1$ при $x \in E$ и $f_E(x) = 0$ при $x \overline{\in} E$; $\mu(E)$ определяется из $\mu(E) = \mu(f_E)$.

Рассматривается вопрос продолжения этой меры инвариантно относительно группы. Определяется непрерывность $\mu(f)$ относительно линейной системы φ: $\mu(f_n) \to 0$ для всякой последовательности равномерно ограниченных в каждой точке, сходящихся к нулю функций $f_n \in \varphi$. M. Rosenblatt-Rot

534. Цепи с полными связями с плотностью. Чуку (Lanţuri cu legături complete cu densitate. Ciucu George), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 7-8, 345—349 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается цепь с полными связями и функциями $P^n(t, A)$ как вероятностями перехода. Предположим, что

$$P^n(t, A) = \int_A \varphi^n(t, y)\, dP(y)$$

при каждом n, где плотности $\varphi^n(t, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varphi^n(t, x) = \int_W \varphi'(t, x)\, \varphi^{n-1}[y(t, x)]\, dP(y).$$

Через Tf обозначается оператор, определенный равенством

$$Tf = \int_W \varphi(t, x)\, f[y(t, x)]\, dP(x).$$

Нетрудно доказать, что если функция f удовлетворяет условию Липшица, то из любой подпоследовательности последовательности $(T_n^n)_{1 \leqslant n < x}$ можно извлечь последовательность, совпадающую на W. На основании этого наблюдения не представляет затруднения доказать, что если $\lambda = 1$ есть единственное собственное значение с модулем, равным единице, и если это собственное значение простое, то имеет место эргодический принцип в смысле Маркова.

Резюме автора

535. Экстраполирование однородных случайных полей и количество информации о гауссовском случайном поле, содержащейся в другом гауссовском случайном поле. Пинскер М. С., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 5, 815—818

Для однородных случайных функций $\xi(\mathbf{m})$ целочисленного n-мерного векторного аргумента $\mathbf{m}$ формулируются понятия регулярности, несингулярности, сингулярности, являющиеся обобщением соответствующих определений А. Н. Колмогорова для одномерного случая. Формулируются теоремы о регулярных и несингулярных однородных случайных функциях, являющиеся обобщением теорем А. Н. Колмогорова. В частности, для регулярной или несингулярной функции $\xi(\mathbf{m})$

$$\sigma_{\xi\xi}^2 = (2\pi)^n \exp\left\{(2\pi)^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda\right\},$$

где $f_{\xi\xi}(\lambda)$ — спектральная плотность.

Формулируются теоремы, являющиеся обобщением на многомерный случай результатов работы автора (РЖМат, 1956, 3972) о количестве информации о гауссовской случайной функции, содержащейся в другой гауссовской случайной функции. Именно, если хотя бы одна из однородных и однородно-связанных гауссовских случайных функций $\xi(\mathbf{m})$ и $\eta(\mathbf{m})$ несингулярна, то

$$I\{\xi(\mathbf{m})\, \eta(\mathbf{m})\} =$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} = \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda)\, f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda)\, f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2}\, d\lambda.$$

Указывается, как изложенные результаты обобщаются на случай непрерывного векторного аргумента.

А. С. Монин

536. **О линейном экстраполировании дискретного однородного случайного поля. Цзян Цзе-пей,** Докл. АН СССР, 1957, 112, № 2, 207—210

Рассматривается однородное случайное поле $x(s, t)$, зависящее от двух дискретных параметров s и t (относительно определения такого поля см., например, стр. 584 книги Дуба, РЖМат, 1957, 5755 К). Пусть $B_x(s, t)$ — корреляционная функция этого поля, $F_x(\lambda, \mu)$ — соответствующая спектральная функция. Через $H_x(t)$ обозначается минимальное линейное замкнутое (в смысле сходимости в среднем квадратичном) подпространство, содержащее все $x(m, n)$ с $-\infty < m < \infty$ и $n \leqslant t$. Поле называется сингулярным, если $\bigcap_t H_x(t) = \bigcup_t H_x(t)$, и регулярным, если проекция (в смысле метрики $\|X\|^2 = M|X|^2$ вектора $x(s, t)$ на $H_x(0)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Указывается, что для регулярности поля $x(s, t)$ необходимо и достаточно, чтобы меры $dF_x(\lambda, \mu)$ и $dF_x(\lambda, \pi)\, d\mu$ были абсолютно непрерывны одна относительно другой и чтобы для почти всех (относительно $dF_x(\lambda, \pi)$) значений λ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \pi)\, d\mu} \right) d\mu \right| < +\infty;$$

для сингулярности $x(s, t)$ необходимо и достаточно, чтобы для почти всех (в том же смысле) значений λ имело место обратное соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left(\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \pi)\, d\mu} \right) d\mu = -\infty.$$

Приводится общая формула для квадрата длины перпендикуляра, опущенного из точки $x(s, m)$ на $H_x(-1)$ (т. е. для среднего квадрата ошибки экстраполирования поля $x(s, t)$ по t на $m+1$ шагов вперед); этот результат обобщает известный результат А. Н. Колмогорова (Бюлл. Моск. ун-та, 1941, 2, № 6; Изв. АН СССР, сер. матем., 1941, 5, № 1), касающийся экстраполирования стационарных случайных последовательностей.

Поле $x(s, t)$ называется полем марковского типа, если проекция $x(s, t)$ на $H_x(t-1)$ принадлежит линейному замкнутому многообразию, натянутому на величины $x(s, t-1)$, $-\infty < s < \infty$. Даются условия относительно спектральной функции, характеризующие однородные поля марковского типа; для регулярных полей марковского типа дается общая формула для проекции $x(s, t)$ на $H_x(t-1)$.

Доказательства в заметке отсутствуют. Встречаются некоторые досадные опечатки (в формуле (1) вместо $M[x(s+m, t+n)\, \overline{x(m, n)}]$ ошибочно напечатано $M[x(s+m, t+n)\, x(s+t)]$; на стр. 208, строка 20 сверху, вместо $l_n(\lambda)$ дважды напечатано $\ln(\lambda)$).

А. М. Яглом

537. **Аффинная теория случайных величин. Помпиль** (Teoria affine delle variabili casuali. Pompilj Giuseppe), Industria (Ital.), 1956, № 2, 143—163 (итал.)

Все n-мерные случайные величины можно разбить на классы аффинной смежности, если считать за эквивалентные случайные величины такие, которые переходят друг в друга при невырожденных аффинных преобразованиях n-мерного пространства их значений. Дается обзор исследований автора и некоторых других математиков, работавших в том же направлении: Карузи (Carusi), Даль-Альо (Dall'Aglio), Де Люча (De Lucia), Фарки (Farchi), Ланденна (Landenna), Рицци (Rizzi), Сальвемини (Salvemini) в области построения и изучения свойств различных характеристик случайных величин, инвариантных при их изменении в одном классе аффинной смежности, или изучения изменения подобных характеристик при аффинных преобразованиях случайных величин в случае отсутствия такой инвариантности. Рассматриваются, в частности, такие характеристики, как индекс различия, индекс несходства (dissomiglianza), индекс зависимости двух случайных величин и их обобщения, понятие инволюции сопряженных диаметров в аффинно инвариантной теории регрессии. Определяются некоторые аффинно инвариантные понятия такие, как вполне линейная регрессия, внутренняя независимость двумерной случайной величины, и приводятся условия для их осуществления.

М. Ф. Бокштейн

538. **Об одном обобщении фундаментального тождества Вальда. Белман** (On a generalization of the fundamental identity of Wald. Bellman Richard), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 257—259 (англ.)

Фундаментальное тождество Вальда в последовательном анализе $M\{\Phi(t)^{-n} \exp(S_n t)\} = 1$, где $\Phi(t) = Me^{ty}$, $t > 0$, $S_n = \sum_1^n y_j$, y_j — независимые одинаково распределенные случайные величины, а n — целочисленная случайная величина такая, что условие $n = k$ есть условие, наложенное только на $y_1, \ldots, y_n$, обобщается на случайные величины y_j, связанные в цепь Маркова. Доказательство обобщенного тождества, носящего асимптотический характер, только намечено. Указываются также иные соотношения, аналогичные тождеству Вальда.

И. И. Гихман

539. **О случайной функции $X(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, d\zeta(s)$. Мачадо** (On the random function $X(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, d\zeta(s)$. Machado Emilio Antonio), Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. Serie Tercera. Publ. Esp., 1954, 48, № 211, 23 pp. (исп.)

Для случайного процесса $X(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, d\zeta(s)$, где $\zeta(s)$ — процесс с независимыми приращениями такой, что распределение $\zeta(s+h) - \zeta(s)$ зависит только от h, даются формулы для характеристической функции $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ и их ковариации. Если $K(t, s) = u(t)\, v(s)$, $X(t)$ есть марковский процесс. Если K есть функция только от $t - s$ и $t_0 = -\infty$, то $X(t)$ есть стационарный процесс.

D. Blackwell

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 166.

540. ***N*-мерные распределения, содержащие нормальную компоненту. Стандиш** (*N*-dimensional distributions containing a normal component. Standish Charles), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 4, 1161—1165 (англ.)

Доказывается теорема: Для того чтобы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ допускала представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} (x_k - u_k)^2\right\} dP(u_1, \ldots, u_n),$$

где $P(u_1, \ldots, u_n)$ — функция распределения, необходимо и достаточно

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1,$$

2. $f(x_1, \dots, x_2)$ ограничена и

$$\left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, \dots, x_n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant A^n 2^{\frac{k_1+\dots+k_n}{n}} \sqrt{k_1!\, k_2! \dots k_n!},$$

3. $$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}}{4^{k_1+\dots+k_n} k_1! \dots k_n!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$$

$$|t_1| < 1, \dots, |t_n| < 1.$$

И. И. Гихман

541. О нормальном распределении. Гейссер (Note on the normal distribution. Geisser Seymour), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 858—859 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение со средним μ и дисперсией σ^2.

Пусть $\bar{x} = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_j$,

$$\delta_k^2 = \frac{1}{2(n-k)} \sum_{j=1}^{n-k} (x_{j+k} - x_j)^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теорема. Случайные величины x_j распределены нормально тогда и только тогда, когда $\bar{x}$ и δ_k^2 независимы.

В. И. Скитович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

542. К вопросу о нахождении генерального распределения по распределению статистики. Линник Ю. В., Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 4, 466—478 (рез. англ.)

Пусть X — одномерная случайная величина с законом распределения $F(x)$, а $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ — соответствующая повторная выборка. Решается вопрос: в каких случаях точное знание закона распределения $F_Q(x)$ некоторой статистики $Q(\xi)$ позволяет определить генеральный закон распределения. Вводится понятие класса типа $\{D_{\text{кус}}\}$ и доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть в сегменте $[-\alpha, \alpha]$ дана четная непрерывная вероятностная плотность $y(x)$, которая может обращаться в нуль только на концах этого сегмента. Пусть $Q(x_1, \dots, x_n)$ — определенная, кусочно-гладкая звездчатая однородная, положительно измеренная статистика. Тогда распределение этой статистики, индуцированное $y(x)$, определяет $y(x)$ в классе четных плотностей типа $\{D_{\text{кус}}\}$, содержащем $y(x)$.

Теорема 2. Пусть рассматриваются вероятностные плотности, заданные на сегменте $[-\alpha, \alpha]$, принадлежащие классу типа $\{D_{\text{кус}}\}$ и имеющие не более чем счетное множество нулей на сегменте задания. Если одна из таких плотностей индуцирует распределение статистики $Q(x_1, \dots, x_n)$ типа, указанного в теореме 1, то это распределение статистики определяет плотность $y(x)$ в ее классе.

Теорема 3. Пусть дана вполне симметричная плотность $y(x)$, голоморфная во всех точках действительной оси и индуцирующая на определенную статистику $Q(x_1, \dots, x_n)$ типа, указанного в теореме 1, некоторое распределение. Тогда это распределение определяет $y(x)$ в классе всех вполне симметрических плотностей ограниченной вариации в окрестности нуля.

Указывается метод для решения задачи в том случае, когда исходная величина X является случайным m-мерным вектором.

В. П. Скитович

543. О характеризации некоторых статистических распределений. Молдон (Characterizing properties of statistical distributions. Mauldon J. G.), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 26, 155—160 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — одинаково распределенные и независимые случайные величины с плотностью распределения $f(x)$. Пусть $n\bar{x} = \sum x_i$, $(n-1)s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$, $t = \bar{x}\sqrt{n}/s$. Известно, что если $f(x)$ — плотность нормального распределения, то t имеет распределение Стьюдента. Спрашивается: будет ли $f(x)$ плотностью нормального распределения, если известно, что t имеет распределение Стьюдента?

Рассматривается случай, когда $n = 2$, и устанавливается, что нормальное распределение не является единственным и t будет иметь распределение Стьюдента, если в качестве плотности брать функции $\sqrt{2}/\pi(1+x^2)$ и $x^2\sqrt{2}/\pi(1+x^4)$.

Если рассматривать случайные независимые величины x и y, имеющие одинаковое χ^2-распределение, то их отношение имеет F-распределение. Показывается, что χ^2 не является единственным распределением, обладающим таким свойством.

В. П. Скитович

544. Заметка о пределах Бхаттачария для отрицательно биномиального распределения. Мерти (A note on Bhattacharyya bounds for the negative binomial distribution. Murty V. N.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1182—1183 (англ.)

Рассматривается последовательность пределов Бхаттачария для дисперсии несмещенной оценки параметра p в отрицательно биномиальном распределении, задаваемом формулой $P(X = x) = qp^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$, где $q = 1 - p$. k-й нижний предел L_k определяется как частное от деления детерминанта

$$\begin{vmatrix} \lambda_{22}\lambda_{23} \dots \lambda_{2k} \\ \lambda_{32}\lambda_{33} \dots \lambda_{3k} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{k2}\lambda_{k3} \dots \lambda_{kk} \end{vmatrix} \text{ на детерминант } \begin{vmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} \dots \lambda_{k2} \\ \lambda_{21}\lambda_{22} \dots \lambda_{k3} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{k1}\lambda_{k2} \dots \lambda_{kk} \end{vmatrix},$$

где $\lambda_{mn} = E(S_m S_n)$, а $S_n = \dfrac{1}{P(x)} \dfrac{\partial^n P(x)}{\partial p^n}$.

Показывается, что $\lim_{k\to\infty} L_k = pq$.

Б. Н. Гартштейн

545. О регрессионных свойствах дискретных систем вероятностных функций. Стейн (On regression properties of discrete systems of probability functions. Steyn H. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 1, 119—127; Indagationes math., 1957, **19**, № 1, 119—127 (англ.)

Найдены необходимое и достаточное условия рациональности линии регрессии $E(x_1 \mid x_2, \dots, x_n)$ (т. е. для представления в виде частного двух многочленов). С их помощью получены линии регрессии для ряда дискретных распределений, в частности, гипергеометрического типа.

С. С. Кислицын

546. Замечание о сумме ковариаций порядковых статистик из нормальных распределений. Сил (A note on sums of covariences of order statistics from

normal populations. Seal K. C.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, **7**, № 25, 33—34 (англ.)

Есть n нормальных распределений со средними μ_i и дисперсиями 1. Сделано n наблюдений x_i каждой из этих величин. $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots, \leqslant X_{(n)} - x_i$, расположенные в возрастающем порядке. Тогда $\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где σ_{ij} — ковариация $X_{(i)}$ и $X_{(j)}$. Это свойство было впервые установлено Лойдом (Lloyd, Biometrika, 1952, **39**, 88—95). Если $Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Y_{(n)}$ — аналогичные порядковые статистики n гамма-распределений $g(\alpha, p_i)$, $\alpha > 0$, $p_i > 0$, то $Y_{(p)}/Y_{(q)}$ $(p \neq q = 1, 2, \ldots, n)$ не зависит от $\sum_{i=1}^{n} Y_{(i)}$.

С. С. Кислицын

547. О минимуме дисперсии среди некоторых линейных фракций порядковых статистик. Сил (On minimum variance among certain linear functions of order statistics. Seal K. C.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 854—855 (англ.)

Пусть имеется n нормальных генеральных совокупностей $N(\mu_1, 1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, в каждой из которых выбирается по одному элементу. Пусть, далее, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — вариационный ряд, построенный на такого рода выборке, а X_i — случайная величина, соответствующая i-му члену этого ряда. Тогда дисперсия суммы $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$, при условии, что $\sum c_i = 1$, будет минимальной при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1/n$.

В. П. Скитович

548. Теория и приложения статистических функций. Мизес (Théorie et application des fonctions statistiques. Misès Richard de), Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. mat. e appl., 1952 (1953), ser. 5, **11**, 374—410 (франц.)

В лекциях я использовал результаты многих моих предшествующих публикаций, пополняя некоторые лакуны, изменяя и иногда исправляя доказательства.

Основные мои работы о статистических функциях следующие: Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1935, **1**, № 1, 61—80; Monatsh. Math. Phys., 1936, **43**, 105—128; Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, **6**, 185—212; Ann. Math. Statistics, 1947, **18**, 309—348.

Из авторского введения

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 637.

549. Экспериментальное определение мощности критерия по числу рекордов для «тренда» в временных рядах. Фостер, Тейкроу (A sampling experiment on the powers of the records tests for trend in a time series. Foster F. G., Teichroew D.), J. Roy Statist. Soc., 1955, **B17**, № 1, 115—121 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность случайных величин и

$$s_r = \begin{cases} 1, \text{ если } x_r > \max(x_1, \ldots, x_{r-1}), \\ -1, \text{ если } x_r < \min(x_1, \ldots, x_{r-1}), \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$s'_r = \begin{cases} 1, \text{ если } x_r > \max(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ -1, \text{ если } x_r < \min(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$d = \sum_{r=2}^{n} s_r, \quad d' = \sum_{r=1}^{n-1} s'_r, \quad D = d - d'.$$

Такого рода статистики были предложены Фостером и Стюартом (РЖМат, 1955, 5191) для проверки случайности. В настоящей статье приводится функция мощности для критериев, основанных на статистиках d и D, полученная с помощью выборок объема 1000 на вычислительной машине СВАК (SWAC). В качестве конкурирующей гипотезы бралось нормальное распределение с линейным «трендом». Выборки из нормального распределения заменялись в машине выборками из композиции 8 равномерных распределений. Из эмпирических данных определялись математические ожидания и дисперсии статистик d и D. При построении графиков функций мощности использовалась асимптотическая нормальность статистик d и D.

Б. А. Севастьянов

550. Графический метод разделения двух популяций. Пен (Méthode graphique de séparation de deux populations. Pin H.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 1, 77—83 (франц.)

Проблема «рассечения» кривой распределения частот, представляющей смешение двух нормальных распределений, если гипотеза нормальности обоснована, имеет точное решение (Strömgren, Skand. Aktuar., 1934, **17**, 1—6), по крайней мере, в теоретическом плане.

Но разыскание 6 неизвестных (3 для каждого нормального распределения) ведет к составлению сложной системы 6 уравнений, решение которой трудоемко и к тому же затруднено использованием численных величин моментов порядка 1—5 наблюденного распределения. Эти моменты, вычисленные на основе сравнительно небольшой выборки, могут (в особенности моменты высокого порядка), содержать значительные ошибки.

Графический метод, предложенный автором и принцип которого уже был использован в различной форме, быстро дает, если обстоятельства не очень неблагоприятны, приближенное решение проблемы.

Резюме автора

551. Асимптотическое распределение порядковых коэффициентов корреляции. Даниэлс (The approximate distribution of serial correlation coefficients. Daniels H. E.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 169—185 (англ.)

Рассматривается циклический марковский процесс, определяемый равенством

$$x_s - \rho x_{s-1} = \varepsilon_s, \; x_0 \equiv x_n \; (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ независимы и распределены нормально (0, 1).

Выборочная оценка r коэффициента корреляции ρ имеет вид

$$r = \frac{x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n + x_n x_1}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Изучается асимптотическое распределение r, а также точность аппроксимации. В случае, когда среднее значение неизвестно, в качестве оценки величины ρ принимается

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_{n-1} - \bar{x})(x_n - \bar{x})}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2} + \frac{(x_n - \bar{x})(x_1 - \bar{x})}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2},$$

где $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. Изучается асимптотическое распределение r и в этом случае.

Аналогичные вопросы рассматриваются для нециклического марковского процесса, определяемого равенством

$$x_s - \rho x_{s-1} = \varepsilon_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где ε_s, как и прежде, независимы и распределены нормально (0, 1).

Далее рассматривается процесс, определяемый равенством

$$x_s + a_1 x_{s-1} + a_2 x_{s-2} + \ldots + a_m x_{s-m} = \varepsilon_s,$$
$$x_s \equiv x_{n+s} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где m есть величина порядка $O(1)$ по отношению к n и ε_s независимы и распределены нормально (0, 1). Изучается асимптотическое совместное распределение величин

$$r_s = \frac{x_1 x_{s+1} + x_2 x_{s+2} + \ldots + x_{n-s} x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} +$$

$$+ \frac{x_{n-s+1} x_1 + \ldots + x_n x_s}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$(s = 1, 2, \ldots, n)$.

В заключение изучается асимптотическое совместное распределение частных коэффициентов корреляции r_j. величин x_s и x_{s+j} при условии, что $x_{s+1}, \ldots, x_{s+j-1}$ принимают фиксированные значения.

С. Х. Туманян

552. **О доверительных распределениях и априорных распределениях : пример, в котором первое не может быть связано со вторым. Гранди** (Fiducial distributions and prior distributions: an example in which the former cannot be associated with the latter. Grundy P. M.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 2, 217—221 (англ.)

Известно, что для нормального распределения с дисперсией 1, гамма-распределения и некоторых других однопараметрических распределений, у которых сумма наблюдений является достаточной статистикой при оценке параметра, апостериорное распределение параметра, определяемое формулой Байеса (в предположении равномерного априорного распределения), совпадает с «доверительным» распределением (по Фишеру).

В реферируемой работе строится класс однопараметрических распределений, для которых также сумма наблюдений дает достаточную статистику при оценке параметра, но доверительное распределение не совпадает с апостериорным распределением параметра.

Б. Н. Гартштейн

553. **Анализ среднеквадратической регрессии для временных рядов с устраненным «трендом». Джоуэтт** (Least squares regression analysis for trend-reduced time series. Jowett G. H.), J. Roy Statist. Soc., 1955, **B17**, № 1, 91—104 (англ.)

Пусть $x(t)$ и $\varepsilon(t)$ — два независимых стационарных процесса и

$$y(t) = \alpha + \beta x(t) + \varepsilon(t). \qquad (1)$$

Анализируются различные способы оценки дисперсии выборочного коэффициента регрессии y по x. Предлагается для оценки коэффициента регрессии соотношение (1) заменять производными соотношениями, в которых α обращается в нуль. Б. А. Севастьянов

554. **Эмпирическая функция распределения для выборок с неполной информацией. Эр, Бранк, Юинг, Рид, Силверман** (An empirical distribution function for sampling with incomplete information. Ayer Miriam, Brunk H. D., Ewing G. M., Reid W. T., Silverman Edward), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 4, 641—647 (англ.)

Пусть ξ — случайная величина, функция распределения которой $F(t)$ неизвестна. Пусть, далее, $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ — некоторая неубывающая последовательность чисел.

Производится N_i независимых испытаний по отношению к событиям $\xi > t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Изучаются оценки максимального правдоподобия величин $p_i = P(\xi > t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть, далее, $\bar{p}(t)$ — неубывающая функция такая, что $\bar{p}(t_i) = p_i$ и $\bar{F}(t) = 1 - \bar{p}(t)$. Доказывается теорема о том, что при некоторых условиях функция $\bar{F}(t)$ сходится по вероятности к функции распределения $F(t)$, когда число испытаний неограниченно возрастает.

С. Х. Туманян

555. **Что такое статистика? Торренс-Иберн** (Qu'est-ce que la statistique? Torrens Ibern J.) J. Soc. statist. Paris, 1956, **97**, № 10—12, 289—293 (франц.)

Задача статистики обратна задаче теории вероятностей. Теория вероятностей отыскивает вероятность, что некоторое событие имеет данную причину; задача же статистики состоит в определении степени правдоподобия гипотезы, утверждающей, что событие является следствием данной причины.

С практической точки зрения статистика представляет метод математического анализа, позволяющий изучать с максимальной точностью явления, причины которых не вполне известны. А. К. Митропольский

556. **О некоторых аспектах нерегулярных критериев проверки гипотез. Чанда** (On some aspects of non-regular testing of hypotheses. Chanda K. C.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, **6**, № 23, 95—98 (англ.)

Рассматриваются вопросы проверки гипотез относительно функций распределения вида

$$f(x, \theta) = \frac{p(x)}{g(\theta)}, \quad p(x) > 0, \; g(\theta) > 0, \; a \leqslant x \leqslant b,$$

причем либо a, либо b зависит от θ.

Доказывается, что не существует равномерно несмещенного критерия для проверки гипотезы $\theta = \theta_0$. Однако существует равномерно наиболее мощный критерий для проверки указанной гипотезы относительно односторонних альтернатив $\theta > \theta_0$. Функция мощности этого критерия достигает единицы, если объем наблюдений превышает некоторое положительное целое число.

С. Х. Туманян

557. **Неэффективность выборочной медианы для многих известных симметричных распределений. Чжу** (The «inefficiency» of the sample median for many familiar symmetric distributions. Chu John T.), Biometrika, 1955, **42**, № 3—4, 520—521 (англ.)

Показывается, что для не очень малых n выборочная медиана $\tilde{x}$ имеет большую дисперсию, нежели выборочное среднее $\bar{x}$ для следующих симметричных распределений: треугольного, Стьюдента, β-распределения и т. д. Для этого вычисляется минимум $D\tilde{x}$, где $\tilde{x}$ — медиана выборки объема $2n+1$ из генеральной совокупности с плотностью $f(x)$, симметричной относительно $x = \xi$ и удовлетворяющей неравенству $f(\xi) \geqslant f(x)$ для всех x. В этих условиях

$$D\tilde{x} \geqslant [4f(\xi)]^{-2} (2n+3)^{-1}.$$

Сравнивая эту нижнюю грань с точными дисперсиями $D\tilde{x}$ перечисленных выше распределений, автор находит те n, начиная с которых $D\bar{x} \leqslant D\tilde{x}$.

Б. А. Севастьянов

558. **Критерий отношения правдоподобия для цепей Маркова. Гуд** (The likelihood ratio test for Markoff chains. Good I. J.), Biometrika, 1955, **42**, № 3—4, 531—533 (англ.)

Обобщаются результаты Хола (РЖМат, 1956, 5384) по построению критериев случайности при гипотезах марковской зависимости различных порядков. Пусть H_v означает гипотезу, что последовательность наблю-

дений образует цепь Маркова порядка ν. С помощью отношения максимумов правдоподобия обычным приемом строится критерий для проверки гипотезы H_μ при конкурирующей гипотезе H_ν ($\nu > \mu$). Получаемые при этом статистики асимптотически имеют распределение χ^2. Числа степеней свободы подсчитываются. Утверждается, что доказательства этих обобщений являются простыми модификациями доказательств Хола. Б. А. Севастьянов

559. Оценка максимального правдоподобия частично или полностью упорядоченных параметров. I. Эден (Maximum likelihood estimation of partially or completely ordered parameters. I. Eeden Constance van), Proc. Koninkl. nederl. akad. Wetensch., 1957, A60, № 1, 128—136; Indagationes math., 1957, 19, № 1, 128—136 (англ.)

Рассматриваются независимые случайные величины ξ_i ($i = 1, \ldots, k$) с дискретными или непрерывными функциями распределения $F_i(x \mid \theta_i)$, содержащими неизвестные параметры θ_i и n_i независимых наблюдений над ξ_i. При этом предполагается, что для некоторых замкнутых интервалов I_i ($i = 1, \ldots, k$) функции $F_i(x \mid y_i)$ при $y_i \in I_i$ являются функциями распределения. Пусть $L_i(y_i)$ — логарифм функции правдоподобия для ξ_i, $L = \sum_1^k L_i(y_i)$. Пусть, далее, заданы числа α_{ij} ($i, j = 1, \ldots, k$), равные 0,1 или —1 и удовлетворяющие условиям: 1) $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, 2) $\alpha_{ij} = 0$, если $I_i \cap I_j$ не пусто, 3) $\alpha_{ij} = 1$, если $\alpha_{ih} = \alpha_{hj} = 1$ для некоторого h. Обозначим через D выпуклую область $\alpha_{ij}(y_i - y_j) \leqslant 0$ ($i, j = 1, \ldots, k$) в пространстве параметров $G = I_1 \times \ldots \times I_k$. Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — оценки максимального правдоподобия (м. п.) для $\theta_1, \ldots, \theta_k$ в области D, т. е. при условии упорядоченности параметров посредством неравенств $\alpha_{ij}(\theta_i - \theta_j) \leqslant 0$ ($i, j = 1, \ldots, k$); $v_1, \ldots, v_k$ — оценки м. п. в G.

Функция $\varphi(y)$ называется строго унимодальной в интервале I, если существует $y^* \in I$ такое, что $\varphi(y) < \varphi(y') < \varphi(y^*)$ для всех $y, y' \in I$, удовлетворяющих неравенствам $y < y' < y^*$ или $y^* < y' < y$. В предположении, что для любого $M \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ с непустым пересечением $I_M = \bigcap_{i \in M} I_i$ функция $\sum_{i \in M} L_i(z)$ строго унимодальна в I_M, доказываются следующие теоремы.

1. L имеет единственный максимум в D.

2. Ограничения, накладываемые на параметры, вида $\theta_i \leqslant \theta_j$ (т. е. $\alpha_{ij} = 1$), $\alpha_{ih}\alpha_{hj} = 0$ для всех h между i и j обозначим через $R_1, \ldots, R_s$; каждому R_λ соответствует одна пара чисел (i, j), которую назовем (i_λ, j_λ). Совокупность всех $R_1, \ldots, R_s$ эквивалентна условию $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in D$. Если $t_1', \ldots, t_k'$ — оценки м. п. при условиях $R_1, \ldots, R_{\lambda-1}, R_{\lambda+1}, \ldots, R_s$, то $t_i = t_i'$ ($i = 1, \ldots, k$), если $t_{i_\lambda}' \leqslant t_{j_\lambda}'$ и $t_{i_\lambda} = t_{j_\lambda}$, если $t_{i_\lambda}' > t_{j_\lambda}'$.

Повторное применение последней теоремы позволяет найти оценки м. п. при условии упорядочения параметров. Вычисления обычно упрощаются, если воспользоваться следующими теоремами.

3. Если $\alpha_{ij}(v_i - v_j) \leqslant 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, k$, то $t_i = v_i$ ($i = 1, \ldots, k$).

4. Если $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_l m}$ для $i = l_1, \ldots, l_m$, то оценками м. п. для $\theta_{l_1}, \ldots, \theta_{l_m}$ являются значения $y_{l_1}, \ldots, y_{l_m}$, которые максимизируют $L_{l_1}(y_{l_1}) + \ldots + L_{l_m}(y_{l_m})$ в области $\alpha_{ij}(y_i - y_j) \leqslant 0$, $y_i \in I_i$ ($i, j = l_1, \ldots, l_m$).

5. Если для некоторых $i < j$ имеем $\alpha_{ij}(v_i - v_j) > 0$, причем $\alpha_{hi} = \alpha_{hj}$ для всех $h < i$, $\alpha_{ih} = \alpha_{hj} = 0$ для всех h между i и j, $\alpha_{ih} = \alpha_{jh}$ для всех $h > j$, то $t_i = t_j$.

6. Если для некоторых $i < j$ имеем $v_i \leqslant v_j$, причем $\alpha_{ij} = 0$, $\alpha_{hi} \leqslant \alpha_{hj}$ для всех $h < i$, $\alpha_{ih} \geqslant \alpha_{jh}$ для всех $h > j$, то $t_i \leqslant t_j$.

7. Пусть для некоторых i, j имеем $\alpha_{ij} = 0$ и D' — подобласть D, определяемая дополнительным условием $y_i \leqslant y_j$. Если L имеет в D' максимум в точке $(t_1', \ldots, t_k')$, то $t_h = t_h'$ ($h = 1, \ldots, k$) при $t_i' < t_j'$ и $t_i \geqslant t_j$ при $t_i' = t_j'$.

Частные результаты были опубликованы автором ранее (РЖМат, 1957, 8067). И. П. Кубилюс

560. К вопросу о предельных распределениях для максимального члена вариационного ряда. Мейзлер Д. Г., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та 1956 (1957), вып. 38, 90—109

Вводятся следующие классы законов распределения (з. р.)

1. Класс G. Совокупность $\Phi(x)$ з. р., для которых существуют последовательности з. р. $F_n(x)$ и константы $a_n > 0$ и b_n такие, что

$$\lim \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n) = \Phi(x) \quad (n \to \infty) \tag{1}$$

и притом равномерно относительно k

$$\lim F_k(a_n x + b_n) = 1 \quad (n \to \infty). \tag{2}$$

2. Класс G^*. Совокупность $\Phi(x)$ з. р., для которых существуют последовательности з. р. $F_n(x)$, удовлетворяющие условиям (1) и (2) при надлежащем выборе констант $a_n \equiv a > 0$ (не зависящей от n) и b_n.

3. Класс G^-. Совокупность $\Phi(x)$ з. р., для которых существуют последовательности з. р. $F_n(x)$, удовлетворяющие условиям (1) и (2) при некоторых $a_n \equiv a > 0$ и $b_n \equiv b$.

4. Класс $\overline{G}^-$. Расширение класса G^-, получающееся в силу допущения, что если $\Phi(x) \in G^-$, то при любых $a > 0$ и b $\Phi(ax + b) \in \overline{G}^-$.

В работе доказано, что класс G исчерпывается классами G^* и G^-. Б. В. Финкельштейн

561. Построение гауссовской выборки. Стейн, Сторер (Generating a Gaussian sample. Stein S., Storer J. E.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 87—90, 98 (англ.)

Рассматривается вопрос о том, как, имея таблицу случайных чисел (или иначе — выборку из совокупности независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале [0, 1]), получить с помощью алгебраических операций последовательность групп N чисел, представляющих последовательность независимых выборок из генеральной совокупности N-мерных векторов, подчиняющейся N-мерному гауссовскому закону распределения с заданной матрицей вторых моментов. А. М. Яглом

562. Возможности применения анализа функций плотности распределения вероятностей при оценке результатов измерений. Меддьеши (Anwendungsmöglickheiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen. Medgyessy P.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 3—4, 128—139 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

О некоторых экспериментальных кривых, например в спектроскопических исследованиях, известно лишь то, что они являются наложением — «смесью» — устойчивых, например нормальных, функций плотности распределения вероятностей, в то время как параметры

этих функций — некоторые физические константы — неизвестны. Задача определения этих параметров, так называемый «анализ смеси», решается точно методами теории вероятностей. Затем рассматриваются приближенные методы, главным образом в случае наложения функций плотности распределения Гаусса и Коши. Резюме автора

563. Дополнения к теории ряда упорядоченных статистик. Случай двух выборок. Савидж (Contributions to the theory of rank order statistics — the two-sample case. Savage I. Richard), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 590—615 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — выборки из совокупностей, подчиненных соответственно законам распределения $F(x)$ и $G(x)$. Рассматриваются тесты для проверки гипотезы $H_0: F(x) \equiv G(x)$, основанные на расположении элементов в вариационном ряде, построенном на этих выборках. Альтернативными гипотезами являются:

1. H_S. $F(x) \geqslant G(x)$ (имеются точки, в которых имеет место строгое неравенство).
2. H_T. $G(x) \equiv F(x-\theta)$, $\theta > 0$.
3. H_{TS}. $G(x) \equiv F(x-\theta)$, $\theta > 0$ и $F(x) + F(-x) = 1$.
4. H_{TSU}. $G(x) \equiv F(x-\theta)$, $\theta > 0$, $F(x) + F(-x) = 1$ и для любых $b > a > 0$ и $c > 0$ $F(a+c) - F(a) \geqslant F(b+c) - F(b)$.
5. H_M. Существуют $F'(x) = h(x, \theta_1)$, $G'(x) = h(x, \theta_2)$, $\theta_1 < \theta_2$. Для любых $x_1 < x_2$: $h(x_1, \theta_1)\, h(x_2, \theta_2) - h(x_1, \theta_2)\, h(x_2, \theta_1) \geqslant 0$.
6. H_L. $F(x) = [H(x)]^{\Delta_1}$, $G(x) = [H(x)]^{\Delta_2}$, $\Delta_2 > \Delta_1 > 0$, $H(x)$ — непрерывная функция распределения.
7. H_E. $F(x) = \theta(x, \Delta_1)$, $G(x) = \theta(x, \Delta_2)$, $\Delta_2 > \Delta_1 > 0$ $\theta(x, \Delta) = e^{\Delta x}$ при $x < 0$; 1 при $x > 0$.
8. H_{EV}. $F(x) = \Omega(x, \Delta_1)$, $G(x) = \Omega(x, \Delta_2)$, $\Delta_2 > \Delta_1 > 0$, $\Omega(x, \Delta) = \exp\{-e^{-x-\Delta}\}$.
9. H_N. $F'(x) = N(x, \theta_1)$; $G'(x) = N(x, \theta_2)$, $\theta_2 > \theta_1$, $N(x, \theta) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-(x-\theta)^2/2\}$.

Показывается, что при первых 4 альтернативах, вообще говоря, не существуют оптимальные тесты. Для H_M приводится необходимый критерий приемлемости теста. Для альтернатив 7—9 доказывается возможность построения оптимального непараметрического теста для малых выборок. Дается также предельный оптимальный тест.

Приводятся таблицы распределения вероятности различных порядковых рядов при $m+n \leqslant 10$, $m \leqslant n$. Б. В. Финкельштейн

564. Асимптотические распределения статистик, встречающихся в некоторых непараметрических критериях. Силви (The asymptotic distributions of statistics arising in certain non-parametric tests. Silvey Samuel D.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, 2, № 1, 47—51 (англ.)

Доказывается асимптотическая нормальность некоторых статистик, зависящих от упорядочения выборочных данных, при рандомизации расположения результатов измерений. И. И. Гихман

565. Квантовые гипотезы. Бродбент (Quantum hypotheses. Broadbent S. R.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 45—57 (англ.)

Работа посвящена выборкам из неоднородной совокупности. Рассматривается случай, когда имеются основания считать, что моды частичных совокупностей составляют арифметическую прогрессию. При этом исследуются следующие проблемы:

1. Для каждого наблюдения известно, к какой подсовокупности оно относится, и известно, что распределение во всех подсовокупностях нормальное. Требуется определить местонахождение мод. В этом случае результат каждого наблюдения можно представить в виде

$$y_{rs} = \beta + 2r\delta + \varepsilon_{rs},$$

где s — номер наблюдения, r ($r = 0, 1, \ldots, m$) — номер частичной подсовокупности, $\beta + 2r\delta$ — центр распределения r-ой подсовокупности; ε_{rs} — ошибки, распределенные нормально с центром в нуле, стандартные отклонения ε_{rs} одинаковы во всех подсовокупностях или изменяются пропорционально изменению подсовокупностей. Даны оценки также для дисперсий и распределения оценок.

2. Известны расположения мод, но неизвестна классификация наблюдений по частичным совокупностям и неизвестны также удельный вес каждой подсовокупности и требуется оценить дисперсию. Обозначим

$$z_i = y_{rs} - (\beta + 2r'\delta), \quad s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{n},$$

где r' выбран так, чтобы минимизировать $|z_i|$.

Получены выражения для $E(z^2/\delta^2)$ и $E(z^4/\delta^4)$ и показано, что s^2/δ^2 является несмещенной и состоятельной оценкой для $E(z^2/\delta^2)$. Отсюда получается оценка для $\sigma^2 \approx \delta^2 h(s^2/\delta^2)$, где $h(s^2/\delta^2) = g^{-1}(s^2/\delta^2)$, $g(\sigma^2/\delta^2) = E(z^2/\delta^2)$. Эта оценка состоятельная. Приводится таблица функции $h(s^2/\delta^2)$.

Рассматривается тест для проверки гипотезы о том, что совокупность состоит из частичных совокупностей с предполагаемыми модами. Альтернативной гипотезой является предположение об унимодальности совокупности. Предположенное расположение мод не основывается на выборке, служащей для испытания гипотезы. Критерием для принятия или отклонения гипотезы служит критическое значение, определяемое уровнем надежности. Для использования теста в некоторых случаях дана вспомогательная таблица. Б. В. Финкельштейн

566. Асимптотические свойства оценок наибольшего правдоподобия при одном стохастическом процессе. Фогель (Asymptotische Eigenschaften von Maximum-Likelihood Schätzwerten bei einem stochastischen Prozeß. Vogel Walter), Monatsh. Math., 1956, 60, № 4, 313—321 (нем.)

Имеется плотность распределения вероятностей $\varphi(x, s, \theta)$, зависящая от двух параметров s и θ. Проводится серия экспериментов для определения неизвестного постоянного значения θ_0 параметра θ. При этом экспериментатор может задавать любые значения параметра s. Предполагается, что выбор значения S_n параметра s в n-ом испытании есть определенная функция от результатов предыдущих испытаний: $S_n = s_n(X_1, \ldots, X_{n-1})$, где X_k — результат k-го испытания. Доказывается, что при этих условиях оценка наибольшего правдоподобия для θ_0, т. е. функция $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$, которая обращает в максимум $L_n = \prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, s_i(X_1, \ldots, X_{i-1}), \theta)$ сходится к θ_0 с вероятностью 1 ($P\{\hat{\theta}_n \to \theta_0\} = 1$).

Далее доказывается, что если $S_n \to \text{const}$ с вероятностью 1, то оценка $\hat{\theta}_n$ асимптотически нормальна и асимптотически эффективна. Точнее, доказывается, что этими свойствами обладает всякое решение $\hat{\theta}_n$ уравнения правдоподобия $\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta} = 0$, обладающее свойством $P(\hat{\theta}_n \to \theta_0) = 1$. Указывается, что свойство $P(\hat{\theta}_n \to \theta_0) = 1$ можно и не предполагать. Доказательства проводятся в естественных предположениях регулярности относительно функции $\varphi(x, s, \theta)$ и являются обобщением методов Вальда (Wald A., Ann.

Math. Statistics, 1948, 19; 1949, 20) и Крамера (Крамер Г., Математические методы статистики, М., Изд-во ин. лит., 1948). Имеются опечатки.

В. А. Волконский

567. **О сумме квадратов нормальных счетов. Рубен** (On the sum of squares of normal scores. Ruben H.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 456—458 (англ.)

Автор продолжает начатое им ранее (РЖМат, 1956, 7490) изучение свойств моментов r-й порядковой статистики в выборке размера n из нормальной совокупности. В частности, в работе изучается величина $S_n = \sum_{r=1}^{n} a_{r|n}^2$, где $a_{r|n}$ — математическое ожидание r-й порядковой статистики.

Дается общий метод нахождения S_n при любом n и приводится таблица, позволяющая вычислить S_n для $n = 1, 2, \ldots, 5$.

Б. Н. Гартштейн

568. **О теоретическом аспекте метода наименьших квадратов. Эйзерен** (The theoretical aspect of least squares. IJzeren J., van), Statistica, Rijswijk 1954, 8, 21—45) (дат.)

569. **Рекуррентная формула для вычисления кумулянтов и моментов статистического распределения, исходя из соответствующих факториальных моментов. Кастольди** (Formule ricorrenti per il calcolo dei cumulanti e dei momenti di una distribuzione statistica a partire dai corrispondenti momenti fattoriali. Castoldi Luigi), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1955, 24 (1954), 157—164 (итал.)

570. **О решениях некоторых совместных уравнений в теории систематических статистик. Хигути** (On the solutions of certain simultaneous equations in the theory of systematic statistics. Higuchi Isao), Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1954, 5, 77—90 (англ.)

571. **Средние и закон ошибок. Ройон** (On means and the law of errors. Rooijen J. P. van), Verzekerings-Arch. Actuarieel Bijvoegsel, 1954, 31, 77—85 (англ.)

572. **Заметка о сбалансированных планах с неполными блоками. Томпсон** (A note on the balanced incomplete block designs. Thompson W. A., Jr), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 842—846 (англ.)

Неполные сбалансированные блоки обладают тем свойством, что все эффекты обработки оцениваются с одинаковой точностью, т. е. оценки всех эффектов обработки имеют одинаковые дисперсии и одинаковые смешанные вторые моменты. В реферируемой работе показано, что верно и обратное предложение: если оценки всех эффектов обработки в плане с неполными блоками имеют одинаковые дисперсии и одинаковые смешанные моменты второго порядка, то план оказывается сбалансированным планом с неполными блоками.

Б. Н. Гартштейн

573. **Таблицы для применения теста трех выборок. Хирага, Моримура, Ватанабе** (Tables for three-sample test. Hiraga Yoshihiko, Morimura Hidenori, Watanabe Hisao), Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1954, 5, 97—102 (англ.)

Рассмотрим случайное расположение n элементов трех родов, например, n_1 элементов первого рода, n_2 элементов второго рода и n_3 элементов третьего рода, причем $n = n_1 + n_2 + n_3$; это можно рассматривать как три пробы объема n_1, n_2, n_3, и пусть r_i означает число серий элементов i-го рода. Положим $r = r_1 + r_2 + r_3$ — общее число серий. Согласно Муду (Mood, Ann. Math. Statistics, 1940, 11, 367—392) табулирование точного распределения r сводится к табулированию функции, которая представляет собой число различных расположений r_1 объектов одного рода, r_2 объектов второго рода, r_3 объектов третьего рода таким образом, что ни одна пара смежных объектов не будет одного и того же рода.

Таблица 1 дает наибольшее целое r_0, для которого вероятность $P\{r \leqslant r_0\} \leqslant 0{,}5$ при $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant 10$. Эта вероятность вычислена на основании точного распределения r. Таблица 2 дает значения r_0 для 5% уровня значимости при $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ от 10 до 30 включительно, и таблица 3 дает значения r_0 для всех значений $n_1 = n_2 = n_3$ от 11 до 30 включительно при 1% и 5% уровнях значимости (выдержки из работы).

L. A. Aroian

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 971.

574. **Об эффекте усечения некоторых или всех координат мультинормальной популяции. Бернбаум, Мейер** (On the effect of truncation in some or all coordinates of a multinormal population. Birnbaum Z. W., Meyer Paul L.), J. Indian Soc. Agric. Statistics, 1953, 5, 17—28 (англ.)

575. **Влияние выбора весов на значение индекса. Волф** (De invloed van de keuze der gewichten op de hoogte van een gewogen indexcijfer. Wolff P. de), Statist. neerl., 1957, 11, № 1, 17—22 (голл.; рез. англ.)

576. **Последовательный метод испытания с тремя возможными решениями для сравнения двух неизвестных вероятностей. Эден** (Sequential test with three possible decisions for the comparison of two unknown probabilities. Eeden Constance van), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 286—288 (англ.)

577. **Взвешенная медиана в непрерывном распределении. Бонферрони** (La mediana ponderata in una distribuzione continua. Bonferroni Carlo Emilio), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 21—31 (итал.)

578 К. **Введение в математическую статистику. Шметтерер** (Einfürung in die mathematische Statistik. Schmetterer L. Wien, Springer, 1956, 405, xxii S.) (нем.)

Первое современное и достаточно полное изложение математической статистики на немецком языке. Книга разбита на семь глав: 1. Введение в теорию вероятностей. 2. Элементарная теория выборок. 3. Доверительные области. 4. Теория оценок параметров. 5. Введение в теорию оценки гипотез. 6. Теория регрессии и выборочного метода для многомерного нормального распределения. 7. Введение в непараметрические теории. Имеется небольшое добавление — Классический метод Байеса, а также приложены предметный и именной указатели. Весьма полезна помещенная на стр. XVI—XIX таблица основных статистических терминов на немецком и английском языках.

Краткое введение в теорию вероятностей (109 стр.) хорошо и достаточно полно вводит в элементы современной теории. Изложение ведется на базе аксиоматики Колмогорова. Вторая глава (50 стр.) посвящена изложению некоторых теорем о выборочных характеристиках преимущественно для нормальных распределений. В третьей главе (33 стр.) приведены определения и теоремы, касающиеся построения доверительных областей. Четвертая глава (40 стр.) интересно излагает теорию оценки параметров с привлечением обширной современной журнальной литературы. Пятая глава (45 стр.) дает подробное изложение теории проверки гипотез, данной Пирсоном и Нейманом. В шестой главе (56 стр.) дано краткое изложение теории наименьших квадратов по Колмогорову, а также приведено значительное число результатов, относящихся к распределениям выборочных характеристик случайных нормально

распределенных векторов. Седьмая глава (46 стр.), помимо изложения теории вариационного ряда (распределение членов и групп членов), содержит также критерии Колмогорова—Смирнова, Вилькоксона, симметричности распределения.

Книга рассчитана на достаточно хорошо математически подготовленного читателя. Б. В. Гнеденко

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

579. О решении одной теоретико-игровой проблемы. Томпсон (On the solution of a game-theoretic problem. Thompson Gerald L.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 275—284 (англ.)

Описывается экономическая модель, которая затем сводится к теоретико-игровой задаче. Пусть A и B — матрицы порядка $m \times n$ с неотрицательными элементами. Значения игр, задаваемых ими, удовлетворяют условию $v(-A) < 0$ и $v(B) > 0$. Положим $M_p = (1-p)B - pA$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$. Требуется определить p так, чтобы в игре с матрицей M_p нашлась пара таких оптимальных стратегий x и y первого и второго игрока соответственно, что $xBy > 0$, в то время как $v(M_p) = 0$.

Основной результат работы, теорема 2, устанавливает, что существует не более $\min(m, n)$ решений этой задачи. Приводятся примеры. О. В. Шалаевский

580. Контролируемые процессы и теория игр. Воробьев Н. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 49

Определяется понятие контроля случайного процесса, контролируемого процесса и связанных с ними понятий. M. Rosenblatt-Rot

581. Алгорифм для решения линейных программ. Данциг, Форд, Фулкерсон (A primal-dual algorithm for linear programs. Dantzig G. B., Ford L. R., Fulkerson D. R.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 171—181 (англ.)

Основная программа: определить $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, минимизирующие $\bar{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Дуальная программа: определить π_i, $i = 1, \ldots, m$, максимизирующие $\underline{z} = \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i$ при $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \pi_i \leqslant c_j$, $j = 1, \ldots, n$. (Принцип построения дуальной программы ясен; другие программы формулируются только в основной форме).

Модифицированная программа: определить $x_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, минимизирующие $\bar{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при $\sum_{j=1}^{n} x_j = b_0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, b_0 — достаточно большая положительная константа.

Расширенная программа: определить $x_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, минимизирующие $\bar{w} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i$ при $\sum_{j=0}^{n} x_j + \varepsilon_0 = b_0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Следующая процедура в целом образует один шаг. Выбирается $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ — любое допустимое решение программы, дуальной к модифицированной (такое решение тривиальным образом существует), и рассматриваются величины $\delta_0 = \pi_0$, $\delta_j = \left(\pi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i\right) - c_j$, $j = 1, \ldots, n$, $I = \{j \mid \delta_j = 0\}$. Строится усеченная расширенная программа посредством добавления к условиям расширенной программы требования $x_j = 0$, $j \overline{\in} I$. Усеченная программа решается с помощью измененного симплекс-метода. Пусть x_j, ε_i и $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — оптимальные решения этой программы и дуальной к ней, и $\bar{w}$ — соответствующее значение минимизируемой формы.

Шаг на этом заканчивается, если, во-первых, $\bar{w} = 0$ и $\pi_0 = 0$; тогда $x_1, \ldots, x_n$ и $\pi_1, \ldots, \pi_m$ — оптимальные решения основной и дуальной программ (I), и, во-вторых, $\bar{w} = 0$ и $\pi_0 < 0$; тогда форма $\bar{z}$ не имеет нижней границы (II).

В случае $\bar{w} > 0$ вычисляются величины $\rho_0 = \sigma_0$, $\rho_j = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sigma_i$, $j = 1, \ldots, n$.

Если все $\rho_j \leqslant 0$, то не существует допустимого решения для основной программы (III). Наличие же некоторого $\rho_j > 0$ дает повод к следующему шагу, причем в качестве допустимого решения программы, дуальной и модифицированной, берется $\pi_i^* = \pi_i + \vartheta\sigma_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, где $\vartheta = \min_{\rho_j > 0} -\delta_j/\rho_j$.

Доказывается, что алгорифм для разыскания оптимальных решений основной и дуальной программ необходимо заканчивается через конечное число шагов в одной из ситуаций I, II или III. Статья завершается примерами. О. В. Шалаевский

582. Бесконечные программы. Даффин (Infinite programs. Duffin R. J.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 157—170 (англ.)

Пусть $U(V)$ — вещественное линейное векторное пространство с локально выпуклой топологией; пусть $U^*(V^*)$ — вещественное линейное векторное пространство непрерывных линейных функционалов, определенных на U (V); (u, u^*) — значение функционала $u^* \in U^*$ от точки $u \in U$ $((v, v^*))$. В $U(V)$ выбирается произвольный замкнутый выпуклый конус $P(Q)$. $X(Y)$ — множество $x \in U^*$ $(y \in V^*)$, для которых $(P, x) \geqslant 0$ $((Q, y) \geqslant 0)$ (т. е. $(p, x) \geqslant 0$ для каждого $p \in P$). Соотношения $p \in P$ и $x \in X$ $(q \in Q$ и $y \in Y)$ записываются соответственно как $p \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ $(q \geqslant 0$, $y \geqslant 0)$.

Опираясь на приведенные понятия, можно дать абстрактную формулировку проблеме линейного программирования, включающую как случай конечной программы, когда существует конечное число переменных и конечное число условий, так и случай бесконечной программы, когда это требование конечности нарушено.

Программа есть набор (A, b, a) $((A', b', a'))$, где $A(A')$ — линейное преобразование U^* в V (V^* в U) (все рассматриваемые преобразования A имеют сопряженные B в смысле $(Au^*, v^*) = (Bv^*, u^*)$), $b \in V$ $(b' \in U)$ и $a \in U$ $(a' \in V)$. Программы (A, b, a) и (A', b', a') являются дуальными, если $a' = -b$, $b' = -a$ и $A' = -B$, где A и B — сопряженные преобразования.

Необходимо отметить, что некоторые из определений, эквивалентные в конечном случае, приобретают различие при переходе к бесконечным программам.

Программа слабо совместна, если существуют последовательности $x_n \geqslant 0$ (допустимая последовательность) и $q_n \geqslant 0$ такие, что $\lim(Ax_n - q_n) = b$. Значение слабо совместной программы определяется как $\inf \varlimsup_n (a, x_n)$ для допустимых последовательностей x_n. Программа совместна, если существует $x \geqslant 0$ (допустимое) такое, что $Ax - b \geqslant 0$. Программа сильно совместна, если существует $x \geqslant 0$ (допустимое) такое, что $Ax - b$ есть внутренняя точка Q. Величина программы в обоих этих случаях есть $\inf(a, x)$ для допустимых x.

Дальнейшее изложение касается отношений дуальности для определенных программ. В заключение разбираются три примера. О. В. Шалаевский

583. **Основные теоремы о линейных уравнениях, неравенствах, линейном программировании и теории игр. Гейл** (The basic theorems of real linear programming, and game theory. Gale David), Naval Res. Logist., Quart., 1956, 3, № 3, 193—200 (англ.)

Легко находятся необходимые и достаточные условия а) существования положительного решения системы линейных уравнений, б) существование решения системы линейных неравенств, в) существования положительного решения системы линейных неравенств. Из них без труда следуют дуальная теорема линейного программирования и основная теорема теории матричных игр. И. В. Романовский

584. **Вычисление максимальных потоков в сетях. Фулкерсон, Данциг** (Computation of maximal flows in networks. Fulkerson D. R., Dantzig G. B.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 4, 277—283 (англ.)

Строится метод вычисления максимального потока через сеть (о постановке задачи см. РЖМат, 1957, 8102), основанный на симплекс-методе.

И. В. Романовский

585. **Распределение дефицитных материалов между продуктами. Вильямс** (The allocation of scarce materials between products. Williams Noel), Appl. Statist., 1956, 5, № 3, 166—176 (англ.)

Весьма простой пример распределения дефицитных материалов описывается и решается в рамках теории линейного программирования. Утверждается, что общая проблема такого распределения также может быть сформулирована, как задача этой теории.

Н. М. Митрофанова

586. **Проблема непрерывных программ. Осборн** (The problem of continuous programs. Osborn Howard), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 4, 721—731 (англ.)

Программой на $I=[0, 1)$ называется непрерывная справа ступенчатая функция $\pi(t)$, $t\in I$ со значениями из некоторого множества X.

Пусть $P(x, t)\Delta+o(\Delta)$ — вероятность того, что игрок (policy-maker), выживший в течение $[0, t)$, погибнет в течение $[t, t+\Delta)$ $(x=\pi(t))$. Пусть B — банахово пространство и $Q(b, x, t)$ — отображение $B*X*I$ в B.

Пусть

$$p(\pi, t)=1-\int_0^t P(\pi(s), s)\,p(\pi, s)\,ds,$$

$$q(\pi, t)=q(0)+\int_0^t Q(q(\pi, s), \pi(s), s)\,ds,$$

$$g(\pi)=\int_0^1 \| p(\pi, s)\,Q(q(\pi, s), \pi(s), s)\|\,ds.$$

$$G=\sup_\pi g(\pi).$$

Доказывается, что при некоторых ограничениях, налагаемых на P и Q,

$$\lim_{j\to\infty} F_j=G,$$

где $F_j=\sup g(\pi)$ по всем программам, изменяющимся только на конечном множестве E_j, а множества E_j таковы, что $E_j\subset E_{j+1}$ и $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}=[0, 1]$.

И. В. Романовский

587. **Динамическое программирование и проблема сглаживания. Белман** (Dynamic programming and the smoothing problem. Bellman Richard), Manag. Sci., 1956, 3, № 1, 111—113 (англ.)

С точки зрения динамического программирования изучается задача о минимизации линейной формы $\sum_{i=1}^{N} c_i x_i$ при различных ограничениях, налагаемых на x_i, $i=1, \ldots, N$. И. В. Романовский

588. **Динамическое программирование и множители Лагранжа. Белман** (Dynamic programming and Lagrange multipliers. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 10, 767—769 (англ.)

Указывается несколько подходов к решению следующей задачи: разыскать максимум функции

$$F(x_1, \ldots, x_N)=\sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_j)\leqslant c_i,\ i=1, \ldots, M,$$

$$x_i\geqslant 0.$$

Функции g_i и a_{ij} предполагаются непрерывными и возрастающими. М. К. Гавурин

589. **Заметки о теории динамического программирования. IV. — Максимизация над дискретными множествами. Белман** (Notes on the theory of dynamic programming. IV. — Miximization over discrete sets. Bellmann Richard), Naval Res. Logist. Quart., 1956, 3, № 1—2, 67—70 (англ.)

Задача об определении максимума функции

$$\sum_{i=1}^{N} F_i(x_i)$$

при условиях:

а) $\sum_{j=1}^{N} G_{ij}(x_j)\leqslant c_i,\ i=1, \ldots, K,$

б) $x_i\in S_i,\ i=1, 2, \ldots, K,$

где $G_{ij}(x_j)\geqslant 0$ для $x_j\in S_j$, $G_{ij}(0)=0$, $0\in S_i$ для всех i, а S_i — конечные множества, приводится к уравнению динамического программирования.

И. В. Романовский

590. **Динамические модели в эконометрике, Париж, 23—28 мая 1955** (Les modèles dynamiques en économétrie, Paris, 23—28 Mai 1955. (Colloq. internat Centre nat. rech. scient., 62), Paris, 1956, 381 p., ill.) (франц.)

591 К. **Введение в исследование операций. Черчмен и др.** (Introduction to operations research. Churchman Charles West et al. New York, Willey, 1957, 655 pp., ill., 12 doll.) Publishers Weekly, 1957, 171, № 10, 64 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

592. **Применение цифровых счетных устройств в исследовании операций. Линдбергер** (Maskinella numeriska metoder i operationsanalysen. Lindberger A.), Mercator, 1957, 52, № 21, 415—417 (шведск.)

593. **Некоторые промышленные приложения военных методов исследования операций. Кимбалл** (Some industrial applications of military operations research methods. Kimball George E.), Operat. Res., 1957, 5, № 2, 201—204 (англ.)

Описываются невоенные задачи, в которых применимы методы исследования операций.

И. В. Романовский

594. **Амортизация обесценивания автомобилей. Буатё** (L'amortissement: dépréciation des automobiles. Boiteux M.), Rev. statist. appliquée, 1956, 4, № 4, 57—73 (франц.)

Предлагается производить амортизационные отчисления в зависимости от износа машины и курса валюты,

а не равными долями. Для двух марок автомобилей приведены соответствующие расчеты. С. С. Кислицын

595. **Математическая статистика в вопросах гидрологии. Константинеску, Тритяну** (Statistica matematica în problemele hidrologice. Constantinescu M., Triteanu O.), Energ și hidrotehn., 1955, **3**, № 3, 124—130 (рум.; рез. русск.)

Продолжение статьи авторов (Energ. şihidrotehn., 1953, **12**,), где было показано, как возможно установить кривые риска типа Пирсона III и как можно их употреблять в гидрологических расчетах. Излагается способ применения кривых с четырьмя параметрами: среднее значение $\bar{x}$, коэффициент вариации C_v, асимметрия S и эксцесс E). Указывается способ их вычисления.

Показывается, что статистические методы предоставляют гидрологам ряд полезных при проектировании параметров и подчеркивается, что они могут употребляться только после анализа основных данных и проверки выводов при помощи других методов.

M. Rosenblatt-Rot

596. **Один новый прием метода Монте-Карло: антитетические переменные. Хаммерсли, Мортон** (A new Monte Carlo technique: antithetic variates. Hammersley J. M., Morton K. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 449—475 (англ.)

Пусть t — Монте-Карло оценка неизвестного параметра θ. Основная идея метода антитетических переменных состоит в том, чтобы для уменьшения дисперсии оценки одновременно с t рассматривать оценку t', отрицательно коррелированную с t и такую, что $E(t') = \theta$ (t и t' называются антитетическими переменными). Затем в качестве оценки для θ берется $(t + t')/2$.

Подробно рассматривается приложение метода антитетических переменных к вычислению интегралов вида

$$\theta = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\theta = \int_u^v dy_1 \int_{U(y_1)}^{V(y_1)} dy_2 \Phi(y_1, y_2).$$

Автор отмечает, что ему также удавалось использовать этот метод и при решении таких задач, когда применение метода Монте-Карло представляется более целесообразным. В заключение подробно вычисляется один шестикратный интеграл и делается сравнение с обычными (не Монте-Карло) методами.

И. А. Ибрагимов

597. **Система постулатов, связанных со статистическим истолкованием квантовой механики. Бодью** (Un système de postulats pour le formalisme statistique quantique. Bodiou Georges), Ann. Fac. sci. Marseille, 1953, **22**, № 2, 135—145 (франц.)

Если α и β — две величины, относящиеся к некоторой квантовой частице, которым отвечают операторы A и B (не обязательно коммутирующие) в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то вероятность того, что измерение величины α даст результат, принадлежащий подмножеству a множества возможных значений α, а непосредственно следующее за ним измерение величины β даст результат, принадлежащий подмножеству b множества возможных значений β, равна

$$\| E(b)\, E(a)\, \psi \|^2,$$

где ψ — волновая функция, описывающая состояние нашей частицы, а $E(b)$ и $E(a)$ — проекционные операторы в $\mathfrak{H}$, отвечающие проектированию на совокупность состояний со значениями величины β из подмножества b и соответственно величины α из подмножества a. В частности, если α — координата q, а a — интервал $q' < q \leqslant q''$, то при фиксированном b мы сопоставляем тем самым каждому интервалу (q', q'') оси q некоторое число (заключенное между 0 и 1); если β — это импульс p, а b — интервал $p' < p \leqslant p''$, то это число представляется некоторым интегралом по p от p' до p'', так что здесь можно определить число $G(p, q', q'')$, отвечающее интервалу (q', q'') и фиксированному p (а именно, значение подинтегральной функции в точке p). Исходя из этого числа, определяется некоторое «квазирасстояние» на оси q (удовлетворяющее большинству условий, требующихся при метризиции прямой) и изучаются некоторые связанные с ним математические вопросы. А. М. Яглом

598. **Быстрый метод оценки основной площади при промерке леса — приложение интегральной геометрии к выборочным задачам об определении площади. Масуяма** (A rapid method of estimating basal area in timber survey — an application of integral geometry to areal sampling problems. Masuyama Motosaburo), Sankhyā, 1953, **12**, 291—302 (англ.)

599. **Быстрые методы оценки сумм специального вида площадей в области данной меры. Масуяма** (Rapid methods of estimating the sum of specified areas in a field of given size. Masuyama Motosaburo), Rep. Statist. Appl. Res. Union Japan Sci. Eng., 1953, **2**, № 4, 113—119 (англ.)

600. **О конкретном смысле закона прибыли. Леви** (Sul significato concreto delle leggi dit interesse. Levi Eugenio), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 151—160 (итал.)

601. **Вероятности наследственности в единокровных семьях. Комацу, Нисимия** (Probabilities on inheritance in consanguineous families. Komatu Yûsaku, Nishimiya Han), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 1, 42—52; № 2; 148—155; № 3, 236—247; 1956, **32**, № 8, 639—643 (англ.) Предыдущие части см. Proc. Japan Acad., 1952, **28**, 538—545; **29**, 36—46.

602. **Рассмотрение действительной величины дохода от ренты. Узай** (Considerazioni su valori attuali e premi in rendite. Usai Giuseppe), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 285—288 (итал.)

603. **Теория информации и смежные области. Валле** (Théorie de l'information et domaines voisins. Vallée Bobert), Age nucléaire, 1956, № 1, 37—38 (франц.; рез. англ., исп.)

604. **Теория информации и смежные области. Валле** (Théorie de l'information et domaines voisins. Vallée Robert), Age nucléaire, 1957, № 2, 60 (франц).

605. **Гусс и страхование. Столетие со дня смерти «princeps mathematicorum» (1777—1855). Софони** (Gauss und die Versicherung. Hundert Jahre nach dem Tode des «princeps mathematicorum» (1777—1855). Sofonea Traian), Verzekerings-Arch. Actuarieel Bijvoegsel, 1955, **32**, 57—69 (нем.).
Перевод из Math. Revs, 1956, **16**, № 2, 117.

606. **Предложение о контроле машин для упаковки порошка в коробки. Сиффферс** (Mise sous contrôle de machines à paqueter la poudre à priser. Cyffers B.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 1, 67—76 (франц.)

Изложение очень простых предварительных сведений, основанных на дисперсионном анализе и используемых для контроля машин, упаковывающих порошок в коробки, и указание способа контроля, который может быть организован. Резюме автора

607. **Вероятностные модели для анализа времени изменения позиций. Андерсон** (Probability models for analyzing time changes in attitudes. Anderson T. W.), Math. thinking social sci., Glencoe, The Free Press, 1954, 17—66, 418—419, ill. (англ.)

608. **Случайные кривые. Фреше** (Courbes aléatoires. Fréchet Maurice), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1955, 4, 11—20 (франц.)

В более ранних работах автор определил экспериментально те формы, которые принимает завязанная узлом нить при случайном бросании на плоскость. То, что относится к изучению кривых в момент бросания, представлено в настоящей работе для 22 видов брошенной нити; приводятся кривые, представляющие координаты точки нити в функции криволинейной абсциссы.

J. Bass

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 51.

609. **О кривой Аморозо для распределения доходов. Маццони** (Sulla curva di Amoroso per la distribuzione dei redditi. Mazzoni Pacifico), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 181—193 (итал.)

610. **К теории индексов. II. Обеспечение непрерывного ряда индексов в предположении пропорциональности нового индекса старому. Сен Ю-бо** (Some theory of index numbers. II. Maintenance of continuity by the assumption of proportionality of the new index number to the old index. Seng You Poh), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **A119**, № 4, 425—455 (англ.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1957, 5034). Исследуется способ экстраполяции в прошлое рядов новых индексов цен пропорционально движению старых индексов. Отношения формул соответствующих индексов приводятся к выражениям, позволяющим судить о возникающих при экстраполяции ошибках вследствие того или иного поведения компонентов индексов. Эти выражения в некоторых случаях содержат только средние квадратические отклонения и коэффициенты корреляции. Для перевода максимально возможных величин размахов варьирования относительных изменений цен вновь вводимых товаров (в предположении, что распределение их нормально) в средние квадратические отклонения рекомендуется пользоваться коэффициентами Типпета. Приводится ряд таблиц, показывающих, при каких условиях ошибки индексов не превзойдут 5%. Подтверждается известное положение, что непрерывность ряда индексов обеспечивается, если число вновь вводимых товаров сравнительно невелико, веса изменяются не особенно резко и цены колеблются не слишком сильно. А. А. Конюс

611. **О применении методов Монте Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения. Владимиров В. С.**, Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 113—130 (рез. англ.)

Рассматривается m-мерное однородное интегральное уравнение

$$\varphi(P)=\lambda\int_G K(P,\ P')\varphi(P')\,dP' \qquad (1)$$

с симметричным ядром вида $K(P,\ P')=H(P,\ P')/r^\alpha$; $(0<\alpha<m;\ r=|P-P'|;\ H(P,\ P')$ непрерывна по совокупности P и P', симметрична и неотрицательна), имеющее единственную положительную собственную функцию $\varphi_1(P)$. Соответствующее $\varphi_1(P)$ характеристическое число $\lambda_1>1$ и меньше модуля любого другого характеристического числа уравнения (1).

Для вычисления λ_1 и $\varphi_1(P)$ можно применить метод последовательных приближений. При числе итераций $n\to\infty$ последовательность $f_n/\|f_n\|$ ($f_n=kf_{n-1};\ n\geqslant 1$; $f_0(P)$ — положительная непрерывная функция) равномерно сходится к φ_1; последовательность $\lambda_n=(f_0,f_{n-1})/(f_0,f_n)$ сходится к λ_1. Строятся два типа случайных процессов, позволяющих получить приближенные значения f_n и λ_n методом Монте Карло.

Первый из них является простой цепью Маркова и интерпретируется как случайное блуждание частицы с начальным положением в точке $P=P_0\in G$. Частица, находящаяся в точке P_{k-1}, переходит в точку P_k с вероятностью $F_1(P_{k-1},\ P_k)\,dP_k$, причем

$$F_1(P,\ P')=\frac{H(P,\ P')}{r^\alpha z\left(P,\ \dfrac{P-P'}{r}\right)},$$

где

$$z(P,\ \omega)=\omega_m\int_0^\infty H(P,\ P+r_1\omega)\,r_1^{m-1-\alpha}\,dr_1$$

— функция, определенная для всех точек $P\in G$ и всех направлений $\omega=(P'-P)/r$, $|\omega|=1$, выходящих из точки P. При этом вырабатываются случайные величины

$$Z_k[k,f_0]=z\left(P_0,\ \frac{P_1-P_0}{r_{1,0}}\right)z\left(P_1,\ \frac{P_2-P_1}{r_{2,1}}\right)\ldots$$

$$\ldots z\left(P_{k-1}\frac{P_k-P_{k-1}}{r_{k,k-1}}\right)f_0(P_k).$$

Так как $f_n(P_0)$ равна условному математическому ожиданию

$$f_n(P_0)=E(Z_n[z,\ f_0]|P=P_0),$$

в качестве приближенного значения $f_n(P_0)$ принимается среднее арифметическое $Z_n^q[z,f_0]$, $q=1,2\ldots\ldots,N$,

$$f_n(P_0)\approx\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N}Z_n^q[z,f_0],$$

полученных при N реализациях процесса.

Второй тип случайного процесса также интерпретируется как случайное блуждание, характеризуемое плотностью вероятностей

$$F_2(P,P')=\frac{H(P,P')}{r^\alpha}.$$

Кроме того, для данных P_0 и ω существует вероятность $1-z(P_0,\omega)$ «поглощения» частицы границей Γ области G. Здесь

$$z(P_0,\omega)=\omega_m\int_0^{r_0}H(P_0,P_0+r_1\omega)\,r_1^{m-1-\alpha}dr_1.$$

Случайное блуждание частицы прекращается, как только она «поглотится» границей Γ. Рассматривается случайная величина

$$Z_k[\delta,\ f_0]=\delta(P_1)\,\delta(P_2)\ldots\delta(P_k)\,f_0(P_k),$$

где

$$\delta(P)=\begin{cases}1, & \text{если } P\notin G\\ 0, & \text{если } P\in G.\end{cases}$$

Аналогично предыдущему $f_n(P_0)=E(Z_n[\delta,f_0]\mid P=P_0)$, поэтому

$$f_n(P_0)\approx\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N}Z_n^q[\delta,\ f_0].$$

Для реализации случайных блужданий с плотностью $F_2(P,\ P')$ требуется меньше вычислений, чем в случае использования $F_1(P,\ P')$.

Для определения приближенного значения λ_1 методом Монте Карло используется распределение $F_0(P_0)$ начальной точки P_0

$$F_0(P) = \delta(P)/v,$$

где v — мера G. Статистическая ошибка наименьшего собственного числа

$$\left|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}\right| < C_1 N^{-\delta}$$

с вероятностью $P > 1 - C_2 N^{-\delta}$, где

$$\delta = (1-\varepsilon)/[2 + \ln\lambda_1/\ln|\lambda_2/\lambda_1|].$$

Число итераций

$$n = (1-\varepsilon)\ln N\,[2\ln|\lambda_2| - \ln\lambda_1].$$

Здесь $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, C_1, C_2 и C_3 не зависят от n и N. В заключение приводятся численные примеры для одномерного интегрального уравнения.

Н. П. Бусленко

612. Стохастические процессы. Мурье (Les processus stochastiques. Mourier Edith), Age nucléaire, 1956, № 1, 35—36 (франц.; рез. англ., исп.)

Краткая популярная характеристика задач теории случайных процессов. И. И. Гихман

613. Применение статистического контроля в металлургии. Базен (Quelques applications du contrôle statistique en métallurgie. Bazin A.), Rev. statist. appliquée, 1956, 4, № 4, 15—32 (франц.)

Доклад о широком опыте применения статистического контроля на крупном заводе цветных металлов. Переход на статистический контроль длился два года. Статистический контроль регулярно применяется, в основном, в трех видах: графики распределения результатов испытаний и замеров, контрольные карты с нанесенными на них лимитами для средней арифметической и размаха варьирования («контроль измерением» в процессе производства) и выборочная разбраковка продукции на годную и брак по специально составленным таблицам («контроль свойств» выпускаемой продукции). Контроль измерением комбинируется с контролем свойств. Помимо этого ведутся специальные работы с вычислением средних квадратических и коэффициентов корреляции, проверяется нормальность распределений и т. д. Применяемые методы основываются на предположении нормальности распределений, хотя оно и не всегда хорошо осуществляется.

А. А. Конюс

614 К. Логнормальное распределение со специальным рассмотрением его использования в экономике. Эйтчисон, Браун (The lognormal distribution; with special reference to its uses in economics. Aitchison John, Brown James Alan Calvert. Cambridge, Univ. Press., 1957, xviii. 176 pp., ill., 35 sh.) (англ.)

ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *С. П. Фиников*

615. О некоторых алгебраических особенностях вещественного симплектического пространства. Яглом И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 40—41

Рассматривается симплектическое векторное пространство, т. е. четномерное вещественное векторное пространство с невырожденной кососимметрической формой, определяющей «косое» скалярное произведение векторов. Для подпространств симплектического пространства определяется дефект, при равенстве которого нулю подпространство является симплектическим пространством. Строится полная система инвариантов двух подпространств симплектического пространства — стационарных расстояний и углов, аналогичных одноименным понятиям евклидовой геометрии. Производится классификация симметрических и кососимметрических линейных операторов симплектического пространства. Выводятся аналоги формул Френе для кривых симплектического пространства.

Б. А. Розенфельд

616. Параллелизм в дифференциальной геометрии. Сен (Parallelism in differential geometry. Sen R. N.), Proc. 43. Indian Sci. Congr. Assoc. Part 2. Calcutta, 1956, 25—41 (англ.)

Излагаются наиболее важные результаты дифференциальной геометрии, исходя из понятий параллелизма Леви-Чивита в римановых пространствах V_n. В первую очередь рассматриваются понятия пространства аффинной связности (Г. Вейль, 1918) с кручением и без кручения (Э. Картан, 1922), далее — понятие абсолютного параллелизма в пространствах V_n, которое может быть определено с помощью системы ортогональных конгруэнций в V_n, если V_n имеет определенную метрику, как в случае параллелизма Клиффорда в пространствах V_3 постоянной положительной кривизны. Далее излагаются соотношения, существующие между параллелизмом и группами движения в пространстве, в частности, в случае симметрических пространств Э. Картана. Рассматриваются также недавно полученные результаты в теории параллельных полей (Руз, Уокер) в случае пространства V_n с неопределенной метрикой, далее — некоторые параллельные переносы в V_n, полученные Сеном, не являющиеся параллельными переносами в смысле Леви-Чивита и ведущие к некоторым алгебраическим соображениям об аффинных связностях.

G. Vrănceanu

617. Специальные темы в математическом образовании. Булиган (Thèmes speciaux, dans la formation mathématique. Bouligand G.), Rev. gén. sci. purcs et appl., 1956, 63, №-1—2, 48—54

Автор подчеркивает важность поддерживать инициативу учащихся на разных ступенях обучения выдвижением специальных тем для размышления. В статье предлагаются несколько таких тем из области дифференциальной геометрии. Б. В. Гнеденко

618. Сопоставление правильных многогранников в «Математическом собрании» Паппа (продолжение и окончание). Конте (Il confronto dei poliedri regolari nella «Collezione Matematica» di Pappo (continuazione e fine). Conte Luigi), Period. mat., 1954, 32, № 5, 261—278 (итал.)

Продолжение (РЖМат, 1956, 5675). Перевод на итальянский язык 45—57 предложений 5-й книги «Математического собрания» Паппа Александрийского (3 в. н. э). В заключительном предложении 57 Папп резюмирует результат исследования: среди пяти правильных многогранников, вписанных в одну и ту же сферу, больше

(по объему) тот, у которого больше граней. Перевод снабжен математическими и историческими комментариями. М. Я. Выгодский

619. **Проективные пространства. Ревю** (Espaces projectifs. Revuz André), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1956, 36, № 180, 100—106 (франц.)

Дается определение проективного пространства и указываются способы установления проективного соответствия между проективными пространствами. Доказывается в общем виде основная теорема проективной геометрии. В. А. Маневич

620. **Понятие однородности, ковариантности и относительности в теории пространства и времени. Фок** (Homogenität, Kovarianz und Relativität. Fock V. A.), Чехосл. физ. ж., 1957, 7, № 3, 255—261 (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1956, 6041).

621. **Теория спиноров. Рашевский** (The theory of spinors. Raševskiĭ P. K.), Amer. Math. Soc. Translat., 1957, 6, 1—110 (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1956, 8649).

622 К. **Курс тригонометрии для техникумов. Изд. 4-е, стереотип. Кожеуров П. Я.** М., Гостехиздат, 1957, 336 стр., илл., 6 р. 45 к.

623 К. **Тригонометрия. Изд. 2-е, стереотип. Бермант А. Ф., Люстерник Л. А.** М., Гостехиздат, 1957, 180 стр., 3 р.

624 К. **Аналитическая геометрия линейных образов. 2-е изд. Кремер** (Analytická géometrie lineárních útvarů. 2. vyd. Kraemer Emil. Praha, ČSAV, 1956, 240 s., il., 10, 50 Kčs.) (чешск.)

См. РЖМат, 1957, 2594.

625 К. **Лекции по аналитической геометрии. Аналитическая геометрия плоскости и пространства, основные понятия проективной геометрии, кривых и поверхностей второго порядка. Кастельнуово** (Lezioni di geometria analitica. Geometria analitica del piano e dello spazio, i concetti fondamentali della geometria proiettiva, curve e superficie di secondo ordine. 12 ed. Castelnuovo Guido. Roma, Albrighi, Segati e C., 1956, viii, 607 p., ill., 3500 L.) (итал.)

626 К. **Тензорное исчисление. Спейн** (Tensor calculus. 2nd ed. Spain Barry. Edinburgh — London, Oliver and Boyd; New York, Interscience, 1956 [1957], viii, 125 pp., ill., 8 sh. 6 d.) (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

627. **К алгебраическому методу определения элементов плоских шарнирно рычажных передач вращения. II. Зикер** (Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe. II. Sieker K.-H.), Ingr-Arch., 1956, 24, № 4, 233—257 (нем.)

Алгебраический метод комплексных чисел, изложенный в 1-м сообщении (РЖМат, 1957, 4293), применяется здесь автором к кривошипно-шатунному механизму и к таким более трудным задачам синтеза приводных механизмов, как к задаче определения размеров шарнирного четырехзвенника при заданном положении точек, через которые должна пройти некоторая точка шатуна, и к сингезу шестизвенного приводного механизма при заданных присоединенных углах. Некоторые из этих задач совсем не решались или решались геометрическими методами. Алгебраический способ решения, предлагаемый автором, приводит к вполне обозримым формулам.

Сначала определяется кривошипно-шатунный механизм по заданным трем значениям угла φ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) ведущего звена и трем значениям длины s_ν перемещения ползуна и в случае задания четырех углов и четырех длин. Значения φ_ν, s_ν удовлетворяют заданному уравнению $s = f(\varphi)$. Рассматриваются задачи, в которых число заданных точек (φ_ν, s_ν) меньше, но присоединяются значения производных $f(\varphi)$ как в 1-м сообщении. В числовых примерах употребляется зависимость $s + \frac{1}{4} = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Затем решается задача определения размеров четырехзвенника по данным точкам шатунной кривой. Известно, что точка шатуна шарнирного четырехзвенника описывает кривую 6-го порядка и нужно задать 9 точек, чтобы такая кривая была определена. Задав в плоскости 9 точек, составляется векторное уравнение для таких 9 неизвестных величин, которые определяют положение и размеры четырехзвенника, в плоскости шатуна которого некоторая точка опишет шатунную кривую, проходящую через данные точки.

Используя шатунную кривую в предыдущей задаче, автор прилагает алгебраический метод к проблеме синтеза одного двухстоечного шестизвенного механизма. Задача определения такого механизма рассматривается с условием присоединения десяти пар углов (φ_ν, ψ_ν), что позволяет составить систему из векторных уравнений для нахождения необходимых пяти векторных величин, определяющих размеры и положения шестизвенного кривошипного механизма.

Следует обратить внимание на одно странное обстоятельство, затрудняющее чтение статей: автор к различным функциональным зависимостям применяет одно и то же обозначение $f(\varphi)$. В. Л. Люкшин

628. **Соответствие между кватернионами и 4-спинорами. Гюрсей** (Correspondence between quaternions and four-spinors. Gürsey Feza), Istanbul Üniv. fen fak. mecm., 1956, A21, № 1, 33—54 (англ.; рез. турец.)

Запись различных известных соотношений между 4-компонентными спинорами волнового поля электрона, в частности уравнения Дирака, с помощью комплексных матриц 2-го порядка, записываемых в виде комплексных кватернионов. Б. А. Розенфельд

629. **Физическая интерпретация тензора Римана — Кристоффеля. Распределение тормозящих и синхронизирующих моментов в осциллирующих системах передач электроэнергии. Крон** (A physical interpretation of the Riemann-Christoffel curvature tensor. The distribution of damping and synchronizing torques in oscillating transmission systems. Kron Gabriel), Tensor, 1955, 4, № 3, 150—172 (англ.)

Хотя вопрос о передаче электроэнергии на большие расстояния приобрел особенно важное значение, еще не удалось построить теорий, правильно отражающих физическую сторону основных процессов. Автором была предложена (AIEE, Transactions, 1952, 71, 859—866) новая теория малых колебаний (hunting) в передающих системах. В настоящей работе изложены ее математические и физические основы и даны приложения.

Малые колебания всякой динамической системы могут быть правильно представлены только тензорным уравнением «возмущенной» геодетики (геодезического смещения) в n-мерном абстрактном пространстве (Синг, Тензорные методы в динамике. Изд-во ин. лит., 1947). Автор ставит своей целью решение тензорными методами конкретных динамических проблем и доводит дело до вычислений.

Для изучения процессов во вращающихся электрических машинах привлекается абстрактное пространство аффинной связности (с кручением), не голономное, эрмитово с осевой симметрией.

Исходя из уравнений геодетики, являющихся обобщением уравнений Лагранжа в динамике, автор нахо-

дит тензорное уравнение для сил, появляющихся вследствие малых колебаний. Полученное выражение для приращения силы он разбивает на два тензорных члена, следовательно, имеющие физический смысл: синхронизирующий и тормозящий моменты. Приведены конкретные примеры сетей. Проанализировано распределение сил торможения и синхронизации. Приведены различные физические истолкования тензора кривизны.
Б. Л. Лаптев

630 К. **Векторный анализ. Ньюэлл** (Vector analysis. Newell H. E. New York, McGraw-Hill, 1955, 216 p.) (англ.)
Книга, рассчитанная на студентов-инженеров и физиков, имеет обычную для учебников этого назначения структуру, однако с некоторой модернизацией изложения (понятия группы, равномерной непрерывности и т. п.), способной, по мнению автора, привлечь интерес к математике. Часть I (около $^2/_3$ книги) занята традиционными сведениями из векторной алгебры (гл. 1) и анализа (гл. 2—8: градиент, дивергенция, ротор, интегральные теоремы, ортогональные криволинейные координаты, потенциалы). Часть II озаглавлена «Приложения» и содержит: элементы кинематики и динамика точки и твердого тела (гл. 9—10), очерк теории электромагнетизма на основе уравнений Максвелла (гл. 11, наибольшая по объему). Я. С. Дубнов

631. К. **Геометрия в технике и искусстве. Сборник статей в честь семидесятилетия проф. инж. др. Франтишка Кадержавека. Климеш, Новак, Вычихло** (Geometrie v technice a v. umění. Sborník k 70. narozeninám prof. ing. dr. Františka Kadeřávka. Klimeš Ferdinand, Novák Otakar, Vyčichlo František. Praha, SNTL, 1955, 133, 8 str., il.) (чешск.).
Приведено 14 работ сотрудников юбиляра.
1. Людвик Цисарж, Некоторые образования кривых второй степени и их применение. 2. Карел Драбек, Борживой Кепр, Свойства некоторых кривых применительно к инженерной практике. Рассматриваются параболы высшего порядка, гиперболы лемнискаты и клотоида. 3. Ладислав Дрс, Векторное отображение и его применение. В параллельном проектировании на плоскость решаются некоторые задачи векторного исчисления, статики и стереометрии.
4. Вацлав Гавел, Франтишек Гарант, О некоторых свойствах клиновидных поверхностей. Переходом от параболического цилиндра, гиперболического параболоида и параболического коноида рассматриваются особые клиновидные поверхности, в частности поверхности проф. Гацара в трех видоизменениях, применяемых в теории оболочек, перекрытий и мостов, а также поверхность $z = \sin x \cdot \sin y$. 5. Вацлав Гавел, Примечание к одной из теорем проф. Кадержавека о конических сечениях. Обобщается теорема о произведении отрезков, отсекаемых на параллельных хордах гиперболы самой гиперболой и ее асимптотами. 6. Иржи Горжейши, Определение температурного действия при помощи линий влияния. Рассматривается влияние нагревания на систему, статически неопределимую. 7. Мирослав Халупничек, Применение фотографии в изображении проектов в практике инженера-строителя. Показано, каким условиям должен отвечать снимок, чтобы можно было зачерчивать перспективу проектируемого объекта. 8. Фердинанд Климеш, Геометрическое оформление горловин распределительных веток сортировочных станций с учетом рельсового тормоза. Демонстрируется тенденция развития конструкций сортировочных станций. 9. Иосеф Кржижан; Формы сборочных конструкций перекрытий из железобетона и предварительно напряженного бетона. Обосновывается производство сборочных деталей при возведении перекрытий. 10. Отакар Новак, Вычисление линий влияния статически определимых систем при помощи вспомогательного рычага Жуковского. 11. А. Пиффл, Композиции фасадов русской архитектуры до конца XII в. 12. Ярослав Шлехта, Цилиндрическая перспектива. Обосновывается применение цилиндрической перспективы на практике. 13. Вацлав Вильгельм, Одна задача по фотограмметрии. Решается задача определения центра проекции по центральным проекциям шести точек. 14. Франтишек Вычихло, О дифференциальных инвариантах особой пары линейчатых поверхностей.
K. Drábek

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

632. **О делении отрезка прямой на равные части. Смогоржевский А. С.**, Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 328—336
Указаны некоторые способы деления отрезка прямой на равные части с помощью циркуля и линейки.
В. А. Маневич

633. **Работы Де'Тоски-ди-Фаньяно по решению задачи о делении дуг на равные части. Конте** (I contributi di G. C. De'Toschi di Fagnano al problema della plurisezione degli archi. Conte Luigi), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 236—238 (итал.)
Продолжение статьи (РЖМат, 1957, 1047).
И. Н. Веселовский

634. **Теорема Кемпе и построения циркулем. Росье** (Théorème de Kempe et constructions au compas. Rossier Paul), Arch. sci., 1956, **9**, № 2, 217—218 (франц.)
Преобразовав, на основании теоремы Кемпе, уравнение алгебраической кривой определенным образом, мы можем решить вопрос о возможности построения кривой циркулем.
С. И. Зетель

635. **О построении правильных многоугольников. Росье** (Sur la construction des polygones réguliers. Rossier Paul), Arch. sci., 1956, 9, № 2, 215—217 (франц.)
Пользуясь тригонометрическими формулами, без применения комплексных чисел, автор легко доказывает возможность построения циркулем и линейкой правильного треугольника и пятиугольника и невозможность построения правильных семиугольника и девятиугольника.
С. И. Зетель

636. **Об одной конструктивной задаче. Тесленко** (Про одну конструктивну задачу. Тесленко І. Ф.), Наук. зап. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1956, 6, 53—68 (укр.)
Рассматривается известная задача Мальфатти: в треугольник вписать три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других и двух сторон треугольника. Известные решения этой задачи (их более десяти) могут быть сведены к трем построениям — алгебраическим, геометрическим и тригонометрическим методами. Приводится решение задачи каждым из трех методов. С помощью геометрических соображений показывается, что задача Мальфатти имеет 32 решения, если рассматриваются также и вневписанные окружности.
В. Ф. Рогаченко

637. **О соотношении Стюарта. Ионеску** (Asupra relației lui Stewart. Ionescu D. V.), Gaz. mat. și fiz., 1956, A8, № 8, 407—411 (рум.)
Стюарту (или Шалю или Эйлеру) приписывают соотношения для трех фиксированных точек A, B, C оси x и произвольной точки P:

$$\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0,$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0,$$

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}=-\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}.$$

Автор обобщает эти формулы для n точек $A_1, \ldots, A_n$ на оси x, а также распространяет их на плоскость и на пространство. С. П. Фиников

638. **Об ортоцентре нормального многоугольника. Наденик** (O ortocentru normálního mnohoúhelníka. Nádeník Zbyněk), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 292—298 (чешск.; рез. русск., франц.)

Автор опирается на свои более ранние работы (РЖМат, 1957, 2581 и 8226) о геометрии нормального многоугольника в n-мерном евклидовом пространстве E_n. В настоящей работе он определяет для нормального многоугольника понятия, аналогичные понятиям медианы, центра тяжести и высоты треугольника, и обобщает на случай нормального многоугольника некоторые свойства окружности Фейербаха и ортоцентра. Результаты в большой степени зависят от четности или нечетности размерности пространства E_n. L. Kosmák

639. **О сплющенных треугольниках. Голомб** (O trójkątach spłaszczonych. Gołąb Stanisław), Zesz. nauk. Akad. górn.-hutn., 1956, № 5, 13—17 (польск.; рез. русск., англ.).

Сплющенным называется треугольник, у которого один угол близок к 180 градусам. Автор дает необходимое и достаточное условие сплющенности в виде требования $m:M\approx 0$, где $M=\min(a, b, c)$ — наименьшая из сторон a, b, c треугольника и, аналогично, $m=\min(a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b)$.

Из резюме автора

640. **Симметричные четырехугольники. Мюллер** (Symmetrische Vierecke, Müller G.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 7, 316—319 (нем.)

Излагается опыт преподавания этой темы в средней школе. После нескольких общих теорем дается классификация симметричных четырехугольников. A — четырехугольники, самовмещающиеся при повороте, α — наименьший угол поворота. A1. $\alpha=90°$ (квадрат); A2: $\alpha=180°$ (параллелограмм общего вида). B — четырехугольники, имеющие n (только) осей симметрии. B1: $n=1$. B11: две вершины лежат на оси симметрии (дельтоид). B12: ни одна вершина не лежит на оси симметрии (равнобочная трапеция). B2: $n=2$. B21: вершины лежат на осях симметрии (ромб), B22: вершины не лежат на осях симметрии (прямоугольник). Н. М. Бескин

641. **Несколько теорем Ельмслева о плоских, косых и сферических четырехугольниках. Фабриций-Бьерре** (Nogle sætninger af J. Hjelmslev om plane, vindskæve og sfæriske firkanter. Fabricius-Bjerre Fr.), Nord. mat. tidskr., 1956, 4, № 3, 139—148, 176 (датск.; рез. англ.)

Статья представляет собой обработку неопубликованной рукописи Ельмслева. Пусть имеются два плоских невыпуклых четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, диагонали которых AC и A_1C_1 не проходят внутри них. Пусть $AC=A_1C_1$, $AB+A_1B_1=BC+B_1C_1=CD+C_1D_1=DA+D_1A_1$,

$$AB+BC+CD+DA=A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1A_1.$$

В таком случае имеют место следующие предложения:

1. $BD=B_1D_1$ (это эквивалентно теореме Айвори (Ivory).

2. Расстояния между серединами диагоналей равны между собой.

3. $TT'=T_1T_1'$ где T, T', T_1, T_1' — площади треугольников ABC, ADC, $A_1B_1C_1$, $A_1D_1C_1$.

4. Оба четырехугольника или одновременно можно или одновременно нельзя вписать в круг.

В случае косых четырехугольников ставится дополнительное условие, чтобы двухгранные углы при равных диагоналях AC и A_1C_1 были равны между собою. При этих условиях теоремы 1—3 оказываются выполненными. Кроме того, тетраэдры, определяемые вершинами четырехугольников, имеют равные объемы.

В случае сферических четырехугольников делается предположение, что их стороны меньше 180°. Теоремы 1 и 4 оказываются выполненными, теорема 2 — нет. Теорема 3 заменяется предложением, в котором вместо площадей треугольников берутся соответствующие объемы тетраэдров с общей вершиной в центре сферы. Н. И. Кованцов

642. **К проблеме пересечения. Огливи** (An interception problem. Ogilvy C. Stanley), Navigation, 1956, 5, № 2, 89—91 (англ.)

Рассматривается задача о преследовании одного корабля другим. Геометрическое решение задачи основано на теореме Аполлония. Исследуются различные случаи в зависимости от скорости и начального положения каждого корабля. С. И. Зетель

643. **Пропорциональные отрезки, гомотетия и подобие. Богушевский К. С.**, Матем. в школе, 1957, № 4 24—31.

Методическая разработка уроков в 8-м классе.

644 К. **О геометрии объемов равного «водоизмещения». Саладини** (Sulla geometria delle isocarene. Saladini Giuseppe. Roma, Tip. V. Ferri, 1956, 14 p.) (итал.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

645. **О представлении элементов систем коллинеаций II и III ступени в виде произведения двух полярных соответствий и о некоторых свойствах коллинеаций, связанных с этим вопросом. Маневич В. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 159—160

646. **О терминологии и символике начертательной геометрии. Королевич А. И.**, Научн. тр. Львовск. лесотехн. ин-т, 1955, 2, 145—161

Отмечая, что терминология и символика в работах по начертательной геометрии обладает рядом недостатков, автор приводит руководства по начертательной геометрии, направленных на ликвидацию этих недочетов, но они еще не привели к единой научно-обоснованной терминологии и символике. Неправильное, неясное или несвоевременное определение обозначаемых понятий, многозначность и синонимия терминов и символов побудили его провести критический разбор всей современной терминологии в начертательной геометрии, выяснить взаимосвязь между вещами и процессами, составляющими содержание науки, определить основные и производные понятия, предложить вариант терминов и символов, сведенных в таблицу, и решить ряд задач в этой символике. Сознавая несовершенство предлагаемого варианта, автор просит подойти к нему критически. А. Р. Зенгин

647. **Заметка по поводу построения освещения поверхности шара в ортогональной аксонометрической проекции. Ченек** (Poznámka ku konštrukcii osvetlenia gul'ovej plochy v ortogonálne axonometrickom premietani. Čeněk Gabriel), Mat.-fys., časop. 1955, 5, № 3, 152—161 (словацк. рез. русск.).

Методическое пособие, ставящее целью наиболее простое изложение построения границ тени освещенной поверхности шара на различных плоскостях. Рассматривается как параллельное, так и центральное освещение шара. Изображение строится в ортогональной

аксонометрии, определяемой проекцией вертикальной оси и единичного отрезка на ней и проекциями двух других осей. Границы теней являются коническими сечениями, связанными между собой перспективно-аффинным (в случае параллельного освещения) или перспективным соответствием (в случае центрального освещения), однако построения производятся наиболее элементарными методами. F. Vyčichlo

648. **Композиция аксонометрических изображений. Белянин В. М.**, Тр. Ленингр. технол. ин-та пищ. пром-сти, 1956, 13, 188—198

Исследования аксонометрических проекций проведено с точки зрения построения наглядных и естественных изображений предметов. Считая, что наглядным является изображение, которое дает зрительное представление о форме предмета и расположении конструктивных деталей, и естественным изображение, которое производит впечатление, как при рассмотрении предмета в натуре, автор приходит к выводу, что если условию только наглядности удовлетворяют отдельные виды косоугольных и прямоугольных аксонометрических проекций, то условиям наглядности и естественности отвечают лишь тот или иной вид прямоугольных аксонометрических проекций. Работа проиллюстрирована рядом примеров. А. Р. Зенгин

649. **О полноте изображений линейчатых поверхностей и поверхностей с круговыми образующими. Котов И. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 155

Ставится и решается вопрос об условиях задания полных изображений линейчатых поверхностей и поверхностей с круговыми образующими, т. е. таких изображений, на которых разрешимы позиционные задачи относительно элементов оригинала. Сведя при этом изучение полноты изображений поверхностей с круговыми образующими к изучению полноты изображений линейчатых поверхностей, автор дает новую классификацию поверхностей с круговыми образующими и рассматривает теорему о полноте изображений этих поверхностей. З. И. Прянишникова

650. **Основная теорема центральной аксонометрии для пространства n измерений. Первикова В. Н.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 162—163

651 К. **Начертательная геометрия. 2-е изд. Керубино, Тоньетти** (Geometria descrittiva. 2 ed. Cherubino Salvatore, Tognetti Mario. Livorno, Tip. Accad. navale, 1954, xvi, 339 p.), (итал.)

652 К. **Начертательная геометрия. Мамедов, Пузыревский, Мамедов** (Тәрсими һәндәсә. Мәммәдов Э. М., Пузыревски В. Ф., Мәммәдов К. Ч. Бакы, Азәрнәшр, 1956, 518 сәһ., илл.) (азерб.)

653 К. **Курс начертательной геометрии. (Для машиностроит. и механ.-технол. специальностей втузов). Изд. 11-е, стереотип. Гордон В., Семенцов-Огиевский М. М.**, Гостехиздат, 1957, 404 стр., илл., 9 р. 10 к.

654 К. **Построение изображений методом перспективных координат. Шерешевский И. А.**, Л.—М., Госстройиздат, 1957, 59 стр., илл., 2 р. 20 к.

655 К. **Сборник задач по начертательной геометрии. Учебн. пособие для втузов. Изд. 9-е, стереотип. Рудаев А. К.** М., Гостехиздат, 1957, 344 стр., илл. 9 р. 50 к.

656 К. **Действительная проективная плоскость. Коксетер** (Reelle projektive Geometrie der Ebene. Coxeter H. S. M. Übersetzt von W. Burau. Verlag von R. Oldenbourg, München, 1955, 190 pp., 18.60 DM.) (нем.)

Перевод с английского (РЖМат, 1956, 5443 К).

657 Д. **Развертывание поверхностей с ребром возврата по методу замены их другими поверхностями. Старков В. М.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л., 1957

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

658. **Некоторые замечания о родах алгебраической кривой по отношению к обобщенным отношениям эквивалентности. Бенедикти** (Quelques considérations sur les genres d'une courbe algébrique par rapport à une relation d'équivalence généralisée. Benedicty Mario), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 8, 829—836 (франц.)

Как известно, род g поля алгебраических функций R можно определить формулой

$$g = 1 + \sup (d(\mathfrak{A}) - l(\mathfrak{A})),$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает всю группу E дивизоров из R, $d(\mathfrak{A})$ означает степень, а $l(\mathfrak{A})$ — размерность дивизора.

Автор рассматривает следующие модификации этого определения:

$$g_{\mathfrak{o},\,E} = 1 + \sup (d(\mathfrak{A}) - l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})),\ \mathfrak{A} \in E,$$

$$g_{\mathfrak{o}} = 1 + \sup (d(\mathfrak{A}) - l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})),\ \mathfrak{A} \in E_I,$$

$$g_{\mathfrak{o},\,n} = 1 + \sup (d(\mathfrak{A}) - l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})),\ \mathfrak{A} \in E_n,$$

$$g_{\mathfrak{o},\,M} = 1 + \sup (d(\mathfrak{A}) - l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})),\ \mathfrak{A} \in E_M,$$

где $\mathfrak{o}$ означает некоторое кольцо, имеющее R полем отношений и содержащее все константы, $l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})$ — размерность пространства, состоящего из всех $x \in \mathfrak{o}$, для которых дивизор $(x)\mathfrak{A}$ — целый, E_I состоит из всех дивизоров $\mathfrak{A}$, для которых $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) = 0$, если $\mathfrak{p}$ — простой дивизор, для которого $R_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{o}$, E_n состоит из тех $\mathfrak{A}$, для которых $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) \leqslant n$ для тех же $\mathfrak{p}$, а E_M состоит из таких $\mathfrak{A}$, что соотношение $\mathfrak{B}^{\mathfrak{o}} \to \mathfrak{A}$ влечет за собой равенство $l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{B}) = l_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})$. При этом $\mathfrak{B}^{\mathfrak{o}} \to \mathfrak{A}$ означает, что существует $x \in \mathfrak{o}$, для которого $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(x)$.

Доказываются следующие соотношения между этими числами: если множество Q простых дивизоров $\mathfrak{p}$, для которых $R_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{o}$, конечно, то

$$g_{\mathfrak{o},\,M} = g;\ g_{\mathfrak{o},\ n} = g,\ \text{если } n \leqslant -N,$$

$$g_{\mathfrak{o},\,-N} \leqslant g_{\mathfrak{o},\,-N+1} \leqslant \ldots \leqslant g_{\mathfrak{o},\,0} = g_{\mathfrak{o}},$$

$$g_{\mathfrak{o},\,n} = g_{\mathfrak{o}} + n \sum_{\mathfrak{p} \in Q} d(\mathfrak{p}),\ \text{если } n > 0,$$

$$g_{\mathfrak{o},\,E} = \infty,$$

а если Q бесконечно, то

$g_{\mathfrak{o},\,M} = g \leqslant g_{\mathfrak{o}} = g_{\mathfrak{o},\,0}$; $g_{\mathfrak{o},\,n} = \infty\ (n > 0)$; $g_{\mathfrak{o},\,E} = \infty$.

Здесь (в случае конечного Q) N означает минимум таких целых чисел N', что из $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant N'$ для всех $\mathfrak{p} \in Q$ следует, что $x \in \mathfrak{o}$. И. Р. Шафаревич

659. **О некоторых проблемах абстрактной алгебраической геометрии. Игуса** (On some problems in abstract algebraic geometry. Igusa Jun-ichi),

Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 11, 964—967 (англ.)

В предшествующей работе (РЖМат, 1956, 4853) автор доказал, что размерность g многообразия Пикара алгебраической поверхности V и число $h^{1,0}$ линейно независимых одномерных дифференциалов 1-го рода на V связаны неравенством $g \leqslant h^{1,0}$. Теперь строится пример поверхности V над полем конечной характеристики, для которой $g=1$, $h^{1,0}=2$. Таким образом, в отличие от случая нулевой характеристики, в указанном выше соотношении, вообще говоря, нельзя поставить знака равенства.

Для построения V рассматриваются эллиптические кривые A_1 и A_2 над полем характеристики 2, причем про A_1 предполагается, что на ней лежит единственная точка t 2-го порядка. Многообразие V получается из прямого произведения $A_1 \times A_2$ идентифицированием точек, эквивалентных относительно автоморфизма s, определенного формулами

$$s(z_1, z_2) = (z_1 + t, -z_2), \quad z_1 \in A_1, \quad z_2 \in A_2.$$

Пример поверхности V показывает также, что над полем ненулевой характеристики не верны некоторые другие результаты классической алгебраической геометрии, например теорема о совпадении размерности многообразия Пикара и максимальной характеристической недостаточности поверхности. Для той же поверхности V 1-мерное число Бетти, определенное при помощи ζ-функции (Weil A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 497—508) равно 2, а то же число, определенное при помощи теории пучков (РЖМат, 1957, 5147), равно 4. И. Р. Шафаревич

660. О линейных комплексах плоскостей. Лонго (Sui complessi lineari di piani. Longo Carmelo), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **37**, 61—138 (итал.)

Статья содержит проективную классификацию линейных комплексов плоскостей, т. е. множества плоскостей пространства S_n, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$a_{ikj}p^{ikj} = 0 \quad (i, k, j = 0, 1, \ldots, n),$$

где $p^{ikj} = \begin{vmatrix} x^i & x^k & x^j \\ y^i & y^k & y^j \\ z^i & z^k & z^j \end{vmatrix}$,

для $n \leqslant 7$. В основу классификации положено понятие вполне особого пространства. Прямая пространства S_n называется особой прямой комплекса, если каждая проходящая через нее плоскость принадлежит комплексу. Точка называется особой, если через нее проходят по крайней мере две особые прямые. Пусть $n = 2r + \varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$. Особая точка x называется особой точкой вида h, если ранг ρ матрицы (a_{kj}), где $a_{kj} = a_{ikj}x^i$ равен $2(r-h)$, $1 \leqslant h \leqslant r$. Пространство S_k называется вполне особым для данного линейного комплекса, если всякая принадлежащая S_k прямая — особая. Линейный комплекс плоскостей S_2 или (л.к. — S_2) называется комплексом общего типа, если он не имеет вполне особых плоскостей. (л. к. — S_2) в пространстве S_3 совпадает со связкой плоскостей. Его каноническое уравнение $p^{123}=0$. Особыми являются прямые связки и ее центр есть единственная особая точка. В пространстве S_4 существует (л.к. — S_2) общего типа с каноническим уравнением $p^{014} + p^{234} = 0$ и (л.к. — S_2) с особой точкой максимального вида. Его каноническое уравнение: $p^{234}=0$. В пространстве S_5 существуют линейные комплексы общего типа $p^{024} + p^{135} = 0$ и специального типа $p^{024} + p^{145} + p^{235} = 0$ и эти типы единственно возможные. Каноническое уравнение (л.к. — S_2) общего типа в пространстве S_6: $p^{024} + p^{035} + p^{036} + p^{416} + p^{256} = 0$. (Л. к. — S_2) имеет ∞^6 особых прямых. Специальный линейный комплекс в S_6 имеет вполне особую плоскость и особую точку P вида 2. Существуют четыре проективно различных (л.к. — S_2) специального типа: 1) л.к. имеет одну единственную особую плоскость, проходящую через P; 2) существует ∞^2 вполне особых плоскостей, проектирующих из P прямые некоторой конгруэнции; 3) эта конгруэнция специальная; 4) существует ∞^3 вполне особых плоскостей. Приводятся канонические уравнения всех этих случаев. (Л.к. — S_2) общего типа в пространстве S_7 не имеет особых точек вида 2. Его каноническое уравнение $p^{024} + p^{135} + p^{036} + p^{127} + p^{467} + p^{576} = 0$. Специальный (л. к. — S_2) в S_7, не имеющий особых точек вида 2, определяется каноническим уравнением $p^{015} + p^{143} + p^{325} + p^{036} + p^{127} + p^{467} = 0$. Существует 12 различных типов (л.к. — S_2) в S_7, обладающих хотя бы одной особой точкой вида 2. Приводятся их канонические уравнения и дается их геометрическая характеристика. Я. П. Бланк

661. Пример алгебраической конгруэнции прямых третьего порядка и первого класса. Черняев М. П., Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 129—132

Рассматривается алгебраическая конгруэнция прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных полей, расположенных на плоскостях Π и Π_1. Прямая $\Pi \times \Pi_1$ пересечения плоскостей Π и Π_1 рассматривается поочередно как прямая поля Π, а затем как прямая поля Π_1; при этом ей соответственные прямые в полях Π_1 и Π обозначаются через d_1 и d.

Доказывается теорема: «Лучи конгруэнции, проходящие через прямую $\Pi \times \Pi_1$ поля Π (Π_1), огибают некоторое коническое сечение, касающееся прямых $\Pi \times \Pi_1$ и d_1 (d)».

Устанавливается, что рассматриваемая алгебраическая конгруэнция прямых является конгруэнцией третьего порядка и первого класса. З. И. Прянишникова

662. Локальная униформизация на алгебраических поверхностях над полями характеристики $p \neq 0$. Абхьянкар (Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$. Abhyankar Shreeram), Ann. Math., 1956, **63**, № 3, 491—526 (англ.)

Дано доказательство теоремы локальной униформизации алгебраических поверхностей: пусть K — поле алгебраических функций двух переменных над алгебраически замкнутым полем k, тогда каждая нульмерная валюация K/k униформизируема. Для случая поля характеристики нуль теорема была доказана Зариским (Zariski O., Ann. Math., 1939, **40**, 639—689; второе доказательство там же, 1942, **43**, 583—593), второе доказательство которого проходит и для случаев, когда $p \neq 0$, а рассматриваемая валюация не вещественна или вещественная дискретная. Автор рассматривает случаи вещественной иррациональной и вещественной рациональной недискретной валюаций. В первом из них оказывается возможным получить доказательство, видоизменив метод Зариского, второй же, после предварительного изучения теории Галуа локальных колец, приводится к случаю циклических расширений, именно, к доказательству трех следующих теорем: если $L\,k$ — поле алгебраических функций двух переменных, L^*/L — его сепарабельное циклическое расширение простой степени q и v — нульмерная недискретная валюация L/k, имеющая единственное продолжение v^* на L^*, то: 1) если $q \neq p$ и v униформизируема, то униформизируема и v^* (восхождение); 2) если $q \neq p$ и v^* униформизируема,

то униформизируема и v (спуск) и 3) если $q=p$ и v униформизируема, то униформизируема и v^*. Доказательство последней наиболее сложно — оно занимает почти половину статьи.

Указываются некоторые следствия теоремы, известные для полей характеристики нуль и единственным недостающим шагом в доказательстве которых для полей произвольной характеристики до сих пор было лишь отсутствие теоремы униформизации: существование неособенной проективной модели K/k (разрешение особенностей); существование инварианта p_a (арифметический жанр) и разрешимость 14-й проблемы Гильберта для $r=2$: если A — нормальная область целостности, конечно порожденная над k, S — ее поле частных и T — подполе S, содержащее k и степени трансцендентности r над k, то $B=A\bigcap T$ конечно порождено над k. В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

663. **О триортогональных системах. Глоден** (Sur les systèmes triples orthogonaux. Gloden Raoul-Francois), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 15, 1010—1012 (франц.)

Триортогональные системы поверхностей определяются парой дифференциальных уравнений, квадратных относительно входящих в них частных производных. Тождественными преобразованиями автор приводит эти уравнения к виду трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка на три неизвестные функции. Отсюда следует вывод о голоморфности искомых функций от аргументов x, y, z, при голоморфности краевых условий Коши. Последнее другим методом было уже ранее найдено Дарбу (Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux, 2-e éd, 1910, p. 4). Н. И. Кованцов

664. **Замечание к линейчатой геометрии развертывающихся поверхностей. Гавличек** (Poznámka k přímkové geometrii rozvinutelných ploch. Havliček Karel), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 1, 26—37 (чешск.; рез. русск., нем.)

Если p означает совокупность плюккеровых координат, удовлетворяющих квадратичному уравнению $p\cdot p=0$, то уравнение

$$p=p(t),\ t\in(a,\ b) \tag{1}$$

определяет линейчатую поверхность.

Линейчатую поверхность, заданную уравнением

$$q=\dot{p}(t)=dp/dt, \tag{2}$$

назовем производной поверхностью для поверхности (1). Наоборот, поверхность (1) будет примитивной поверхностью к поверхности (2).

В работе доказываются следующие две главные теоремы: 1) Если поверхность (1) является поверхностью касательных к пространственной кривой C, то линия C будет асимптотической на производной поверхности (2). 2) Если дана косая линейчатая поверхность P, которая не является квадрикой, то поверхность касательных какой-либо ее криволинейной асимптотической будет примитивной поверхностью для поверхности P. Других примитивных к поверхности P не существует.

В работе исследуются и случаи, когда P является квадрикой или развертывающейся поверхностью.

F. Vyčichlo

665. **Об уравнении Гамильтона—Якоби геодезических. Винтнер** (On the Hamilton—Jacobi equation of geodesics. Wintner Aurel), Tensor, 1956, **6**, № 1, 1—5 (англ.)

Автор рассматривает положительно определенную метрику

$$ds^2=E(x,\ y)\,dx^2+2F(x,\ y)\,dxdy+G(x,\ y)\,dy^2. \tag{1}$$

Если все функции E, F, G принадлежат классу C^n, то метрика называется C^n-метрикой. Если C^1-метрика имеет непрерывную гауссову кривизну, она называется регулярной.

Автор доказывает следующее утверждение: Если метрика (1) является регулярной, то существует C^1-преобразование

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y), \tag{2}$$

переводящее метрику (1) в нормальную гауссову форму:

$$ds^2=du^2+g(u,\ v)\,dv^2. \tag{3}$$

Функция $u(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla u=\frac{Gu_x^2-2Fu_xu_y+Eu_y^2}{Eg-F^2}=1. \tag{4}$$

Обычным условием наличия решения (4) является принадлежность (1) к классу C^2 метрик. Н. Н. Яненко

666. **О геометрическом месте центров сферической кривизны. Джха** (On the locus of the centre of spherical curvature. Jha P.), Ganita, 1953, **4**, № 2, 131—134 (англ.)

Рассматривается последовательность пространственных кривых C, C_1, C_2, ..., C_n, каждая из которых, начиная с C_1, является геометрическим местом центров сферической кривизны предыдущей. Кривые C_n и C_{n+2} параллельны (ребра трехгранников Френе в соответственных точках параллельны).

Если одна из кривых имеет постоянную кривизну, то все последующие имеют ту же постоянную кривизну, а все кривые через одну конгруэнтны. Если одна из кривых имеет постоянное кручение, а ее радиус кривизны есть линейная функция длины дуги, то все кривые через одну обладают теми же свойствами.

Н. М. Бескин

667. **Теория Годо о поверхностях и локальных координатах в линейчатом пространстве. Клапка** (Godeauxova teorie ploch a lokální souřadnice v přímkovém prostoru. Klapka Jiří), Sbor. Vysoké školy stavit. Brně, 1956, **5**, № 1—3, 29—40 (чешск.; рез. франц).

Пусть U, V — образы в пространстве Клейна—Сегре (Klein—Segre) асимптотических касательных поверхности в проективном пространстве S_3; хорошо известно, что существует последовательность Лапласа $\ldots U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$. Точки U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 линейно независимы; при помощи их можно ввести локальные координаты; представив $dU_2, \ldots, dV_2$ в виде их линейных комбинаций, получим основные дифференциальные уравнения поверхности в линейчатом пространстве. Найдено уравнение гиперквадрики Клейна в локальных координатах. При помощи основных уравнений поверхности доказана хорошо известная теорема, что огибающие системы квадрик Ли (Lie) состоят из рассматриваемой поверхности и поверхностей, образованных вершинами четырехсторонника Демулена (Demoulin). Результаты использованы в работе И. Брейха (J. Brejcha) (реф. 668).

A. Švec

668. **О четырехстороннике Демулена и о канонических прямых в точке поверхности в пространстве S_3. Брейха** (O Demoulinově čtyřstranu

a o kanonických přímkách v bodě plochy prostoru S_3. B r e j c h a J o s e f), Sbor. Vysoké školy stavit. Brně, 1956, 5, № 1—3, 41—47 (чешск., рез. нем.)

Автор пользуется некоторыми результатами Клапки (J. Klapka, реф. 667) для доказательства теоремы Бомпиани (Bompiani), утверждающей, что директрисы Вилчинского (Wilczyński) являются секущими пары диагоналей сторон четырехсторонника Демулена, проходящими через точку x или лежащие в касательной плоскости в точке x. Комплекс канонических прямых j-ого рода некоинцидентной поверхности имеет образом в пространстве Клейна—Сегре (Klein—Segre) квадратичную конгруэнцию прямых K^j; найдено условие, чтобы касательное пространство этой конгруэнции (не разлагающейся в общем случае на развертывающиеся поверхности) вдоль каждой прямой имело размерность (так называемый характер) $m<5$. Поверхности, у которых канонические кривые 1-го рода будут кривыми Сегре, имеют как конгруэнции K^1, так и K^2 с характерами $m=5$ или $m<5$. А. Švec

669. Заметка о парах конгруэнций W, имеющих общую фокальную поверхность. Г о д о (Remarque sur les couples de congruences W ayant une nappe focale commune. G o d e a u x L u c i e n), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 7—10, 514—519 (франц.)

Дается новый метод для получения в пространстве S_3 последовательности квадрик, сопряженных с парой конгруэнций W, имеющих общую фокальную поверхность. Метод заключается в том, что пространство S_5, на гиперквадрику которого отображаются конгруэнции W, погружается в пространство S_7 и для обоих пространств соответственно строятся последовательности Лапласа, в результате чего и получается последовательность квадрик, из которых любая касает в четырех точках квадрику, ей предшествующую и следующую за ней. Другим методом автор получил те же результаты ранее (Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1939, 953—958). П. Ю. Катилюс

670. Развертывающиеся преобразования конгруэнций прямых. Ч е х (Transformations développables des congruences des droites. Č e c h E d u a r d), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 2, 260—286 (франц.; рез. русск.)

Основные уравнения непараболической конгруэнции прямых записаны в виде

$$dA_1 = \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2 A_2 + \omega_1 A_3,\ dA_2 = \alpha_2\omega_1 A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2 A_4,$$

$$dA_3 \equiv \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1 A_4,\ dA_4 \equiv \beta_1\omega_2 A_3 + \omega_{44}A_4 \pmod{A_1,\ A_2}.$$

В этом случае формы а) точечная $\alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2$, б) плоскостная $\beta_1\beta_2\omega_1\omega_2$ — фокальная 1-го, соответственно 2-го рода, $\alpha_1\beta_1\omega_1^{-1}\omega_2^3$ соответственно $\alpha_2\beta_2\omega_1^3\omega_2^{-1}$ являются инвариантными. Найдено геометрическое значение равенства каждой из них на двух конгруэнциях в развертывающемся преобразовании (в котором соответствует друг другу развертывающиеся поверхности). Необходимым и достаточным условием для проективного изгибания двух конгруэнций является равенство рассматриваемых форм на обеих конгруэнциях и асимптотическое соответствие фокальных поверхностей. Найдено новое геометрическое значение картанова особого изгибания конгруэнции, позволяющее ввести новый тип так называемого полуособого изгибания.

Можно задать два произвольных соотношения между рассматриваемыми формами; в таком случае существуют (6 произвольных функций одного переменного) конгруэнции, основные формы которых удовлетворяют заданным соотношениям. Например, можно задать дифференциальные уравнения асимптотических кривых на обеих фокальных поверхностях. Приведенная теорема является широким обобщением теоремы Картана о существовании конгруэнций R. А. Švec

671. Проективное изгибание конгруэнций W. Ч е х (Déformation projective des congruences W. Č e c h E d u a r d), Чехосл. мат. ж., 1956, 6, № 3, 401—414 (франц.; рез. русск.)

Основной результат — определение всех конгруэнций W, допускающих проективное изгибание с функциональным произволом; среди этих изгибаний всегда будут конгруэнции линейного комплекса. Эти результаты автор получает, продолжая (реф. 670) исследование конгруэнций $L=(A_1A_2)$ с матрицей компонент и добавочным неравенством

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \alpha_1\omega_2 & \omega_1 & 0 \\ \alpha_2\omega_1 & \omega_{22} & 0 & \omega_2 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \beta_2\omega_1 \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \beta_1\omega_2 & \omega_{44} \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0.$$

Наряду с конгруэнцией L рассматривается ее «дуализация» $L^*=(E_3E_4)$ (т. е. корреляция $H_0A_1=E_3=[124]$, $H_0A_2=-E_4=[123]$, $H_0A_3=-E_1=-[234]$, $H_0A_4=E_2=-[134]$; $[ijk]=(A_i, A_j, A_k)$).

Если $\alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2$, то дуализация L^* будет проективным изгибанием для L и обе будут конгруэнциями W. При подходящем нормировании имеет $\alpha_1=\beta_1=-\alpha_2=-\beta_2=1$

$$\omega_{11}-\omega_{33}=\omega_{22}-\omega_{44}=z_1\omega_1+z_2\omega_2,$$

$$\omega_{11}-\omega_{22}=\omega_{33}-\omega_{44}=t_1\omega_1+t_2\omega_2;$$

при этом $t_1\omega_1+t_2\omega_2$ есть полный дифференциал и определяет «каноническое разложение» L на ∞^1 линейчатых поверхностей R. Для каждой R и асимптотической C на R найдется асимптотическая C' так, что в точках B, B' пересечения C и C' с произвольной образующей g касательная плоскость к R в B' будет полярной плоскостью точки B относительно нулевой системы соприкасающегося в g линейного комплекса. При $t_1=t_2=0$ конгруэнция L принадлежит линейному комплексу; при $t_1=\pm t_2$ поверхности R соответствуют асимптотическим фокальных поверхностей L (асимптотическая дуализация). Всякая конгруэнция W допускает не более ∞^6 проективных изгибаний, не принадлежащих линейному комплексу и не имеющих асимптотической дуализации; наибольшее число ∞^6 достигается при $z_1=z_2=0$. Конгруэнции L с асимптотической дуализацией изгибаются в конгруэнции L с асимптотической дуализацией того же рода (с тем же знаком $t_1=\pm t_2$); многообразие изгибаний зависит от одной произвольной функции одного аргумента. С. П. Фиников

672. Теория интегральных инвариантов и интегральная геометрия. Д р и н ф е л ь д Г. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 151

В работе систематически применяется теория интегральных инвариантов непрерывных групп преобразований для получения меры множества геометрических объектов интегральной геометрии. При этом возникают системы уравнений с частными производными первого порядка, которые удается проинтегрировать. Используются понятия продолженной и расширенной группы и вводятся в рассмотрение интегральные инварианты низших порядков. Я. П. Бланк

673. Аппроксимация бесконечно малых изгибаний поверхностей нулевой кривизны. П о з н я к Э. Г.,

Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 4, 511—514; Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 163—164

Рассматривается бесконечно малое изгибание (отличной от плоскости) поверхности S нулевой кривизны. Поле скоростей изгибания поверхности S тривиально на каждой ее прямолинейной образующей. Таким же свойством обладает бесконечно малое изгибание двугранного угла вдоль его ребра. Это обстоятельство автор кладет в основу изучения бесконечно малых изгибаний поверхности S при помощи аппроксимаций, исходя от призматоидов. Доказывается теорема: любое трижды непрерывно-дифференцируемое бесконечно малое изгибание поверхности S можно аппроксимировать бесконечно малыми изгибаниями призматоидов P_n ($P_n \to S$).

Даются применения этой теоремы к изучению бесконечно малых изгибаний многоугольных желобов. Так автор называет гомеоморфную кольцу поверхность, склеенную из цилиндров, образующие которых параллельны фиксированной плоскости Π. Предполагается, что касательные плоскости цилиндров, составляющих желоб, не параллельны плоскости Π (включая границу желоба). Устанавливаются предложения: 1) два бесконечно малых изгибания желоба, совпадающие на его границе, совпадают на всем желобе; 2) любое бесконечно малое изгибание граничной ломаной желоба может быть продолжено на весь желоб; 3) любой желоб (при указанных выше условиях) является нежестким.

Н. В. Ефимов

674 К. Курс локальной дифференциальной геометрии. Фавар (Cours de géométrie différentielle locale. Favard J. Paris, Gauthier—Villars, 1957, 553, ill.) (франц.)

По словам автора, курс имеет переходной характер. В задачу курса дифференциальной геометрии, данной группы Ли G входит изучение классов (транзитивности) геометрических объектов, реперируемых при помощи функций и дифференциальных форм.

В первой главе, вводной части, делается обзор ряда основных понятий топологии и теории групп преобразований.

Во второй главе вводятся дуальные аффинные пространства C^n, C^{*n} контравариантных и ковариантных векторов, тензорные произведения аффинных пространств. Разбираются операции с тензорами, мультивекторы, внешние формы.

В третьей главе рассматриваются внешние дифференциальные формы, приводится теорема Фробениуса о вполне интегрируемых системах, доказываются методом Картана три теоремы теории групп Ли. Выводятся картановы уравнения и структуры группы. Устанавливается понятие элемента прикосновения порядка p для многообразия V^ν, в пространстве V^n, как совокупности значений величин x^h, dx^h, ..., $d^p x^h$ ($h = 1, \ldots, n$) в точке. Исследуются условия определимости многообразия V^ν в V^n и эквивалентности погруженных многообразий. Показывается приведение подвижного репера к реперу Френе (просто транзитивный репер, в котором все вторичные параметры закреплены).

В первой части курса «Прямая инфинитезимальная геометрия» автор останавливается на порядке точки V^ν. Напомнив понятие паратингенции, он выясняет, когда порядок точки принадлежит также и ее окрестности. В эвклидовых плоскости и пространстве (E^2, E^3) подробно изучается порядок прикосновения кривых и поверхностей. В главе об огибающих в E^2 и E^3 при помощи паратингенции получаются некоторые общие результаты, а затем обстоятельно исследуются огибающие кривых и поверхностей, конгруэнции кривых.

Вторая часть содержит изложение методом подвижного репера Картана классических трехмерных дифференциальных геометрий: евклидовой, аффинной унимодулярной и проективной.

В евклидовой геометрии подчеркиваются геодезические линии, ковариантная производная и параллельное перемещение вектора, выделен параграф с векторным анализом на поверхности, а многочисленные свойства асимптотических и линий кривизны сообщаются сокращенно — отчасти в упражнениях.

В аффинной геометрии автор, тщательно анализируя все частности приведения репера к реперу Френе, приходит к ряду их частных видов кривых и поверхностей, например к кривым на плоскости с общей аффинной группой; возвращаясь к вопросам прикосновения, находит касательные Дарбу и квадрику Ли.

В проективной геометрии автор, по преимуществу, остается в области вопросов, связанных с приведением репера к виду Френе. Один параграф отводится проективной наложимости поверхностей.

Третья и последняя часть курса «Геометрия переноса» рассматривает фундаментально-групповую связность и «параллельный» перенос вдоль линии.

На этой основе строится геометрия аффинной связности. Пишутся формулы инфинитезимального перемещения аффинного репера, вводятся тензор кручения T^h_{lm} кривизны R^k_{hlm}, рассматриваются ковариантная производная тензора, тождества Бианки, вновь определяется параллельное перемещение вектора. Доказывается, что тензоры T^h_{lm} и R^k_{hlm} определяют в отдельной точке V^n линейную аффинную связность. Разбирается разложимость пространства на пространства-множители. Отмечаются метрические пространства Эддингтона, Вейля, Эйнштейна. Путем добавления несобственного многообразия P^{n-1} к аффинному пространству A^n, касательному к V^n, появляется проективная связность, получается проективный тензор кривизны и кручения.

Риманово пространство, которому отведена последняя глава книги, получается, как пространство аффинной связности без кручения и с совместной метрической связностью. Выясняется, когда риманово пространство допускает r-членную группу перемещения. Курс заканчивается теорией кривых и многообразиями, погруженными в риманово пространство.

Много оригинальных задач в конце каждой главы.

К. Н. Тихоцкий

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

675. Дифференциальные геометрические объекты 1-го класса с двумя компонентами в X_1. Георгиу (Obiecte geometrice diferențiale de clasa I. cu două componente în X_1. Gheorghiu O. Em.), Studii și cercetări științ. Acad. RPR. Baza Timișoara. Ser. I, 1955, **2**, № 1—4, 21—25 (рум.; рез. русск., франц.)

Устанавливается закон преобразования дифференциально-геометрических объектов 1-го класса в одномерном дифференциально-геометрическом пространстве.

Б. А. Розенфельд

676. К теории геометрических объектов. I—II. Ацел (Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I—II. Aczél J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3—4, 339—354 (нем.; рез. русск.)

Элементарным методом доказывается, что в одномерном пространстве одномерные, однокомпонентные, чисто дифференциальные геометрические объекты класса выше трех не существуют, и находятся все такие объекты классов 1, 2 и 3.

При доказательствах, относительно функции f, определяющей преобразования компоненты объекта $\bar{x} =$

$=f(x, a_1, \ldots, a_n)$, предполагается только, что: 1) f непрерывна по компоненте объекта x и старшей производной a_n; 2) при всех x из области его определения и любых значениях $a_1 \neq 0$, $a_2, \ldots, a_{n-1}$, f фактически зависит от a_n, тогда как в ранее известных доказательствах приведенных теорем предполагалась либо аналитичность (Я. С. Дубнов, Ю. Е. Пензов), либо однократная непрерывная дифференцируемость (С. Голомб (S. Gołąb)) функции f. Ю. Е. Пензов

677. **О линиях Дарбу в подпространстве евклидова пространства. Прванович** (On Darboux lines in a sub-space of a Euclidian space. Prvanovitch Mileva), Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954, A19, 13—18 (англ.)

Рассматривается обобщение понятия линий Дарбу для риманова пространства V_n, погруженного в евклидово пространство E_m. Линиями Дарбу являются здесь те линии, в каждой точке которых соприкасающаяся гиперсфера касается V_n. Автор дает для дифференциальных уравнений этих линий разложения, куда входят коэффициенты двух фундаментальных форм V_n и их частные производные. P. Vincensini

Перевод из Math. Revs., 1955, 16, № 4, 400.

678. **Об обобщении первой кривизны кривой на гиперповерхности риманова пространства. Бань** (On a generalization of the first curvature of a curve in a hypersurface of a riemannian space. Pan T. K.) Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 210—216 (англ.)

Пусть риманово пространство V_n с основной формой $g_{ij}dx^i dx^j > 0$ вложено в риманово пространство V_{n+1} с основной формой $a_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta > 0$. λ-конгруэнцией называется совокупность векторов $\lambda^\alpha(x, dx)$, скрепленных с точками V_n. Рассмотрим точку P на кривой C в V_n и определим в ней единичный вектор N^α, ортогональный касательному вектору t кривой и лежащий в плоскости t, λ. Спроектируем вектор главной нормали кривой C в V_{n+1} на касательную гиперплоскость к V_n параллельно вектору N^α. Полученный в проекции вектор называется вектором первой кривизны кривой C в V_n в точке P относительно λ-конгруэнции, а длина этого вектора называется относительной первой кривизной.

Теорема. Относительная первая кривизна в точке P кривой в V_n отличается от первой кривизны в P кривой в V_n на относительную первую кривизну в P геодезической V_n, проходящей через P в том же направлении. Кривая в V_n называется псевдогеодезической, если в каждой точке кривой относительная первая кривизна равна нулю.

Теорема. Через каждую точку в заданном направлении на гиперповерхности проходит одна псевдогеодезическая. Через каждые две достаточно близкие точки проходит одна псевдогеодезическая. Далее вводится понятие относительного параллелизма, для которого псевдогеодезические являются автопараллельными кривыми. Если, в частности, λ^α представляет поле нормального вектора гиперповерхности, то все введенные в работе «относительные» понятия совпадают с классическими. А. С. Феденко

679. **Характеристические линии гиперповерхности V_n, погруженной в риманово пространство V_{n+1}. Сингал, Бехари** (Characteristic lines of a hypersurface V_n, imbedded in a riemannian V_{n+1}. Singal M. K., Behari Ram), Proc. Indian Acad. Sci., 1956, A44, № 2, 53—62 (англ.)

На поверхности положительной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве существует единственная сопряженная сеть, для которой сетевой угол имеет наименьшее значение. Эта сеть называется сетью характеристических линий или среднесопряженной сетью (Eisenhart L. P., A. treatise on the differential geometry of curves and surfaces, 1909, 128—130).

В реферируемой статье изучаются характеристические, но не являющиеся асимптотическими, линии на V_n, погруженном в риманово V_{n+1}.

Исследование распадается на два случая: 1) когда все главные кривизны различны; 2) когда имеются по несколько равных значений главных кривизн.

В первом случае каждой паре главных кривизн, имеющих одинаковый знак, отвечает пара вещественных характеристических направлений, лежащих в пучке, определенном соответствующими главными направлениями, причем нормальная кривизна для этой пары характеристических направлений одинакова и равна средней гармонической данных главных кривизн

$$\left(\frac{k_r k_s}{k_r + k_s}\right).$$

Во втором случае каждым двум сериям

$$k_r = k_{r+1} = \ldots = k_{r+p-1} \neq k_s = k_{s+1} = \ldots = k_{s+q-1}$$

значений главных кривизн, имеющим одинаковый знак, отвечает пара вещественных характеристических направлений, имеющих нормальную кривизну такую же, как и в предыдущем случае. Эти характеристические направления принадлежат пучку, порожденному двумя определенными главными направлениями, лежащими в областях главных направлений, соответствующих рассматриваемым сериям значений главных кривизн.

Рассмотрев направления, для которых отношение геодезического кручения к нормальной кривизне имеет экстремальное значение, автор устанавливает их совпадение с характеристическими направлениями, обобщая таким образом на рассматриваемый случай результат Мишра, полученный для поверхности в трехмерном евклидовом пространстве (Mishra R. S., Proc. Benaras Math. Soc., 1947, 9, 40). Б. Л. Лаптев

680. **К теории гиперповерхности пространства аффинной связности. Измайлов В. Д.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 153

Тезисы доклада. Решается задача инвариантного оснащения гиперповерхности в пространстве L_n аффинной связности следующим образом: сначала на гиперповерхности внутренним образом определяется свернутый объект аффинной связности, используя который, автор строит также внутренним образом аффинную связность на гиперповерхности и вслед за тем искомое инвариантное оснащение гиперповерхности. Это решение отлично от данного ранее автором решения той же задачи (РЖМат, 1957, 4337). А. Е. Либер

681. **Некоторые формулы в римановом пространстве. Чаки** (Some formulas in a Riemannian space. Chaki Manindra Chandra), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, 10, № 1—2, 85—90 (англ.)

В римановом пространстве рассматриваются две произвольные аффинные связности. Выводятся некоторые условия, при которых: 1) обе связности имеют одно и то же кручение, 2) ковариантные производные метрического тензора относительно обоих связностей совпадают. А. С. Феденко

682. **О деформации римановой метрики V_m в пространстве постоянной кривизны S_{m+1}. Хуан-шэн** (Хуан Шэн) (Huang Sheng), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 2, 320—332 (кит.; рез. англ.)

Пользуясь методом внешних дифференциальных форм, автор вводит для римановой метрики понятие k_0-ранга, как ранга системы билинейных форм

$$k_{ij} = \sum_{k<l} [R_{ijkl} - k_0 (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})] [\omega^k \omega^l].$$

k_0 — постоянная (кривизна пространства S_{m+1}). В терминах k_0-ранга доказываются следующие теоремы:

1. Вообще говоря, $V_m \subset S_{m+1}$ неизгибаема, изгибаемая метрика должна иметь k_0-ранг $\leqslant 2$ (обобщение теоремы Беза (R. Beez)).

2. Если k_0-ранг $\geqslant 4$, уравнения Петерсона—Кодацци являются следствиями условий Гаусса (обобщение теоремы Томаса) (T. Y. Thomas).

Дается полная классификация изгибаемых гиперповерхностей V_m в S_{m+1}. Н. Н. Яненко

683. О симметрических пространствах V_5. Телеман (Asupra spaţiilor V_5 simetrice. Teleman C.), Studii şi cercetări mat., 1955, **6**, № 1—2, 193—202 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор исправляет сделанное им ранее (РЖМат, 1955, 3952) утверждение о несуществовании симметрических пространств V_5. Оно не верно, как это следует из классических работ Э. Картана (Cartan E., Bull. Soc. Math. France, 1927, **55**, 114—134). В реферируемой работе показывается, что римановы пространства V_5 с транзитивной группой движений G_8, для которых группа стационарности начала координат в нормальных координатах дается операторами

$$X = X_{12} + 2X_{24}, \quad Y = \sqrt{3}\,X_{25} + X_{13} + X_{24},$$

$$Z = \sqrt{3}\,X_{15} - X_{14} + X_{23}$$

$$\left(X_{ij} = x^j \frac{\partial f}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial f}{\partial x^j},\ i, j = 1, \ldots, 5\right),$$

и вторая является единственной неприводимой подгруппой ортогональной группы пятимерного пространства, будут симметрическими неевклидовыми пространствами. Те из них, у которых кривизна отрицательна, могут быть определены метрикой

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^5)^2,$$

$$ds^1 = e^{-mx^4+\sqrt{3}mx^5}(dx^1 - 2mx^2dx^3),\ ds^2 = e^{mx^4+\sqrt{3}mx^5}dx^2,$$

$$ds^3 = e^{-2mx^4}dx^3,\ ds^4 = dx^4,\ ds^5 = dx^5.$$

Через две произвольные точки этих пространств проходит всегда одна единственная геодезическая линия. P. Mocanu

684. S-расширения римановых пространств. Мацумото (S-extensions of Riemannian spaces. Matsumoto Makoto), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 2, 107—118 (англ.)

Рассматриваются пространство V^n не симметрической евклидовой связности L^i_{jk} и риманово пространство R^n с фундаментальным тензором g_{ij}, сохраняющимся при переносах в V^n. Тогда симметрическая часть компонент L^i_{jk}, вообще говоря, не будет совпадать с символами Кристоффеля Γ^i_{jk}, построенными с помощью тензора g_{ij}, т. е. геодезики R_n не будут определяться теми же уравнениями, как пути в V^n. Но если это совпадение имеет место, то тензор g_{ij} будет инвариантно постоянным как относительно связности L, так и относительно ее симметрической части. Такого рода связность L^i_{jk} названа «S-связностью», и соответствующее риманово пространство R^n — пространством, индуцированным пространством V^n. Обратный переход от R^n к V^n называется S-расширением риманова пространства. Кривые опорного аналитического пространства M^n, являющиеся геодезиками в R^n, являются путями в V^n и обратно.

Найдено, что необходимым и достаточным условием наличия S-связности является антисимметрия ковариантных компонент тензора кручения S_{ijk} по всем индексам, т. е. компоненты связности S-расширения получаются путем добавления к ковариантным компонентам символов Кристоффеля Γ_{ijk} произвольного антисимметричного тензора S_{ijk}.

Тензор Риччи S-связности не симметричен; его антисимметрическая часть равна $S^a_{ij;\,a}$, где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование в пространстве R^n. Поэтому необходимым и достаточным условием симметричности тензора Риччи является гармоничность тензора S_{ijk}.

Если тензор S_{ijk} — киллингов (Yano K., Ann. Math., 1952, **55**, 328—347), т. е. его ковариантная производная антисимметрична, то тензор Риччи симметричен и, кроме того, тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$L_{ijkl} = L_{klij}.$$

Получена связь между скалярными кривизнами пространств V^n и R^n и установлено (в случае положительно определенной метрики), что $L \leqslant R$.

Показано, что теория полностью гармонических пространств (Synge J. L., Proc. London Math. Soc., 1930, **32**, (2), 241—258; Copson E. T., Ruse H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1939—40, **60**, 117—133) может быть распространена на S-расширения, причем полная гармоничность R^n влечет полную гармоничность V^n и обратно. В заключение рассмотрена теория подпространств в пространствах с S-связностью. Если учесть индуцированную связность и индуцированную метрику, то подпространства оказываются также наделенными S-связностью. Б. Л. Лаптев

685. О группах голономии пространств аффинной связности. Улановский М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 174

Пусть $H_k(x)$ — минимальная алгебра Ли, содержащая все матрицы, образованные компонентами тензора кривизны пространства аффинной связности и его ковариантными производными до p-го порядка включительно в точке x, причем в компоненте $\nabla_{r\ldots t}R^{\cdot\cdot\cdot\ i}_{jk,\ l}$ индексы i, l — номера строк и колонн, $r \ldots t$, jk — определяют «номер» матрицы.

Пусть в некоторой окрестности M точки x_0 $H_p(x) = H_{p+1}(x)$, причем размерность $H_p(x_0)$ не ниже, чем в каждой точке $x \in M$. Тогда $H_p(x)$ есть алгебра Ли центрально-аффинной группы голономии в точке x_0 относительно некоторой окрестности $N \subset M$.

Я. П. Блэнк

686. Группы подобных преобразований в финслеровом пространстве. Хирамацу (Groups of homothetic transformations in a Finsler space. Hiramatu Hitosi), Tensor, 1954, **3**, № 3, 131—143 (англ.)

Преобразования подобия в финслеровом пространстве, т. е. преобразования $\bar{x}^i = \bar{x}_i(x)$, при которых скаляр, определяющий метрику, получает постоянный множитель

$$L(\bar{x}, \bar{x}') = aL(x, x'),$$

где $a = \text{const}$, изучались Шанксом (Shanks S., Duke Math. J., 1950, **17**, 299—311), а с помощью производной Ли Яно (Yano K., J. Indian Math. Soc., 1951, **17**, 105—117).

В реферируемой статье, рассмотрев некоторые свойства производной Ли, обозначаемой символом X, в финслеровом пространстве и получив соответствующие формулы, что было ранее установлено референтом (Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанском ун-те, 1938, (3), **10**, 3—38), автор доказывает ряд теорем, касающихся операторов инфинитезимальных подобий и дви-

жений $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,dt$, частью являющихся следствием общих свойств производной Ли (Лаптев Б., Уч. зап. Казанского ун-та, 1950, **110**, кн. 7, 5—14). Уравнения, определяющие подобия, имеют вид $Xg_{ij} = 2cg_{ij}$. Отсюда после образования альтернированной производной Ли легко получается, что производная группа от параметрической группы подобий есть группа движений, причем группа подобий не простая.

Известными методами с применением производной Ли получены условия интегрируемости уравнений, определяющих инфинитезимальные подобия. Эти условия заключаются в алгебраической совместности некоторой бесконечной системы уравнений относительно ξ^i, $\xi^i_{;j}$ (ковариантных производных от ξ^i) и c.

Требование, чтобы финслерово пространство допускало группу подобий максимального порядка $r = N(N+1)+1$, приводит к условиям, выражающим, что пространство евклидово. Б. Л. Лаптев

687. Конформная геометрия в n-мерном пространстве с длиной дуги $s = \int \{A_i(x, x')x'^{ii} + B(x, x')\}^{1/p} dt$. **Кано** (Conformal geometry in an n-dimensional space with the arc length $s = \int \{A_i(x, x')\,x''^i + B(x, x')\}^{1/p} dt$. Kano Chôtaro), Tensor, 1956, 5, № 3, 187—196 (англ.)

Теория специального пространства Кавагути, т. е. пространства с метрикой, заданной выражением $ds = f^{1/p}dt$, приведенным в заглавии, была развита Кавагути (Kawaguchi A., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, 12, 205—208; Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 153—167), причем теория кривых этого пространства исследовалась затем рядом авторов: Митиро (Michihiro S., Tensor, 1941, **4**, 63—66), Кацурада (Katsurada J., Tensor, 1944, **7**, 58—64), Ида (Ida S., Tensor, 1949, **9**, 25—29; Tensor (N. S.), 1952, **2**, 89—98).

В реферируемой статье рассматривается конформная теория, т. е. теория инвариантов относительно преобразования $\bar{F} = e^{k\sigma}F$ основной функции, где $\sigma = \sigma(x, x')$. Из условий Цермело инвариантности функции F относительно преобразования параметра следует, что σ — однородная относительно x'^i функция нулевого измерения. Установив закон преобразования объекта Γ^i при рассмотренном преобразовании F, автор исключает произвольную функцию σ с помощью надлежащим образом выбранного скаляра K, закон преобразования которого $\bar{K} = K + a$ содержит ту же функцию a от σ, как и закон преобразования Γ^i $\bar{\Gamma}^i = \Gamma^i + ax'^i$. Так получена базисная конформная связность $H^i = \Gamma^i - Kx'^i$, с помощью которой строится обычным путем конформный абсолютный дифференциал и соответственно конформные ковариантные производные первого и второго рода от конформного вектора (нулевого измерения относительно x'^i), а также от относительного конформного вектора веса k. Это построение может быть перенесено и на тензоры. В случае относительного конформного вектора абсолютный дифференциал зависит от выбора конформного параметра. Далее строится внутренний дифференциал конформного относительного вектора v^i веса k и измерения h (относительно x'), который при переходе к другому параметру, как и v^i, получает множитель $\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^h$.

Альтернирование ковариантных производных 1-го рода и соответственно 1-го или 2-го родов приводит к тензорам конформной кривизны

$$R^{*i}_{jkl},\ K^{*i}_{jks},\ T^{*}_{jks};\ B^{*i}_{jkl},\ D^{*}_{jk}.$$

Устанавливается ряд тождеств, их связывающих.

Изучение изменения конформных тензоров кривизны при выборе других возможных скаляров K приводит к инвариантным относительно этого выбора конформным тензорам кривизны C^{*i}_{jkl} и D^{*i}_{jkl} (выражающимся соответственно через R^{*i}_{jkl} и B^{*i}_{jkl}).

В случае $n > 2$ необходимым и достаточным условием того, что пространство конформно пространству с $\tilde{R}^i_{jkl} = 0$ и $\tilde{B}^i_{jkl} = 0$ (эти тензоры построены с помощью Γ^i), является существование такого K, которое обращает в нуль тензоры R^{*i}_{jkl} и B^{*i}_{jkl}.

Автор отмечает возможность построения инвариантной относительно преобразования t теории с помощью дескриптивного инварианта Дугласа (Douglas J,. Ann. Math., 1928, **29**, 143—168). Б. Л. Лаптев

688. Об экстремальных кривых в специальном пространстве Кавагути. Кавагути, Набухара (On extremal curves in a special Kawaguchi space. Kawaguchi Syun-ichi, Nobuhara Tetsuro), Tensor, 1956, **5**, № 3, 197—200 (англ.)

В специальном пространстве Кавагути (реф. 687) автопараллель является минимальной кривой, но не экстремалью, подобно случаю картановых пространств (Alardin F., Math. pures et appl., 1948, **27**, 225—336) и в отличие от римановых и финслеровых пространств.

В реферируемой статье устанавливаются условия, при которых экстремальные кривые, т. е. кривые, полученные приравниванием нулю эйлеровского вектора, соответствующего функции F, содержат все автопараллели

$$\frac{\delta x'^i}{\delta t} \equiv x''^i + 2\Gamma^i = 0.$$

Эти условия выражаются равенством

$$A_l K^{\ \ l}_{ki}\, x'^k = 0. \qquad (1)$$

Если же $p = 1$, то при условии (1) оба семейства совпадают. Б. Л. Лаптев

689. Точечные преобразования между совпавшими пространствами в особых случаях. Сперанца (Le trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti nei casi particolari. Speranza Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 513—521 (итал).

Продолжая (РЖМат, 1957, 5891) исследование аналитического преобразования T линейного пространства S_r в себя и порождаемой им в паре регулярных для T точек A и $\bar{A} = T(A)$ гомографии Ω между связками $\sum_{r-1}$ и $\sum_{r-1}$ с центрами в точках A и $\bar{A}$, автор рассматривает случай, в котором существует пространство $S_{r-p} = \Omega S_{r-p} \in \sum_{r-1} \cap \sum_{r-1}$, отличное от S_r, и изучает в этом случае гомографии, индуцированные Ω-й между различными элементами связок с центрами в S_{r-p}.

Определяется местная система координат, относительно которой уравнения T, в близости A, выводятся довольно просто. Рассматривается частный случай $n = 3$. Gh. Galbură

690. Коллинеация и квадрики. Бомпьяни (Omografie e quadriche. Bompiani E.), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 3, 359—367 (итал.)

Автор обобщает введенные Б. Сегре понятия коллинеации, принадлежащей (inerente) квадрике Q, и коллинеации, принадлежащей паре различных квадрик Q, $\bar{Q}$ в проективном пространстве S_n. Коллинеация Ω принадлежит, по Сегре, Q, если $\Omega Q \equiv Q$ и прямая, соединяющая x и $\bar{x} = \Omega x$, $x \subset Q$, лежит в Q. Ω принадлежит паре квадрик Q, $\bar{Q}$, если $\bar{Q} \equiv \Omega Q \neq Q$ и если

прямая, соединяющая каждую точку $x \subset Q$ и $\bar{x} = \Omega x$, касательна к Q и $\bar{Q}$ в x, соответственно $\bar{x}$.

Коллинеация Ω — присоединенная (aderente) к квадрике Q, если прямая, соединяющая $x \subset Q$ и $\bar{x} = \Omega x$, касательна к Q в x.

Корреляция, порождаемая Ω посредством поляритета относительно Q, по определению, переводит x в гиперплоскость, полярную $\bar{x} = \Omega(x)$ относительно Q.

Характеристикой, по определению, называется кривая на Q, огибающая касательных $(x, \bar{x})$.

1. Корреляция Ω — присоединенная к Q тогда и только тогда, когда Q есть место точек инциденции для корреляции, порождаемой Ω посредством поляритета относительно Q.

2. Коллинеация Ω принадлежит Q тогда и только тогда, когда Ω и Ω^{-1} — присоединенные к Q.

3. Коллинеации Ω — присоединенные к Q есть корреляции, принадлежащие линейной системе, которая образована коллинеацией — произведением произвольного нуль-корреляции на поляритет относительно Q и тождественным преобразованием. Размерность системы есть $n(n+1)$.

4. Если коллинеация Ω — присоединенная к Q, то все ее положительные и отрицательные степени также присоединенные к Q.

5. Характеристики на Q — одни и те же для всех коллинеаций, соответствующих одной и той же нуль-корреляции γ_{ij}. Н. Н. Яненко

691. Точечные преобразования между двумя пространствами с характеристической гармонической конфигурацией. Мураккини (Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, Serie 3, № 2, 144—152 (итал.)

Рассматривается точечное аналитическое преобразование T между двумя обычными проективными пространствами S_3 и $\bar{S}_3$. Каждой паре соответствующих точек A и $\bar{A}$ сопоставляется касательная коллинеация K так, что для всякой кривой Γ в S_3, проходящей через точку A, ее образы $T\Gamma$ при данном соответствии и $K\Gamma$ при коллинеации имеют вообще в точке A касание первого порядка. В точке A имеются характеристические прямые: если кривая Γ касается в точке A такой прямой, то $T\Gamma$ и $K\Gamma$ имеют в точке $\bar{A}$ геометрическое касание второго порядка. Плоскость, содержащая хотя бы три характеристических направления, является характеристической.

Конфигурация называется гармонической, если она состоит из семи характеристических прямых, исходящих из точки A (или $\bar{A}$), таких, что они могут быть спроектированы в четыре вершины и три точки пересечения ребер плоского четырехгранника.

В такой конфигурации в точке A (или $\bar{A}$) имеется шесть характеристических плоскостей (каждая из них содержит 3 характеристические прямые), проектирующихся в ребра вышеупомянутого плоского четырехгранника.

В настоящей работе изучаются точечные аналитические преобразования T, у которых в каждой паре соответствующих точек имеется гармоническая конфигурация. Доказывается, что в этом случае существует в S_3 ($\bar{S}_3$) шесть семейств ∞^1 характеристических поверхностей, касающихся характеристических плоскостей, проходящих через каждую точку S_3 ($\bar{S}_3$).

Доказывается, что преобразования T, допускающие характеристическую гармоническую конфигурацию, существуют с произволом 12 функций одного аргумента.

Изучаются частные случаи преобразований T: а) если характеристические поверхности являются плоскостями и б) если характеристические кривые являются кривыми W Клейна—Ли. Т. А. Шульман

692. О внутренних инвариантах неголономного пространства. Врэнчану (Asupra invarianţilor intrinseci ai spaţiilor neolonome. Vrănceanu G.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1956, № 11, 9—23 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть

$$ds^\alpha = \lambda^\alpha_i dx^i = 0 \ (\alpha = m+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n) \quad (1)$$

— уравнения неголономного метрического пространства V^m_n, где линейный элемент ds^2 этого пространства задан уравнением

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2 \ (\mathrm{mod}\ ds^\alpha),$$

и ds^h $(h = 1, \ldots, m)$ образуют вместе с ds^α n линейно независимых форм. Внутренними свойствами V^m_n называются свойства, инвариантные относительно группы преобразования пфаффовых форм (1), (2)

$$d\bar{s}^h = c^h_k ds^k + c^h_\alpha ds^\alpha, \ d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\beta ds^\beta, \quad (2)$$

которые сохраняют уравнения V^m_n и его ds^2, поэтому коэффициенты c^h_k удовлетворяют условиям ортогональности

$$c^h_k c^h_l = \delta^k_l. \quad (3)$$

Если система (1) не имеет производной системы, то теорема Хаимовича говорит, что можно привести группу (2) к «жесткой» группе, если ранг системы (1) максимален. Жесткие группы характеризуются условиями $C^h_\alpha = 0$, $C^\alpha_\beta C^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma$, следовательно, это ортогональные группы.

Автор дает новое доказательство теоремы Хаимовича, не пользуясь условиями ортогональности (3), что ему позволяет рассматривать случай, когда система (1) имеет производные системы.

Автор показывает, что в любом случае многообразия V^m_n, имеющем внутреннее значение, можно привести матрицу группы (1), (2) к виду

$$\begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1l} \\ 0 & M_{22} & \ldots & M_{2l} \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{ll} \end{Vmatrix},$$

где матрицы $M_{11}, M_{22}, \ldots, M_{l-1,l-1}$ ортогональны. Полученная группа сохраняет системы, производные от (1), а также некоторые системы, добавленные к производным системам. C. Teleman

693. $\sigma^{n,k}$-процессы и замыкание комплексных аффинных пространств. Крейсиг ($\sigma^{n,k}$ — Prozesse und die Abschließung komplexer affiner Räume. Kreyszig E.), Wiss. Zeitschr. E. M. Arndt-Univ. Greifswald, 1955—56, 5, № 1-2, 151—158 (нем.)

Автор пользуется терминологией своей предыдущей статьи, посвященной модификациям (РЖМат, 1956, 8757). $\sigma^{n,k}$-процесс — это модификация n-мерного комплексно-аналитического многообразия M^n, при которой каждая точка P неприводимого и свободного от особенностей k-мерного множества $N^k \subset M^n$ надлежащим

образом заменяется $(n-k-1)$-мерным комплексным проективным пространством $S^{n-k-1}(P)$. Указанная замена производится так, что комплексная структура остатка $M^n - N^k$ остается неизменной, а возникающее в результате модификации множество $'M^n = (M^n - N^k) \cup 'N$ снова является комплексно аналитическим многообразием. Здесь $'N$ — $(n-1)$-мерное расслоенное пространство; его базой служит N^k, слоями — пространства $S^{n-k-1}(P)$.

Последовательные $\sigma^{n,k}$-процессы используются автором для замыкания n-мерного комплексного аффинного пространства, путем его дополнения до комплексного проективного пространства. Такое замыкание при $n > 1$ возможно не единственным образом, что вытекает из следующей теоремы: Каждое комплексное проективное пространство $S^{(a)} = S^{a_1} \times S^{a_2} \times \ldots \times S^{a_n}$ $\left(\sum_{j=1}^{m} a_j = n;\ a_j \geqslant 1 \right)$ может быть получено из любого другого комплексного проективного пространства $S^{(b)} = S^{b_1} \times S^{b_2} \times \ldots \times S^{b_n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j = n;\ b_j \geqslant 1 \right)$ путем последовательных $\sigma^{n,k}$-процессов. Здесь S^{a_j}, S^{b_j} — комплексные проективные пространства соответствующих размерностей, пространства $S^{(a)}$, $S^{(b)}$ являются их произведениями.

Аналогичная теорема оказывается верной и для действительных проективных пространств.

Б. А. Фукс

694. О некоторых свойствах псевдоэкстензоров. Мира-Фернандиш (Di alcune proprietà dei pseudo-estensori. Mira Fernandes A. de), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, A3, № 2, 317—326 (итал.)

Величины $V^{\alpha i}$ и $W_{\alpha i}$, подчиненные при преобразовании координат следующим законам преобразования:

$$\overline{V}^{\beta r} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha r}}{\partial x^{\varrho i}} V^{\alpha i}, \quad \overline{W}_{\varrho r} = \frac{\partial x^{\varrho i}}{\partial \bar{x}^{\alpha r}} W_{\alpha i},$$

были названы автором контравариантным и соответственно ковариантным псевдоэкстензорами (Portugaliae mat., 1943, 4, 41—51).

Так α-кратное дифференцирование ковариантного вектора W_i по параметру t приводит к псевдоэкстензору

$$W_{\alpha i} = W_i^{\cdot(\alpha)}.$$

Аналогично, исходя из контравариантного вектора V^i, приходим к псевдоэкстензору

$$V^{\alpha i} = \binom{G}{\alpha} V^{i \cdot (G-\alpha)}.$$

Отсюда следует по теореме Кавагути (Kawaguchi), что из экстензора $W_{\alpha i}$ можно получить псевдоэкстензор $\tilde{W}_{\alpha i} = \frac{1}{\binom{G}{\alpha}} W_{(G-\alpha)i}$ и обратно из псевдоэкстензора $\tilde{W}_{\alpha i}$ получаем экстензор

$$W_{\alpha i} = \binom{G}{\alpha} \tilde{W}_{(G-\alpha)i}.$$

Аналогично связаны контравариантные величины.

Автор рассматривает приложение оператора S^H Кавагути к ковариантным и контравариантным псевдоэкстензорам и применяет полученные формулы в некоторых частных случаях. В частности, приведены выражения вектора Эйлера для функции F через псевдоэкстензоры

$$\tilde{F}_{\alpha i} = \frac{1}{\binom{G}{\alpha}} F_{(G-\alpha)i}.$$

Б. Л. Лаптев

695. О некоторых линейных экстензорных уравнениях. Крейг (On certain linear extensor equations. Craig Homer V.), Tensor, 1954, 4, № 1, 40—50 (англ.)

Автор стремится показать, что при решении проблем вариационного исчисления или математической физики определенное эвристическое значение имеет рассмотрение структуры линейных экстензорных уравнений, образованных с помощью естественно выбранных основных для данной проблемы функций.

Выделив основные функции F, Φ, ..., автор строит с помощью дифференцирования их по $x^{(\alpha)i}$ экстензоры $F_{;\alpha a}$, $\Phi_{;\alpha a}$, ... Применяя редуцирование ранга у полученных экстензоров, а также последующее дифференцирование по параметру t, он получает из тензоров дальнейшие первичные экстензоры $F_{\alpha a}$, $\Phi_{\alpha a}$, опираясь на теорему Кавагути

$$W_{\alpha a} = \binom{M}{A} W_a^{\cdot(M-A)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, M).$$

Здесь $\binom{M}{A}$ — биномиальные коэффициенты; W_a — ковариантный вектор; точкой обозначено дифференцирование по параметру t; значение α, по которому суммирование не производится, обозначено A.

Из первичных экстензоров одинакового ранга греческих индексов (в частности, и из тензоров) образуются линейные уравнения с постоянными коэффициентами, одними и теми же при соответственных членах в различных уравнениях.

Далее определяются значения коэффициентов в этих уравнениях — на основе естественных требований, учитывая, что при исчезновении членов тензорного ранга, члены следующего ранга становятся тензорами; при этом иногда вводятся и дополнительные условия, связанные с физическим или геометрическим характером задачи.

Так, в случае изопериметрической проблемы, т. е. при отыскании кривых, для которых $\int F(x, x')\,dt$ достигает экстремума при условии $\int G(x, x')\,dt = K$ (K — фиксированная постоянная), первичные экстензоры основных функций F и G будут

$$F_{;\alpha a},\ F_{\alpha a},\ G_{;\alpha a},\ G_{\alpha a},$$

где $F_{\alpha a}$ (и соответственно $G_{\alpha a}$) определяются так:

$$F_{\alpha a} = \binom{M}{A} F_a^{\cdot(M-A)},$$

причем поскольку $M = 1$, роль тензора F_a играет $F_{;1a}$. Линейные уравнения таковы:

$$AF_{;\alpha a} + BF_{\alpha a} + CG_{;\alpha a} + DG_{\alpha a} = 0 \quad (\alpha = 0, 1). \qquad (1)$$

При $B \neq 0$ находим из уравнения, содержащего тензорные члены ($\alpha = 1$), разделив его на B и учитывая, что эти члены не должны быть связаны, $B = 1$, $A =$

$= -1$, $C = -\lambda$, $D = \lambda$. Полученные значения приводят первое ($\alpha = 0$) уравнение к виду

$$-(F+\lambda G)_{;\,0a} + (F+\lambda G)'_{;\,1a} = 0,$$

т. е. порождают уравнение Эйлера для функции $H = F + \lambda G$, что соответствует правилу λ-множителей Лагранжа.

Таким образом уравнение Эйлера появляется как экстензорное уравнение. Рассматриваемый результат целиком применим к тем проблемам математической физики, формулировка которых аналогична рассмотренной проблеме вариационного исчисления. Примером служит вывод лагранжевых уравнений движения.

В случае многих параметров благодаря применению матричных индексов (РЖМат, 1954, 1802) метод сохраняет свою силу. В виде примера рассмотрена изопериметрическая проблема для кратных интегралов.

Автор применяет далее свой метод для вывода уравнений движения заряженной частицы в теории относительности, полученных ранее Тольманом (Tolman R. C., Relativity, thermodynamics and cosmology. Oxford, New York, 1934). Основными функциями здесь служат:

$$g = (1/2)\, g_{ab} x'^a x'^b; \quad P = P_a x'^a$$

(P_a — четырехмерный потенциал), а исходные уравнения аналогичны (1).

Автор приводит также вывод уравнений Максвелла в пустоте, считая данными уравнения $\nabla \vec{H} = 0$, $\Delta x \vec{E} = -\partial \vec{H}/\partial ct$. Он рассматривает компоненты P_a четырехмерного потенциала как координата точки в «потенциальном пространстве», а координаты x^a и ct как 4 параметра. Б. Л. Лаптев

696. О некоторых линейных экстензорных уравнениях. II. Крейг (On certain linear extensor equations. Paper II. Craig Homer V.), Tensor, 1955, **5**, № 2, 77—84 (англ.)

Продолжая предыдущую работу (реф. 695), автор указывает, что рассмотрение линейных экстензорных уравнений вносит унификацию в решение широкого круга проблем математической физики. Его метод заключается в выделении для данной проблемы естественных основных (базисных) функций и образование из соответствующих им первичных экстензоров линейных уравнений с неопределенными постоянными коэффициентами. Получаемая сверхопределенность устраняется требованием исчезновения уравнений тензорного ранга, что обеспечивает решение, независимое от системы координат.

Рассматриваемый метод как бы предваряет обычную постановку вопроса. Однако полное определение коэффициентов требует нередко привлечения дополнительных условий физического характера. Так, заканчивая определение одного оставшегося неизвестным множителя в уравнениях Максвелла, полученных в цитированной выше работе, автор привлекает преобразования Лоренца, закон действия сил на частицу, двигающуюся в электромагнитном поле и пр.

Метод автора приложен к выводу волнового уравнения идеально гибкой струны и к одномерному осциллятору с трением. Здесь один из неопределенных коэффициентов оказывается переменным. Таким образом, хотя результат получен правильный, возможно, что в случае общих диссипативных систем, как отмечает автор, метод будет нуждаться в пересмотре.

Б. Л. Лаптев

697. Об экстенсивном дифференцировании экстензоров. Таунсенд (On extensive differentiation of extensors. Townsend B. B.), Tensor, 1955, **5**, № 2, 101—110 (англ.)

Крейгом (H. V. Craig) был введен процесс экстенсивного дифференцирования, т. е. образования из абсолютных экстензоров типа $T^{\alpha}_{\alpha a}$ и $T^{\alpha a}_{c}$ ранга 0, . . ., μ экстензоров продолженного ранга 0 . . . $\mu+1$ (Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **53**, 332—342). Этот процесс был построен на основе изучения структуры внутренней (абсолютной) производной экстензора. Он был распространен и на якобиановы экстензоры того же типа (Craig H. V., Guy W. T. (Jr., Amer. J. Math., 1950, **72**, 229—246).

В реферируемой статье экстенсивное дифференцирование развито в применении к более общим типам экстензоров. Оно применено к $E_{\alpha a 3b}$, в частности к экстензору замен (переброски) $g_{\alpha a 3b}$. Установлено, что имеет место обычный закон дифференцирования произведения $A_{\alpha a} B_{3b}$. Далее получены экстенсивные производные от $E^{\alpha a}_{\beta b}$ и $E^{\alpha a 3b}$, причем закон дифференцирования произведений $A^{\alpha a} B_{3b}$ и $A^{\alpha a} B^{3b}$ оказался более сложным.

В заключение показаны пути распространения экстенсивного дифференцирования на экстензоры произвольного ранга, а также рассмотрены свойства производных высших порядков.

Дальнейшие обобщения автор предполагает изложить в следующей работе. Б. Л. Лаптев

698. К. Введение в тензорное исчисление. Рашевский (Wstęp do rachunku tensorowego. Raszewski P. K. (Tłum. z ros. Ruskowski T., Szamkołowicz L.) Warszawa, 1955, 82 S., 8.80 zł) (польск.)

Книга является переводом первого раздела труда П. К. Рашевского «Риманова геометрия и тензорный анализ» (РЖМат, 1954, 3826). Автор считает этот раздел введением, ознакомляющим читателя с основными вопросами тензорного исчисления и его применениями в механике и физике. Поэтому здесь рассмотрен наиболее простой случай: пространство является трехмерным, система координат — прямолинейной и ортогональной. В книге содержится определение тензоров, а также геометрическая и физическая их интерпретация, алгебра тензоров, определение тензорного поля, элементы тензорного анализа, а также применение построенной таким образом теории к некоторым вопросам в области геометрии, гидромеханики и теории упругости. T. Iwiński

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

699. О приводимости однородных римановых пространств. Лихнерович (Sur la réductibilité des espaces homogènes riemanniens. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 7, 640—642 (франц.)

Уточняются и дополняются результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 3484). Основные результаты: 1. Для заданного однородного риманова пространства $V_m = G/H$ с полупростой группой G ограниченная однородная группа голономии V_m не оставляет инвариантным ни одного вектора ($\neq 0$). 2. Всякое односвязное однородное риманово пространство $V_m = G/H$, у которого группа G простая, не компактная, с конечным центром — неприводимо. 3. Всякое однородное кэлерово пространство G/H с простой, компактной группой G — неприводимо. А. С. Феденко

700. О продолженных когомологиях высшего порядка. Сасаяма (On the extended cohomology of higher order. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1954, **3**, № 3, 123—127 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — дифференцируемое многообразие класса C^k ($k \geqslant M+2$), которое предполагается компактным, связным, ориентируемым; $\mathfrak{M}_n^{(M)}$ — соответствующее многообразие инфинитезмальных элементов порядка M. Можно определить p-мерные группы когомологий $\overset{M}{H}_p$ многообразия $\mathfrak{M}_n$ с помощью кососимметрических (экс) ковариантных полей экстензоров, рассматривавшихся автором в предыдущей работе (Tensor, 1952, 2, 36—46), а также группы $\overset{M}{H}_p$, получаемые с помощью полей производных экстензоров Крейга (Craig H. V., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 332—342). Показывается, что группа когомологий $\mathfrak{M}_n$ изоморфны продолженным группам $\overset{M}{H}_p$ (последние поэтому не зависят от M). Имеют место гомоморфизмы: $\overset{(M)}{H}_p \approx \overset{0}{H}_p \to \overset{1}{H}_p \to \ldots \to \overset{M}{H}_p$.

И. З. Розенкноп

701. Нормальные координаты в келеровом пространстве. Сугури, Уэно (Normal coordinates in Kählerian spaces. Suguri Tsuneo, Ueno Seitaro), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1956, A9, № 2, 83—99 (англ.)

В работе вводятся нормальные координаты в окрестности точки келерова пространства и с их помощью доказываются следующие теоремы:

1) В нормальных координатах ζ^α ($\alpha = 1, \ldots, 2n$), определенных в окрестности точки O, фундаментальные дифференциальные формы $\Omega^\alpha(\zeta, d\zeta)$ вполне определяются численными значениями в точке O тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных.

Вектором, перенесенным по симметрии, назовем вектор $X'' = -X'$, если $X \to X'$ при симметрии относительно некоторой точки.

2) Для того чтобы параллельное перенесение вдоль геодезической совпадало с перенесением по симметрии до бесконечно малых третьего порядка включительно, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны был ковариантно постоянен. Из ковариантной постоянности тензора кривизны следует совпадение переноса вдоль геодезической и переноса по симметрии.

Назовем симметрическим келерово пространство, если симметрия относительно любой точки есть изометрическое преобразование.

3) Для того чтобы келерово пространство было симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны был ковариантно постоянным.

Д. В. Беклемишев

702. Об одном неравенстве, относящемся к гармоническим келеровым пространствам. Кути (Sur une inégalité relative aux espaces kählériens harmoniques. Couty Raymond), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 65—67 (франц.)

Риманово пространство называется гармоническим, если для переменной точки M и произвольно фиксированной точки M_0 лапласиан $\Delta_2 s$ зависит только от s, где s означает геодезическое расстояние между M и M_0.

Отсюда следует существование функции $f(\Omega)$, $\Omega = s^2/2$, не зависящей от M_0, удовлетворяющей соотношению

$$\Delta_2 \Omega = f(\Omega).$$

Автор доказывает теорему: Если гармоническое келерово пространство V_{2n} соответствует функции $f(\Omega)$, то последняя удовлетворяет неравенству

$$(-5/2) f'(0) - \frac{n+7}{2(n+1)^2} f^2(0) \geqslant 0,$$

причем равенство достигается только в случае, когда V_{2n} имеет постоянную голоморфическую кривизну, т. е. выполняются соотношения:

$$R_{\alpha\beta^*\gamma^*} = (K/2)(g_{\alpha\beta^*} g_{\gamma\delta^*} + g_{\alpha\delta^*} g_{\gamma\beta^*}),$$

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, n, \quad \alpha^* = \alpha + n, \quad \beta^* = \beta + n.$$

Н. Н. Яненко

703 К. Дифференцируемые многообразия. Рам Жорж де. Перев. с франц. С предисл. П. С. Александрова. М., Изд-во ин. лит., 1956, 250 стр., 10 р. 20 коп.

Дается систематическое изложение глобальной теории дифференцируемых форм на многообразии и гармонических форм на римановом пространстве. В первой главе определяется дифференцируемое многообразие класса C^∞ и доказывается теорема Уитнея о регулярном вложении n-мерного многообразия в евклидово пространство $2n+1$ измерения. Глава вторая посвящена теории дифференциальных форм и дифференцируемых цепей. Здесь даются основы исчисления внешних дифференциальных форм Э. Картана.

В третьей главе, с которой начинается основное содержание книги, дается определение «потока» Ж. де Рама на n-мерном многообразии и изучаются общие свойства «потоков». «Поток» на n-мерном многообразии V определяется, как линейный и непрерывный в смысле Л. Шварца функционал $T[\varphi]$ на векторном пространстве всевозможных форм класса C^∞ с компактными носителями в V. Такое определение «потока» включает в себя, как частные случаи, понятие дифференциальной формы α, отождествляемой с функционалом $\alpha[\varphi] = \int \alpha \wedge \varphi$, топологическое понятие цепи c, отождествляемой с функционалом $c[\varphi] = \int_c \varphi$ а также понятие обобщенной функции, ибо «распределение» Л. Шварца представляет собой «поток» степени нуль.

Здесь же вводятся «двойные потоки», обобщающие «ядра — распределения» Л. Шварца и регуляризирующие операторы, которые позволяют представить любой «поток» в виде предела последовательности форм.

Четвертая глава посвящена определению и исследованию группы гомологий многообразия на основе понятия «потока». Здесь даны полные доказательства теорем, устанавливающих связь между дифференциальными формами и цепями. Тут же доказывается и теорема двойственности Пуанкаре для случая дифференцируемого многообразия.

Последняя, пятая глава, содержит теорию гармонических форм на римановом пространстве. Гармоническая форма определяется здесь, как «поток» T, удовлетворяющий соотношению $\Delta T = 0$, где $\Delta = d\delta + \delta d$ — обобщенный оператор Лапласа, определяемый символами дифференцирования и кодифференцирования. Далее доказывается, что такое определение гармонической формы совпадает с определением Ходжа только в случае компактного пространства. Теорема Ходжа о существовании гармонической формы, имеющей произвольные, наперед заданные периоды относительно заданных гомологически независимых циклов, доказывается сначала для компактных пространств, а затем методом ортогональных проекций в гильбертовом пространстве распространяется на некомпактные пространства. Также и известная теорема Кодаира о разложении любого «потока» на сумму «потока», гомологичного нулю, «потока», когомологичного нулю, и гармонической формы и о единственности такого разложения доказывается как для компактных, так и для некомпактных пространств, причем в последнем случае предполагается

что заданный «поток» является пределом сходящейся в среднем последовательности форм. Далее выводятся формулы, дающие индекс Кронекера пары цепей в виде интегралов, и наконец доказывается аналитичность гармонических форм методом, предложенным Э. Леви.

Книга представляет большой интерес для широкого круга читателей-математиков, так как охватывает значительную, особенно бурно развивающуюся в настоящее время, область современной математики.

В. Г. Леймлейн

704 К. Дифференцируемые многообразия. Рам Жорж де (Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques. Rham Georges de (Publs. Inst. Math. Univ. Nancago, 3), Actual. scient et industr., 1955, № 1222, 196 p.) (франц.)

См. реф. 703 К

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

705. Пространства над альтернионами и их применение к геометрическому истолкованию спинорных представлений движений вещественных неевклидовых пространств. Джавадов М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 149—151

Краткое изложение результатов автора (реф. 713 Д), относящихся к аффинным и проективным пространствам над альтернионами, линейным конгруэнциям в проективных пространствах, образующим модели проективных пространств над альтернионами высшего порядка и применению альтернионных проективных прямых для геометрического истолкования спинорных представлений групп движений вещественных неевклидовых пространств.

Б. А. Розенфельд

706. Гомоморфизмы проективных плоскостей и T-гомоморфизмы тернаров. Скорняков Л. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 169—170

Рассматривается отображение тернара на тернар, дополненный символом ∞, называемое T-гомоморфизмом. Основной результат: если над T-гомоморфными тернарами построены проективные плоскости, эти плоскости гомоморфны (т. е. существует однозначное отображение точек и прямых одной плоскости на, соответственно, точки и прямые другой плоскости, сохраняющее взаимную принадлежность точек и прямых) и если две проективные плоскости гомоморфны и соответствующие друг другу четверки точек этих плоскостей определяют два тернара, эти два тернара T-гомоморфны. Специально рассматривается случай, когда тернар проективной плоскости является телом.

Б. А. Розенфельд

707. О двумерных неевклидовых геометриях. Яглом И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 144

Рассматриваются аналитические методы изучения 9 неевклидовых геометрий на плоскости — проективных мероопределений Кели-Клейна, соответствующих 3 типам мероопределения на прямой и 3 типам мероопределения в пучках прямых. Рассматриваемые методы основаны на применении комплексных, двойных и дуальных чисел. В частности, строится теория кривых постоянной кривизны (циклов) и преобразований Мебиуса и Лагерра во всех 9 геометриях.

Б. А. Розенфельд

708. О введении понятия конгруэнтности в теории линейных пространств. Зенфт (Über die Einführung des Kongruenzbegriffes in der Theorie der linearen Räume. Senft Walter von), Comment math. helv., 1956, 30, № 1, 73—80; № 2, 81—97 (нем.)

В гильбертовой аксиоматике евклидовой геометрии конгруэнтность является одним из основных соотношений, которое не определяется, а описывается аксиоматически. Автор, следуя Р. Неванлинна (Über metrische lineare Räume, I, Ann. Acad. sci. Fenn, 1952, Ser. A, I, 108), исследует конгруэнтность как отношение, которое определяется и строится в аффинной системе. Он исходит из линейного пространства L элементов $a, b, \ldots$ над полем действительных чисел $\alpha, \beta, \ldots$ Выбирается некоторый (не нулевой) элемент e и постулируется, что каждому элементу x соответствует неотрицательное число ξ (называемое нормой и обозначаемое также $|x|$), такое, что $x \cong \xi e$. Конгруэнтностью двух элементов считается равенство их норм. Из двух постулатов: а) если x не нулевой элемент, то $|x| > 0$ и б) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ вытекают следующие свойства конгруэнтности: 1) из $x \cong z$ и $y \cong z$ следует $x \cong y$; для каждого x справедливо $x \cong -x$; 2) из $x \cong y$ следует $\lambda x \cong \lambda y$; 3) из $x \cong \lambda x$ при $\lambda \neq \pm 1$ следует, что x — нулевой элемент; 4) если x — нулевой элемент, то $|x| = 0$. Чтобы метрика была банаховской, т. е. с аксиомой треугольника $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, необходимо и достаточно потребовать выпуклости сферы, т. е. если $|x| = |y|$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то $|\lambda x + (1 - \lambda) y| \leqslant |x|$.

Конгруэнтность углов вводится определением: пусть $x \cong \alpha x'$, $y \cong \beta y'$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), тогда соотношение $[x, y] = [x', y']$ равносильно $x - y \cong \alpha x' - \beta y'$. Ортогональность двух элементов ($x \perp y$) обозначает $x - y \cong x + y$.

Дается проверка гильбертовых аксиом третьей группы. Вводится фундаментальная форма и ортонормированный базис в L_2.

Н. М. Бескин

709. Дважды транзитивные конечные проективные плоскости. Остром (Double transitivity in finite projective planes. Ostrom T. G.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 563—567 (англ.)

Проективная (аффинная) плоскость π называется дважды транзитивной, если для любых двух упорядоченных пар точек (не лежащих на несобственной прямой) A, B и C, D, где $A \neq B$, $C \neq D$, существует коллинеация σ плоскости π такая, что $\sigma(A) = C$, $\sigma(B) = D$. Рассматриваются дважды транзитивные плоскости, содержащие $n + 1$ точку (в афинном случае включая несобственную) на каждой прямой, причем предполагается, что n нечетное и не является квадратом. Такие проективные плоскости оказываются дезарговыми, а аффинные — веблен-веддербернновыми. Если во втором случае хотя бы одно из веблен-веддербернновых тел плоскости удовлетворяет левому дистрибутивному закону или его умножение ассоциативно, то плоскость — дезаргова.

Л. А. Скорняков

710. Пример применения одного формализма: теоремы Симсона, Микеля и Клиффорда. Феликс (Exemple d'utilisation d'un formalisme: théorèmes de Simson, de Miquel, et de Clifford. Félix L.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1956, 35, № 176, 313—318 (франц.)

Высказываются общие соображения о том, что теории, касающиеся различных математических объектов, могут являться моделями одной и той же формальной схемы. Рассмотрим на плоскости полный четырехугольник $ABCD$; a, b, c — стороны, проходящие через A; a', b', c' — соответственно противоположные стороны. Равенства $(a, b(+a', b') = 0$ и $(b, c) + (b', c') = 0$ (скобки обозначают ориентированные углы; равенства подразумеваются по модулю π) означают, что точки A, B, C, D лежат на окружности. Из этих равенств применением формулы Шаля выводится еще четыре. Если же под $a, b, \ldots$ понимать точки, а под (a, b) — векторы, то схема из упомянутых равенств выражает, что точки a', b', c' расположены центрально симметрично точкам a, b, c. Далее автор применяет несколько усложненную аналогичную схему к фи-

гуре, в которой 1, 2, 3, 4 — четыре точки, а 1′, 2′, 3′, 4′ — точки, симметричные им относительно середин сторон некоторого четырехугольника. Различные истолкования этой схемы приводят ко многим геометрическим теоремам, например, если даны четыре прямые, то четыре окружности, описанные около треугольников, образованных этими прямыми по три, проходят через одну точку; если даны пять прямых, то пять точек, существование которых утверждалось в предыдущей теореме, лежат на одной окружности (теорема Микеля), и др.

Н. М. Бескин

711. О бирациональной инвариантности классических групп. Оно (On birational invariance of classical groups. Ono Takashi), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 2, 167—175 (англ.)

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль. Две алгебраические группы G и G', действующие на V, называются бирационально изоморфными, если имеется изоморфизм ρ на V такой, что ρ и ρ^{-1} являются (для G и G' соответственно) рациональными представлениями в смысле Шевалле (Chevalley, Théorie des groupes de Lie, II, Actual. Sci. Ind. Hermann, Paris, 1951). Семейство групп F называется бирационально инвариантным, если содержит любую алгебраическую группу, бирационально изоморфную некоторой группе из F.

Показывается, что при $\dim V > 6$ и $\neq 8$ следующие семейства групп являются бирационально инвариантными: 1) Классические неприводимые группы ($GL(V)$, $SL(V)$, $\mathrm{Sp}(V, f)$, $O(V, f)$), где f — невырожденная форма, определяющая симплектическую или ортогональную группу. 2) Группы, алгебраическая компонента которых есть неприводимая классическая группа. 3) Все классические группы на V.

И. З. Розенкноп

712. Правильные многогранники (соты) в гиперболическом пространстве. Кокстер (Regular honeycombs in hyperbolic space. Coxeter H. S. M.) Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 155—169 (англ.)

Показывается, что если присоединить к обычно рассматриваемым многогранникам также те, у которых бесконечны размеры граней или бесконечно число граней, сходящихся в одной вершине или по грани меньшего числа измерений, то количество правильных многогранников конечного объема в n-мерном гиперболическом пространстве увеличивается при $n = 3$ с 4 до 5, при $n = 4$ с 5 до 7, при $n = 5$ с 0 до 5, при $n \geqslant 6$ их число остается равным нулю. Кроме того, устанавливается, что в n-мерном гиперболическом пространстве при $n = 2$ существует два бесконечных семейства звездчатых правильных многоугольников, при $n = 3$ и $n \geqslant 5$ правильных звездчатых многогранников нет, при $n = 4$ существует 4 таких многогранника. Используются результаты других работ автора, в частности из книги Regular polytopes, 1948, London. Библ. 14 назв.

В. А. Залгаллер

713 Д. Геометрии над алгебрами и их применения к вещественным геометриям. Джавадов М. А., Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н. Б. м. защиты. (Казань), 1956

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

714. Диаметры выпуклых тел. Хаммер (Diameters of convex bodies. Hammer P. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 304—306 (англ.)

Диаметрами выпуклого тела называются те его хорды, каждая из которых имеет наибольшую длину среди всех параллельных ей хорд. Семейство F прямых в пространстве E_n называется простым снаружи, если существует шар S такой, что все прямые $p \in F$ пересекают S и через каждую точку $x \notin S$ (включая бесконечно удаленные точки) проходит одна и только одна прямая $p(x) \in F$, причем $p(x)$ непрерывно зависит от x. Известно (РЖМат, 1953, 1394), что всякое простое снаружи семейство прямых на плоскости является семейством диаметров кривой постоянной ширины. В работе показывается, что при $n \geqslant 3$ это не так, и приводится пример простого снаружи семейства прямых в E_3, не являющегося семейством диаметров никакого выпуклого тела. Ю. Г. Решетняк

715. О параллелограммах и прямоугольниках, которые можно вписать в плоские выпуклые области. Зюсс (Über Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereichen einbeschreiben lassen. Süss Wilhelm), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 338—341 (нем.)

Под выпуклой областью E понимается замкнутое ограниченное выпуклое с внутренними точками множество точек на плоскости. 1) Для всякого направления $\vec{u}$ существует только один вписанный в E со стороной параллельной $\vec{u}$ параллелограмм $P(\vec{u})$ наибольшей площади. 2) При изменении направления $\vec{u}$ параллелограмм $P(\vec{u})$ непрерывно меняется. Среди всех $P(\vec{u})$ имеется по крайней мере один прямоугольник. 3) При заданном направлении $\vec{u}$ всегда существует параллелограмм $P(\vec{u})$ с площадью не менее половины площади области E; $2I(P) \geqslant I(E)$. 4) Для каждого ограниченного выпуклого с внутренними точками трехмерного тела E, обладающего плоскостью симметрии, существует вписанный прямоугольный параллелепипед с объемом не менее $\frac{2}{9}$ объема E. Эта теорема, с другой нижней границей, дана Радзишевским (Radziszewski C., C. r. Acad. sci., 1952, 235, 771—773).

К. С. Сцилард

716. О разбиении выпуклых областей. Плейель (Om delning av konvexa figurer. Pleijel Arne), Nord. mat. tidskr., 1956, 4, № 3, 149—151, 176 (швед.; рез. англ.)

Пусть выпуклая область разбита прямой l, и m — отношение расстояний от l до параллельных l, опорных прямых. Для отношений k и q, в которых l делит площадь и периметр области, доказываются неравенства

$$m^2/(2m+1) \leqslant k \leqslant m^2 + 2m; \quad m/(m+2) < q < 2m+1.$$

Соответственно, для отношений k и q объемов и площадей поверхности при разбиении выпуклого тела плоскостью:

$$m^3/(3m^2+3m+1) \leqslant k \leqslant m^3+3m^2+3m; \; m^2/(2m^2+4m+1) < q < m^2+4m+2.$$

В. А. Залгаллер

717. О хордах, делящих периметр овала на две равные части. Радзишевский (Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale en 2 parties égales. Radziszewski Konstanty), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1954 (1956), A8, 93—96 (франц.; рез. русск., польск.)

Пусть D обозначает диаметр плоского овала R, а d — максимальную хорду, концы которой делят контур овала на две равные части.

Доказывается, что для всякого овала имеет место неравенство $d/D \geqslant 0{,}8$. (Решена задача, поставленная Бернацким; РЖМат, 1956, 1665).

С. И. Зетель

718. О хордах, делящих площадь овала на две равные части. Радзишевский (Sur les cordes qui partagent l'aire d'un ovale en 2 parties égales. Radziszewski Konstanty), Ann. Univ

M. Curie-Skłodowska, 1954 (1956), A8, 89—92 (франц.; рез. русск., польск.)

Пусть D обозначает диаметр плоского овала R, а d — максимальную хорду, делящую площадь овала на две равные части. Доказывается, что для всякого овала имеет место неравенство $d/D > \frac{3}{4}$. (Решена задача, поставленная Бернацким; РЖМат, 1956, 1665). С. И. Зетель

719. Одно общее характеристическое свойство шара. Погорелов А. В., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 203—206

По определению, выпуклая поверхность F допускает сама с собой сильное внутреннее касание, если существует такое положение F' поверхности F, при котором F и F' имеют общую точку, общую внешнюю нормаль в этой точке и для опорных функций $H(n)$, $H'(n)$ этих поверхностей в окрестности точки n_0 единичной сферы выполняется неравенство

$$|H(n) - H'(n)| \geqslant c\,|n - n_0|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная.

Автор доказывает теорему: Замкнутая выпуклая поверхность есть либо шар, либо круговой цилиндр, дополненный двумя полушариями, либо допускает сама с собой сильное внутреннее касание. Отсюда выводится теорема А. Д. Александрова: Если на выпуклой регулярной поверхности F главные кривизны k_1 и k_2 удовлетворяют условию $f(k_1, k_2) = \text{const}$, где f — монотонная по каждому аргументу, то поверхность F — шар. Н. В. Ефимов

720. О контуре выпуклых поверхностей. Медек (O obryse vypuklých plôch. Medek Václav), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 1, 38—42 (словацк., рез. русск.)

В работе уточняется понятие контура выпуклой поверхности. Если из точки S будем проектировать все точки какого-либо выпуклого тела F, то совокупность полученных таким образом лучей назовем «проекцией P тела F».

Проекция P выпуклого тела F является выпуклым телом. Обозначим через Ф и П соответственно ограничивающие поверхности тел F и P.

Действительным контуром поверхности Ф назовем линию пересечения поверхности Ф с поверхностью П. Видимым контуром поверхности P будем называть кривую пересечения поверхности П с плоскостью проекций π. Далее вводится понятие сложной поверхности, образуемой из двух данных выпуклых поверхностей ^{1}Ф и ^{2}Ф, и устанавливаются некоторые свойства сложной поверхности и ее видимого контура. Н. Ф. Четверухин

721. Одна теорема из дифференциальной геометрии овалоидов. Гротемейер (Ein Satz aus der Differentialgeometrie der Eiflächen. Grotemeyer Karl-Peter), Arch. Math., 1955, 6, № 5, 403—407 (нем.)

Доказывается интегральная теорема: Пусть Σ — четырежды непрерывно дифференцируемый овалоид; ∇ — первый оператор Бельтрами; k_1, k_2 — главные кривизны Σ; K и H — гауссова и средняя кривизна; тогда

$$\int\limits_{(\Sigma)}\int S^n \nabla(k_1, k_2)\, do \geqslant 0, \qquad (1)$$

где $S = H^2 - K$ и n — любое целое число $\geqslant 1$. Если в соотношении (1) имеет место знак равенства, то Σ — шар.

Отсюда следует, что если на овалоиде соблюдается неравенство $S \nabla(k_1, k_2) \leqslant 0$, то такой овалоид является шаром. Вместе с тем получаются известные теоремы, согласно которым овалоид при условии $K = \text{const}$, или $H = \text{const}$, является шаром, поскольку вообще из уравнения вида $W(k_1, k_2) = 0$ $\left(\frac{\partial W}{\partial k_1}\frac{\partial W}{\partial k_2} > 0\right)$ следует указанное неравенство. Н. В. Ефимов

722. Некоторые результаты в проблеме вложения двумерных форм постоянной кривизны в пространства постоянной кривизны высшей размерности. Бланушa (Einige Resultate über die Einbettung zweidimensionaler Raumformen konstanter Krümmung in höhere Räume konstanter Krümmung. Blanuša D.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1955, 2, № 2, 57—58 (нем.)

Обозначая через R_n, S_n, H_n, R_∞ n-мерные евклидовы, сферические, гиперболические пространства и пространство Гильберта, автор перечисляет следующие исследованные случаи вложения: а) S_2 в R_3, S_3 и H_3. Эллиптическая плоскость в R_4, S_4 и H_4. б) R_2 в R_3, H_3. Евклидов цилиндр в R_3 и в H_4. Евклидов односторонний цилиндр (бесконечно широкий лист Мебиуса) в R_4, S_4 и H_4. Тор (клиффордова поверхность) в S_3, R_4 и H_4. Бутылка Клейна с самопересечением в R_4, без самопересечения в R_5, S_4, H_5. в) Формы постоянной отрицательной кривизны в R_∞. Гиперболическая плоскость. Цилиндр с гиперболической метрикой. Односторонний цилиндр с гиперболической метрикой.

Последние результаты: 1) R_2 в S_4. 2) Евклидов цилиндр в S_3. 3) Бутылка Клейна (без самопересечения) в R_4, H_4. Н. Н. Яненко

723 К. Изгибание выпуклых поверхностей. Погорелов (Die Verbiegung konvexer Flächen. Pogorelow A. W. Übers. aus dem Russ. (Schriftenreihe Forschungsinst. Math., Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, № 5). Berlin, Akad.-Verl. 1957, 135 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1954, 2341).

724 К. Поверхности ограниченной внешней кривизны. Погорелов А. В., Харьков, Харьковск. ун-т, 1956, 128 стр., 3 р. 25 к.

Монография посвящена исследованию гладких поверхностей (площадь сферического изображения, с учетом кратности, ограничена). Для этих поверхностей вводится понятие абсолютной внешней кривизны. Именно, если G — открытое множество на поверхности, F_s — содержащиеся в G замкнутые множества и $\mu(F_s)$ — площади их сферических изображений, то абсолютной кривизной поверхности на множестве G называется $\sigma^0(G) = \sup \sum_s \mu(F_s)$. Абсолютной кривизной на любом множестве H называется $\sigma^0(H) = \inf \sigma^0(G)$, $H \subset G$, где inf берется по всем открытым множествам G, содержащим H. Тогда x поверхности ограниченной внешней кривизны регулярна, если в достаточно малой ее окрестности нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в точке x. Абсолютная кривизна на множестве нерегулярных точек равна нулю. Регулярные точки подразделяются на эллиптические, гиперболические, параболические и точки уплощения. Точка x эллиптическая, если ее окрестность $U(x)$ на поверхности имеет с касательной плоскостью в x единственную общую точку — точку x. Точка x — параболическая, если касательная плоскость в точке x пересекает поверхность вблизи точки касания по двум простым кривым, — гиперболическая, если пересечение состоит из четырех кривых, и точка уплощения, если пересечение состоит из четного числа кривых, большего четырех. Положительной (отрицательной) внешней кривизной поверхности на множестве H называется

абсолютная кривизна поверхности на подмножестве эллиптических (гиперболических) точек H. Полной внешней кривизной на множестве H называется разность между положительной и отрицательной кривизнами на этом множестве.

Поверхность нулевой кривизны локально изометрична плоскости и имеет прямолинейные образующие со стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей. Полная поверхность нулевой кривизны — цилиндрическая. Если плоскость пересекает поверхность неотрицательной кривизны, то каждая из частей, на которые плоскость разбивает поверхность, с краем, целиком лежащим на этой плоскости, — выпуклая поверхность. Полная поверхность с неотрицательной кривизной и положительной кривизной, отличной от нуля, будет либо замкнутой выпуклой поверхностью, либо бесконечной выпуклой поверхностью. Поверхности ограниченной внешней кривизны суть многообразия ограниченной внутренней кривизны в смысле А. Д. Александрова, и для них определены понятия внутренней положительной (ω^+), отрицательной (ω^-) и полной (ω) кривизны, причем для любого борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны

$$\omega^+(H)=\sigma^+(H),\quad \omega^-(H)\geqslant\sigma^-(H),\quad \omega(H)\leqslant\sigma(H).$$

Но существует открытое множество G, содержащее все регулярные точки поверхности, такое, что для любого борелевского множества H из G $\omega^+(H)=\sigma^+(H)$, $\omega^-(H)=\sigma^-(H)$, $\omega(H)=\sigma(H)$. Это позволяет автору в некоторых случаях сделать заключения о форме поверхности ограниченной внешней кривизны по данным, относящимся к ее внутренней метрике. Именно, поверхность локально изометричная плоскости — линейчатая, со стационарной касательной плоскостью вдоль образующей. Поверхность с неотрицательной внутренней кривизной и краем, лежащим в плоскости — выпуклая. Полная поверхность с неотрицательной, но не равной нулю внутренней кривизной либо замкнутая, либо бесконечная выпуклая.

Для построения содержательной теории гладких поверхностей требование ограниченности внешней кривизны является естественным: если ограничиться только требованием гладкости, то в трехмерном евклидовом пространстве будет существовать замкнутая поверхность без самопересечений, гомеоморфная тору и локально изометричная плоскости. Я. П. Бланк

См. также: 51, 91, 181, 213, 238, 239

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

725. Приложение теории возмущений к задаче о колебаниях балки. Беляева Г. М., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 1, 11—21

Решается задача о колебаниях невесомой прямолинейной балки с шарнирными опорами на концах и неравномерным распределением масс, сводящаяся к отысканию собственных значений и векторов конечно-разностного уравнения четвертого порядка, с переменными коэффициентами. Система, составленная из указанного уравнения и краевых условий для него, в матричной форме записывается так:

$$(A-\lambda B)\,\bar{x}=0, \tag{1}$$

где $\bar{x}$ — матрица-столбец $(n-1)$-го порядка, или $(n-1)$-мерный амплитудный вектор

$$x=\begin{Vmatrix} M_1\\ M_2\\ \vdots\\ M_{n-1}\end{Vmatrix},$$

A и B — симметричные матрицы наклонных рядов $(n-1)$-го порядка

$$A=\begin{Vmatrix} a_1-b_1 & c_1 & 0 & 0 & .\\ -b_1 & a_2-b_2 & c_2 & 0 & .\\ c_1-b_2 & a_3-b_3 & c_3 & . & .\\ 0 & c_2-b_3 & a_4-b_4 & . & .\\ 0 & 0 & c_3-b_4 & a_5 & .\\ . & . & . & . & .\end{Vmatrix},$$

$$B=\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & .\\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & .\\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & .\\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 & .\\ . & . & . & . & .\end{Vmatrix},$$

(точки расположения масс делят балку на n участков, M_k — амплитуда изгибающего момента в k-ом сечении, коэффициенты a, b, c, α, β выражаются через параметры балки).

Исходя из того, что в этом случае собственные частоты мало отличаются от собственных частот «равномерной» балки, автор применяет для «приближенного решения задачи классический метод возмущений. Параметр возмущения ε вводится так:

$$A-\lambda B=A_0-\lambda B_0+\varepsilon\,(A_1-\lambda B_1), \tag{2}$$

что при $\varepsilon=0$ приводит к конечно-разностному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами («невозмущенное» уравнение для «равномерной» балки). Решение «невозмущенной» задачи получается непосредственно, причем собственные значения — только простые. Предполагается, что искомые собственные значения и векторы допускают разложение по степеням параметра ε:

$$\bar{x}=\bar{x}_0+\varepsilon\bar{x}^{(1)}+\varepsilon^2\bar{x}^{(2)}+\ldots+\varepsilon^k\bar{x}^{(k)}+\ldots, \tag{3}$$

$$\lambda=\lambda^{(0)}+\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\ldots+\varepsilon^k\lambda^{(k)}+\ldots. \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) и (4) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, автор получает систему уравнений последовательных приближений.

В работе применяется в несколько видоизмененном виде схема, предложенная Курантом и Гильбертом

(«Методы математической физики», 1951, **1**, стр. 292) для отыскания по методу возмущений собственных значений и собственных функций линейного самосопряженного дифференциального уравнения для данной области и заданных краевых условий. Решены примеры. Дано доказательство сходимости процесса получения последовательных приближений. Д. Б. Тополянский

726. О решении краевых задач на непрерывных устройствах, предназначенных для решения задачи Коши. Обувалин М. И., Этерман И. И., Инженерный сб., 1956, **23**, 203—213

Авторы рекомендуют использовать устройство непрерывного действия, дающее решение задачи Коши линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения граничных задач, относящихся к этим же уравнениям.

Первый способ заключается в построении нормальной фундаментальной системы решений данного дифференциального уравнения с помощью устройства непрерывного счета, с последующим использованием найденной системы для решения граничной задачи.

Второй способ заключается в замене дифференциального уравнения и граничных условий разностными уравнениями. Устройство непрерывного действия используется для решения разностных уравнений, представляющих собой систему линейных алгебраических уравнений.

Для решения системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

на непрерывном устройстве решается система дифференциальных уравнений

$$dy_i/dt = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}s_i y_k + s_i b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Если система (1) имеет собственные значения с положительными вещественными частями, то вариацией параметров s_i на устройстве все же можно достигнуть устойчивости решения системы (2). Установившиеся значения $y_k(t)$ при $t \to \infty$ дают решение системы (1). Новое в статье — введение множителей s_i для достижения устойчивости системы (2). В работе нет практических указаний для подбора s_i. Т. И. Маруашвили

727. О численном решении дифференциальных уравнений второго порядка с некоторыми условиями. Адати (On the numerical solution of the second order differential equation under some conditions. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1954, **AI**, № 3, 14—33 (англ.)

Речь идет об интегрировании уравнения $y'' = f(x, y, y')$ с дополнительными условиями (пересечение решения $y = y(x)$ в двух данных точках с двумя данными кривыми) методом последовательных приближений. Сходимость процесса не рассмотрена.

728. К вопросу о числе арифметических действий при решении уравнения Пуассона для квадрата методом конечных разностей. Бахвалов Н. С., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 2, 252—254

Излагается новый метод решения системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при использовании метода сеток для уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \; u|_\Gamma = \varphi(x, y)|_\Gamma.$$

В случае квадратной области, сторона которой разделена на $N = 2^s$ частей, для получения точного решения упомянутой системы метод требует $\mathrm{const} \times N^2 \ln N$ арифметических действий — меньше, чем метод верхних релаксаций Янга (РЖМат, 1955, 1953), требующий $\mathrm{const} \cdot N^3 |\ln \varepsilon|$ действий для получения решения с точностью до ε, и чем метод Дугласа и Ракфорда (РЖМат, 1957, 4377), требующий $37N^2 \ln N |\ln \varepsilon|$ действий.

Метод автора требует знания функций Грина сеточных аналогов задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона для квадратных областей $0 \leqslant i, j \leqslant 2^r$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$; точнее из $\sim N^4$ значений функций Грина достаточно знать $\sim 2N^2$ значений.

Чтобы решить задачу Дирихле для сеточного аналога уравнения Лапласа в квадрате $0 \leqslant i, j \leqslant 2^s$, надо с помощью функции Грина вычислить значения решения в точках сетки, лежащих на прямых $i = 2^{s-1}$ и $j = 2^{s-1}$, делящих квадрат на 4 равных квадрата. Затем, пользуясь функцией Грина для квадрата со стороной 2^{s-1}, надо вычислить значения решения на прямых, делящих каждый из полученных квадратов на 4 части, и т. д., пока не получим решение во всех точках сетки.

Уравнение Пуассона в квадратной области решается несколько более сложным образом. Показано, что при вычислении решения этим способом не происходит потери значащих цифр. Указывается, что в случае областей произвольного вида можно, произведя $\mathrm{const}\, N^2 \ln N$ действий, свести разностное уравнение Пуассона к такому же уравнению Лапласа (N — число точек сетки в стороне описанного квадрата).

А. Ф. Филиппов

729. Аппроксимация четвертого порядка при численном решении систем вращения. Дюран (L'approximation du quatrième ordre dans le calcul numérique des systèmes de révolution. Durand Emile), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 19, 2355—2358 (франц.)

Выводится конечноразностная формула для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi(r, z) = f(r, z), \qquad (1)$$

где r, z — цилиндрические координаты, с приближением 4-го порядка относительно шага h квадратной сетки. Формула получается путем соответствующего комбинирования разложений в ряд Тейлора функции $\psi(r, z)$ в восьми ближайших узлах, окружающих произвольный центральный узел, и выражений, полученных дифференцированием необходимое число раз уравнения (1). Даны, в частности, выражения коэффициентов для $k = 1$ и $k = -1$.

Приводится также формула для узлов, лежащих на оси z, которая в случае $f = 0$ совпадает с формулой, полученной референтом для $k = 1$ (РЖМат, 1957, 5931). Д. Ф. Давиденко

730. Замечание к численному решению краевых задач для уравнения Лапласа и бигармонического уравнения методом бесконечных систем. Бондаренко (Зауваження до чисельного розв'язування крайових задач рівняння Лапласа і бігармонічного рівняння методом нескінченних систем. Бондаренко П. С.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1954, **13**, № 8, 39—49 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается решение краевых задач для уравнения Лапласа и бигармонического уравнения методом бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Решается вопрос о сходимости метода последовательных приближений для системы, к которой сводится задача о деформации прямоугольной пластинки с закрепленными краями, при помощи предложенного автором ранее метода установления единственности ограниченных решений для бесконечных систем. Соответствующая бесконечная система преобразуется в регулярную систему, для этой последней строится

мажорантная система и доказывается, что она имеет главное решение, откуда и следует единственность решения исходной бесконечной системы.

Аналогичным образом доказывается также сходимость метода последовательных приближений для бесконечной системы, соответствующей граничной задаче о разыскании гармонической функции в единичном круге при смешанных граничных условиях.

Дается обоснование применения метода лимитант Кояловича к численному решению бесконечной системы для случая прямоугольной пластинки с закрепленными краями. Д. Ф. Давиденко

731. Моделирование в электролитической ванне некоторых частных случаев уравнения Пуассона. Табакс К. К., Latv. PSR zinātņu akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1956, № 4, 145—148 (рез. лат.)

Решение граничной задачи для уравнения Пуассона $\nabla^2 u = f$ сводится к решению граничной задачи для уравнения Лапласа, если f постоянная или $f = (\nabla\varphi)^2$, где φ удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0$. Для решения уравнения Лапласа автор рекомендует пользоваться электролитической ванной. Т. И. Маруашвили

732. Решение бигармонической проблемы в бесконечной полосе. Бабушка (Řešení biharmonického problému v nekonečném pásu. Babuška Ivo), Apl. mat., 1956, 1, № 1, 34—43 (чешск.; рез. русск., нем.)

Решается бигармоническая проблема для бесконечной полосы при помощи функции Грина.

Бигармоническая проблема в бесконечной полосе $Q\ (-\infty < x < \infty,\ |y| < \pi/2)$ заключается в нахождении функции $U(x, y)$, определенной на Q, и обладающей следующими свойствами:

1) $\Delta\Delta U = 0$ во всех точках полосы Q.

2) $|\partial U(x, y)\,\partial x| < C\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}m}$, $|\partial U(x, y)/\partial y| < C\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}m}$, $m < \infty$, $C < \infty$.

3) Функции $U(x, y)$ и $\partial U(x, y)/\partial y$ могут быть на границе непрерывно продолжены и $U\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = f(x)$, $\partial U/\partial y\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = \pm g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — наперед заданные функции.

Главным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции такие, что

$$|f(x)| < C\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}n}, \quad |g(x)| < C\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}n}.$$

Тогда существует единственное решение $U(x, y)$ бигармонической проблемы, для которого имеет место

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,G_1(\xi - x, y)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,G_2(\xi - x, y)\,d\xi;\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\left(-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi\right).$$

Несобственные интегралы существуют в обычном смысле. Функции $G_1(x, y)$ и $G_2(x, y)$ удовлетворяют равенствам

$$G_i(x, y) = \frac{\partial^2 H_i(x, y)}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2),$$

где $H_i(x, y)$ есть решение бигармонической проблемы с краевыми условиями:

$$H_1\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0 \\ x & \text{для } x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\partial H_1/\partial y\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = 0,$$

$$H_2\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = 0,$$

$$\partial H_2/\partial y\left(x, \pm\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ \pm x & \text{для } x \geqq 0. \end{cases}$$

Приведены графики функций $G_1(x, y)$ и $G_2(x, y)$ и разъяснен их физический смысл.

Доказательство теоремы будет дано в следующей части этой статьи, где будет описан также приближенный метод вычисления функций Грина, доказана сходимость и произведена оценка ошибки. K. Rektorys

733. К решению системы дифференциальных уравнений теории упругости методом конечных разностей. Скворцов В. С., Науч. зап. Львовск. торгово-экон. ин-та, 1956, вып. 2, 199—207

Автор распространяет метод Куранта-Фридрихса-Леви доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных разностей на решение системы дифференциальных уравнений теории упругости в трехмерном пространстве в случае заданных на границе перемещений.

Пусть функции $U_h^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ являются решением соответствующей системы разностных уравнений. Доказывается при помощи теоремы Арцела, что функции $U_h^{(i)}$ при $h \to 0$ (h — шаг решетки) стремятся к решению поставленной краевой задачи, а их разностные отношения любого порядка сходятся равномерно к соответствующим частным производным точного решения $U^{(i)}$. Для доказательства ограниченности и равностепенной непрерывности функций $U_h^{(i)}$ и их разностных отношений строится вспомогательная гармоническая функция. Доказывается также единственность решения разностной задачи. Указывается, что доказательство удовлетворения краевому условию может быть проведено так же, как это сделано у Куранта, Фридрихса, Леви, путем замены этого условия некоторым ослабленным требованием.

Отмечается, что погрешность при замене рассматриваемой системы дифференциальных уравнений разностными уравнениями, выраженными через односторонние разностные отношения, имеет порядок h, а при использовании центральных разностных отношений погрешность будет порядка h^2. Д. Ф. Давиденко

734. Применение метода сеток к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных. Скворцов В. С., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 1, 20—23

Доказывается существование и единственность конечноразностного решения первой краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, с постоянными коэффициентами эллиптического типа, в n-мерном пространстве. Правые части уравнений и граничные условия предполагаются непрерывно дифференцируемыми в области и на границе. В доказательстве используется полученное автором одно неравенство для вектор-функции, определенной на решетке, с по-

условие устойчивости: $4l^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{h_k^2} \leqslant 1$, где l — шаг сетки по t, h_k — шаг по x_k. В § 3 рассматривается тот же вопрос в случае уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 + a^2(x, t)\,\partial^4 u/\partial x^4 = 0$, где функция $a^2(x, t)$ ограниченной вариации по t на интервале $0 < t < \infty$.

На стр. 30 из равномерной ограниченности элементов неособенных матриц T_s ($s = s_0, s_0+1, \ldots$) автор ошибочно выводит равномерную ограниченность элементов обратных матриц T_s^{-1}. Из-за этого полученный в конце § 3 результат не может считаться обоснованным. Кроме того, первое утверждение теоремы 5 ошибочно, так как в случае кратных характеристических чисел λ_k решение x_s может быть неограниченным. Опечатки: в уравнении (20) вместо a_1 и a_2 надо a_1^2 и a_2^2; на стр. 28, строка 4 сверху, перед знаком Σ вместо 2 надо 4; есть и другие.

А. Ф. Филиппов

739. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, **50**, 66 стр., илл.

Дан численный метод и приведены результаты решения сферически-симметричной задачи о точечном взрыве в газе при наличии конечного начального давления в газе p_1 (о постановке задачи см. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, М., 1954, стр. 172). Во введении дается краткий обзор существующих результатов. Отмечается, что рассматриваемая задача была численно решена в работе Голдстайна и Неймана (Comm. Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 2, 327—354) и работе Броуда (РЖМат, 1957, 5939). Примененные в этих работах численные методы существенно отличаются от метода авторов.

Вводятся новые переменные φ, ψ, θ, связанные с безразмерными величинами скорости, давления и плотности. В этих переменных система уравнений, описывающая адиабатические движения газа, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \lambda + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \lambda + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^2 \theta^2}{\xi^2} \left[\frac{\gamma - 1}{4\sqrt{\gamma}} (\varphi + \psi) \right]^{\frac{2}{1-\gamma}} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \qquad (4)$$

где τ — безразмерное время, σ — безразмерная лагранжева координата, ξ — безразмерная эйлерова координата, γ — показатель адиабаты, λ, μ, ν — известные функции от θ, φ, ψ, ξ, σ.

Для решения задачи следует определить зависимость радиуса ударной волны от времени и найти решение системы (1)—(4) с граничными условиями на фронте ударной волны, т. е. при $\xi = \sigma$:

$$\varphi - \psi = \frac{u}{\gamma + 1} \frac{c^2 - \gamma}{c\theta}$$

$$\theta = \left[\frac{2}{\gamma - 1} \right] \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \left[c^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \left[1 + \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)\, c^2} \right]^{-1/2}$$

$$\left[\frac{\gamma - 1}{4\sqrt{\gamma}} (\varphi + \psi) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} = \frac{2}{\gamma + 1} \left[c^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \right]$$

где c — скорость ударной волны, и условием в центре взрыва: $\varphi(\tau, 0) = \psi(\tau, 0)$. Необходимо также задать начальные условия при $\tau = \tau_0$. Считая τ_0 достаточно малым, авторы в качестве начальных данных берут автомодельное решение Л. И. Седова (случай $p_1 = 0$).

В § 3 дан численный метод решения задачи. Система (1)—(4) заменяется разностной системой. Для разностной сетки шаг по координате σ связан с шагом по τ соотношением $\Delta\tau = \Delta\sigma/c$. Это обеспечивало прохождение ударной волны через узел счетной сетки. С ростом времени τ шаги $\Delta\sigma$ и $\Delta\tau$ менялись.

Для получения разностной системы, по которой велся расчет внутри области между центром и волной частные производные заменялись конечными разностями по схеме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i+1}^{n+1} - (\varphi_i^n + \varphi_i^{n+1})}{2\Delta\sigma_{i,\,i+1}};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i+1}^{n+1} - (\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n)}{2\Delta\tau_{i,\,i+1}}$$

где n — номер ряда, $\tau = \text{const}$, i — номер точки σ_i на этом ряду. Так как при $\sigma = 0$ уравнения (1)—(4) имеют особенность, то для расчета вблизи центра применялись специальные асимптотические формулы. Для расчета характеристик на волне также применялся особый метод. Для контроля точности счета использовался критерий совпадения лагранжевой и эйлеровой координаты на ударной волне, а также контроль, вытекающий из закона сохранения энергии.

В § 4 приведены результаты расчетов для $\gamma = 1{,}4$. Начальные данные были заданы из автомодельного решения при $\tau = 0{,}00037119$, $p_2/p_1 = 1743{,}3$ (p_2 — максимальное давление). Расчет был доведен до $\tau = 17{,}829$, $p_2/p_1 = 1{,}0078$. Контроль точности по совпадению координат дал максимальную относительную погрешность $0{,}14\%$, а контроль по энергии — ошибку порядка $0{,}65\%$.

На 22 рисунках даны графики, описывающие зависимость решения от координат ξ, σ и от времени τ. Численные значения зависимостей основных величин приведены в 9 таблицах в конце работы. Расчеты были произведены на быстродействующей электронной счетной машине АН СССР. Библ. 7 назв.

В. П. Коробейников

740. Численные методы интегрирования гиперболических дифференциальных уравнений. Голдстайн (Numerical procedures for the integration of hyperbolic partial differential equations. Goldstine Herman H.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 180—181, 223 (англ.; рез. нем.)

На примерах классического явного сеточного уравнения и неявного уравнения вида

$$\frac{u_{i,\,k-1} - 2u_{i.\,k} + u_{i,\,k+1}}{l^2} = \frac{\alpha}{h^2} [u_{i-1,\,k+1} - 2u_{i,\,k+1} +$$

$$+ u_{i+1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1} - 2u_{i,\,k-1} + u_{i+1.\,k-1}] +$$

$$+ \frac{1 - 2\alpha}{h^2} (u_{i-1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i+1,\,k})$$

излагается известный метод Неймана для исследования устойчивости разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

741. К вопросу сходимости приближенных методов. Нечепуренко М. И., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 704—706

Рассматривается метод решения уравнения $\varphi(x)=0$ с помощью итеративной формулы

$$x_{n+1}=x_n-\Delta(x_n) \qquad (1)$$

Для исследования сходимости процесса автор предлагает подобрать уравнение $\psi(x)=0$ так, чтобы применение к нему метода Ньютона (начиная с x_0) приводило к той последовательности x_n, что и формула (1). Это приводит к функциональному уравнению $[\psi'(x)]^{-1}\psi(x)=\Delta(x)$ и в случае вещественных уравнений позволяет определить $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\exp\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}.$$

Так как для метода Ньютона окончательные оценки сходимости известны, то таким путем находятся неулучшаемые оценки для процесса (1). М. К. Гавурин

742. Полиномиальные аппроксимации функций Бесселя нулевого и первого порядков и некоторых связанных с ними функций. Хитчкок (Polynomial approximations to Bessel functions of order zero and one and to related functions. Hitchcock A. J. M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 58, 86—88 (англ.)

Приведены полиномы 10—20 порядков, аппроксимирующие различные функции Бесселя и комбинации этих функций с погрешностью $\approx 10^{-9}$. Коэффициенты полиномов выписаны с десятью знаками. Эти полиномы предназначены для вычисления функций Бесселя на больших электронных вычислительных машинах.

В. К. Саульев

743. О линейной интерполяции метеорологических элементов в двух измерениях. Гандин Л. С., Тр. Гл. геофиз. обсерв., 1957, вып. 71, 163—168

744. Метод получения формул численного дифференцирования. Грегори (A method for deriving numerical differentiation formulas. Gregory R. T.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 2, 79—82 (англ.)

Излагается известный метод неопределенных коэффициентов для получения приближенных формул вида

$$d^k y_i/dx^k=h^{-k}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}^{ks}y_j+O(h^s), \qquad (1)$$

где $y_i=y(x_0+ih)$. Разлагая y_i по формуле Тейлора в окрестности точки x_0+ih с остаточным членом $O(h^{k+s})$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получаем для определения A_{ij}^{ks} ($j=0, 1, \ldots, n$) систему уравнений

$$\sum_{j=0}^{n}(j-i)^m A_{ij}^{ks}=k!\delta_{mk}\ (m=0, 1, \ldots, k+s-1),$$

где $\delta_{mk}=0$ $(m\neq k)$, $\delta_{kk}=1$. Система разрешима при

$$n\geqslant k+s-1. \qquad (2)$$

Автор не указывает, что в отдельных случаях формула вида (1) может иметь более высокий порядок точности, чем следует из неравенства (2). Так, для формулы

$$d^2y_1/dx=h^{-2}(y_0-2y_1+y_2)+O(h^2)$$

имеем $n=2$, $k=2$, $s=2$. А. Ф. Филлиппов

745. О квадратурных формулах Гаусса. Смирнов В. Н., Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 235—245

Если f $2n$ раз непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, остаток $R(f)$ квадратурной формулы Гаусса $\int_{-1}^{1}f\,dx=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)+R(f)$ представим в форме $R(f)=\int_{-1}^{1(2n)}f(x)K_{2n}(x)\,dx$, где $K_{2n}(x)$ не зависит от f. Строятся два разложения $R(f)$ такого рода, что прибавление нескольких членов их к квадратурной сумме позволяет, в некоторых случаях, значительно увеличить точность вычисления интеграла. Первое из разложений формально может быть получено путем замены в выражении для $R(f)$ производной $f^{(2n)}$ ее представлением по формуле Тейлора. Построение второго основано на более сложных идеях.

Работа продолжает прежние исследования автора (РЖМат, 1956, 6152). Приведены примеры.

В. И. Крылов

746. Вычисление интегралов преобразования Фурье. Хэруиц, Цвейфель (Numerical quadrature of Fourier transform integrals. Hurwitz H., Jr., Zweifel P. F.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 55, 140—149 (англ.)

Рассмотрены интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)\sin kx\,dk=S(x) \qquad (1а)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k)\cos kx\,dx=C(x). \qquad (1в)$$

Интегралы $\int_{0}^{\infty}\varphi(k)\sin kx\,dx$ и $\int_{0}^{\infty}\psi(k)\cos kx\,dx$ преобразуются к ним путем нечетного продолжения φ и четного продолжения ψ на отрезок $(-\infty, x)$. Для приведения (1а) и (1в) к интегралам по конечному отрезку с положительной весовой функцией в них выполняются замены переменных соответственно

$$y=\frac{kx}{\pi}-\frac{1}{2}\ \text{и}\ u=\frac{kx}{\pi};\ S(x)=\frac{\pi}{2x}\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi y\,\sigma(y, x)\,dy,$$

$$C(x)=\frac{\pi}{2x}\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi y\,\gamma(y, x)\,dy,$$

где

$$\sigma(y, x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\varphi\left(\frac{\pi}{x}\left[y+n+\frac{1}{2}\right]\right)^{-1/2},$$

$$\gamma(u, x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\psi\left(\frac{\pi}{x}[u+n]\right)$$

$\sigma(y, x)$, так же как и $\gamma(y, k)$, обладает свойствами: а) $\sigma(y, x)=\sigma(-y, x)$, б) $\sigma(y+n, x)=(-1)^n\sigma(y, x)$, и является нечетной функцией $\cos\pi y$. Поэтому $\sigma(y, x)$ представима в форме $\sigma(y, x)=\cos\pi yF(\cos^2\pi y)$, где F есть некоторая гладкая функция, если φ является достаточно гладкой, (1а) и (1в) приводятся к виду $\int_{-1/2}^{1/2}\cos^2\pi yF\,dy$. К этому интегралу применяются формулы механических квадратур наивысшей степени точности. При этом, многочлены $T_n(\cos\pi y)$ (соответствующие функции F), ортогональные по весу $\cos^2\pi y$ на $[-1/2, 1/2]$, легко выражаются через полиномы Чебышева 1-го рода.

Приведены указания о порядке вычислений и некоторые соображения об оценке погрешности. Дан пример вычислений.

В. И. Крылов

747. Приближенное вычисление сумм отрезков ряда Фурье. Фрумкин П. Б., Тр. Ленингр. ин-та авиац. приборостр., 1956, вып. 14, 71—78

Сумма первых $2k+1$ членов ряда Фурье функции $f(x)$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ представляется в интегральном виде

$$s_k(x) = \int_0^{\pi/2} f(x-2z)\frac{\sin(2k+1)z}{\sin z}dz + \int_0^{\pi/2} f(x+2z)\frac{\sin(2k+1)z}{\sin z}dz.$$

Оба интеграла имеют форму

$$\int_a^b F(z)\sin(2k+1)zdz,$$

где $F(z)$ имеет особенности. Интегралы вычисляются интерполяционным методом, рассмотренным М. В. Николаевой (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28) с предварительным ослаблением особенности функции $F(z)$ при помощи способа, близкого к указанному Л. В. Канторовичем (Матем. сб., 1934, 41, 2).

В. И. Крылов

748. Может ли быть численное интегрирование точным? О'Бэрн (Can numerical integration be exact? O'Beirne Thos. H.), Math. Gaz., 1957, 41, № 335, 59—60 (англ.)

Формула

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = (\delta x)\left[\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) - \frac{1}{12}(\mu\delta f_n - \mu\delta f_0) + \frac{11}{720}(\mu\delta^3 f_n - \mu\delta^3 f_0)\ldots\right]$$

в случае, если интегрируемая функция $f(x)$ симметрична относительно пределов интегрирования (и, следовательно, периодична), как, например, $F(\sin^2 x)$ для $x_0 = 0$ и $x_n = \pi/2$, превращается в обычную формулу трапеций, которая в некоторых случаях является точной.

В. К. Саульев

749. Векторный метод для решения линейных уравнений и обращения матриц. Рот, Скотт (A vector method for solving linear equations and nverting matrices. Roth J. P., Scott D. S.), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 3, 312—317 (англ.)

Основу предлагаемого векторного метода составляет лемма: если X — подпространство пространства V, натянутое на векторы $u_1, \ldots, u_m$, и вектор E $(E \subset V)$ не ортогонален u_1, то векторы $v_i = u_1(u_i E) - u_i(u_1 E)$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ образуют базис подпространства Y $(Y \subseteq X)$, ортогонального E.

Задача решения системы n линейных уравнений рассматривается как задача нахождения базиса из $(n+1)$-мерных векторов, у которых $(n+1)$-я компонента равна 1, образующих подпространства, ортогональное к подпространству, натянутому на векторы, образованные строками расширенной матрицы системы. При решении отправляются от пространства X, образованного $n+1$ $(n+1)$-мерными ортогональными единичными векторами. По лемме находят базис подпространства X_1 $(X_1 \subseteq X)$, ортогонального 1-й строке расширенной матрицы. Затем находят базис подпространства X_2 $(X_2 \subseteq X_1)$, ортогонального первым двум строкам расширенной матрицы и т. д., пока не получится или вектор решения, или базис пространства решений, или, если система несовместна, вектор или базис с последними компонентами, равными нулю. Описывается применение этого метода к обращению матриц.

Достоинством метода является удобство реализации на вычислительных машинах и малое количество требуемых делений (n раз в конце счета). Существенным недостатком является большое количество требуемых умножений ($5n^3$ для обращения матрицы). А. П. Ершов

750. Матрицы. II. Решение систем уравнений. Уэбб (Matrices. II. Solution of simultaneous equationst. Webb John), Electr. Rev., 1956, 159, № 9, 397—400 (англ.)

Часть I см. Electr. Rev., 1956, 159, № 6, 237—240. Формулируется задача нахождения обратной матрицы Без доказательства рекомендуется формула

$$a^{-1} = \frac{1}{|a|}adja,$$

где $adja$ — союзная к a матрица. Указанный способ применен для решения конкретных электротехнических задач.

Е. Н. Деканосидзе

751. Обращение матриц разбиением на клетки. Коско (Matrix inversion by partitioning. Kosko Eryk), Aeronaut. Quart., 1957, 8, № 2, 157—184 (англ.)

Подробное описание известного метода обращения матриц методом разбиения на клетки (субматрицы). Приводятся общие вычислительные формулы для случая четырех и девяти субматриц, а затем выводятся формулы для некоторых специальных случаев, в частности: 1) для клеточной матрицы «якобиева» типа (отличные от нуля субматрицы расположены лишь на трех диагоналях — на главной и двух к ней соседних), 2) для матриц, разбиение которых на субматрицы обладает различными видами симметрии.

Сравнивается число арифметических операций при методе разбиения на клетки и методе исключения. В заключение, действия, производимые по выведенным формулам, интерпретируются в терминах элементарных преобразований, приводящих исходную клеточную матрицу к диагональной клеточной матрице.

А. П. Ершов

752. Метод сокращенной итерации для определения собственных чисел и собственных векторов матриц и для определения корней полинома. Бауэр (Das Verfahren der abgekürzten Iteration für algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms. Bauer Friedrich L.), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 1, 17—32 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается способ улучшения сходимости итеративного процесса определения корней полинома или собственных чисел матрицы, основанного на идеях Бернулли и Лагранжа.

Обычный итеративный метод заключается в следующем: Пусть $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$, где $a_0 = 1$, имеет вещественные или комплексные корни $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; причем $|\xi_1| \geqslant |\xi_2| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_r| \geqslant |\xi_{r+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_n|$. Для определения ξ_r строится последовательность полиномов $(n-1)$-й степени

$${}^rQ^{(i+1)}(x) = xQ^{(i)}(x) - a_i P(x),$$

где a_i — коэффициент при x^{n-1} в ${}^rQ^{(i)}(x)$, а ${}^rQ^{(0)}(x) = Q(x)$ — произвольный полином, удовлетворяющий условию

$$Q(\xi_1) = Q(\xi_2) = \ldots = Q(\xi_{r-1}) = 0;\ Q(\xi_r) \neq 0.$$

Если $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$, то при $i \to \infty$ ${}^rQ^{(i+1)}(x) - \xi_r {}^rQ^{(i)}(x) \to 0$. Если же $|\xi_r| = |\xi_{r+1}| > |\xi_{r+2}|$, то при $i \to \infty$

$${}^rQ^{(i+r)}(x) - p\,{}^rQ^{(i+1)}(x) + q\,{}^rQ^{(i)}(x) \to 0,$$

где $p = \xi_r + \xi_{r+1}$, $q = \beta_r \cdot \xi_{r+1}$.

При сокращенной итерации используется формула

$$ {}^{r}Q^{(2i)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} {}^{r}\gamma_{\nu}^{(i)}\, {}^{r}Q^{(i+n-\nu)}(x), $$

где

$$ {}^{r}\gamma_{\nu}^{(i+1)} = {}^{r}\gamma_{\nu+1}^{(i)} - a_{\nu}^{r}\gamma_{11}^{(i)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), $$

$$ {}^{r}\gamma_{n+1}^{(i)} = 0. $$

При отыскании собственных чисел и собственных векторов матрицы A, имеющей элементарные делители, строится последовательность векторов t_0, t_1, ..., t_i, t_{i+1}, ...

$$ t_i = t_{i-1}A = tA^i, $$

где $t_0 = t$ — вектор, зависящий от определенных ранее собственных векторов и собственных чисел. Определение собственных чисел производится, как обычно, в порядке убывания их модулей.

Метод сокращенной итерации, предложенный автором, заключается в том, что для определения элементов последовательности используется формула

$$ t_{2i} = t_i \tau^{-1} \begin{Vmatrix} t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_{i+n-1} \end{Vmatrix} $$

где

$$ \tau = \begin{Vmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{Vmatrix}. $$

К. Б. Окунева

753. Краковяновое исчисление и его применение в способе наименьших квадратов. Милевский Ю. Г., Геод. и картография, 1957, № 1, 52—63

Изложение одного способа решения системы нормальных уравнений (см., например, РЖМат, 1955, 1970, 4711). В. В. Петров

754. Численное решение алгебраических уравнений, корни которых почти одинаковы по абсолютной величине. Фидлер (Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. Fiedler Miroslav), Apl. mat., 1956, **1**, № 1, 4—22 (чеш.; рез. русск., нем.)

Исследуется проблема численного решения алгебраического уравнения вида

$$ f(x) = a_0x^{2s} + a_1x^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0 \quad (a_0a_{2s} > 0), $$

при условии, что корни этого уравнения почти равны по абсолютной величине.

Пусть

$$ u(z) = \frac{1}{y^s} g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right), $$

$$ v(z) = \frac{y}{y^2-1}\left[\frac{1}{y^s} g(y) - y^s g\left(\frac{1}{y}\right)\right], $$

где $g(y) = f(ry)$, $r = \sqrt{\dfrac{a_{2s}}{a_0}}$, $z = y + \dfrac{1}{y}$. Тогда при условии, что уравнение $u(z) = 0$ имеет простые корни z_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, данное уравнение имеет приблизительно те же корни (порядка $\varepsilon^2 r$), как уравнение

$$ x^2 - (1 + \varepsilon_i) z_i r x + (1 + 2\varepsilon_i) r^2 = 0, $$

где

$$ \varepsilon_i = \frac{v(z_i)}{u'(z_i)}, \quad u' = \frac{du}{dz}, \quad \varepsilon = \max_i |\varepsilon_i|. $$

Исследуется модификация хода решения в случае $s = 2, 3$; метод детально иллюстрируется на трех числовых примерах. I. Babuška

755. Об одной интегрально-детерминантной форме приближенного решения уравнения. Коган Я. М., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 265—268

Пусть числа a и b отделяют простой корень уравнения $f(x) = 0$; $f'(x)$ и $f''(x)$ на $[ab]$ непрерывны и не обращаются в нуль. Тогда за приближенное значение корня можно взять

$$ x_1 = \frac{\int_a [A_2 z - A_3] f(z)\, dz}{\int_a^b [A_1 z - A_2] f(z)\, dz}, \text{ где } A_p = \frac{b^p - a^p}{p}. $$

Дается оценка погрешности x_n, меньшей соответствующей погрешности метода Ньютона.

А. И. Взорова

756. О решении уравнений, содержащих общие полиномы с числовыми коэффициентами и некоторые трансцендентные функции, при помощи разложений их корней в бесконечные ряды. Мацукура (On a solution of equations containing general polynomials with numerical coefficients and certain transcendental functions by expanding their roots into infinite series. Matsukura Kameo. Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952. Tokyo, Sci. Council Japan, 1953, 295—298 (англ.)

Описывается метод Лагранжа для решения уравнений $y = f(x)$ (с производными всех порядков) при помощи разложения в ряд Тейлора обратной функции $x = g(y)$ (см., например, Willers Fr. A., Practical analysis, Dover, New York, 1948). E. Frank

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 411.

757. Об одном способе аппроксимации корней уравнения третьей степени. Кулиев А. М., Изв. АН ТуркмССР, 1956, № 6, 80—81

Утверждается, что корень уравнения $x^3 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами содержится в интервале $\left[\sqrt[3]{\alpha p - q},\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\beta - \alpha - p)}}{2}\right]$, где α, β — такие действительные числа, что $\alpha\beta = q$.

А. Б. Штыкан

758. Многочленные ядра и итерационные методы. Бауэр, Замельсон (Polynomkerne und Iterationsverfahren. Bauer Friedrich L., Samelson Klaus), Math. Z., 1957, **67**, № 2, 93—98 (нем.)

Через π_n авторы обозначают пространство многочленов степени не выше n, через $\bar{\pi}_n$ — пространство многочленов степени n с ведущим коэффициентом 1. Рассматривается многочлен $P(x) \in \bar{\pi}_n$, имеющий корни λ_μ, $\mu = 1, \ldots, n$, причем $|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_1|$. За начальное приближение берется многочлен $q^{(0)}(x) \in \pi_{n-1}$ и итерация производится по формуле $P(x) - \dfrac{P(0)}{q^{(i)}(0)} q^{(i)}(x) = xq^{(i+1)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots$ Доказывается, что вообще при $i \to \infty$ будет (с линейной сходимостью) $-\dfrac{P(0)}{q^{(i)}(0)} \to \lambda_n$, $q^{(i)}(x) \to \dfrac{P(x)}{x - \lambda_n} \in \bar{\pi}_{n-1}$, если $|\lambda_n| < |\lambda_\mu|$, $\mu \neq n$ и $q^{(0)}(\lambda_n) \neq 0$.

С многочленом $\frac{P(x)}{x-\lambda_n}$ можно повторить тот же прием, и получим $\frac{P(x)}{(x-\lambda_n)(x-\lambda_{n-1})}$, если $|\lambda_{n-1}|<|\lambda_\mu|$, $\mu \neq n$ и т. д.

Далее, пользуясь многочленными ядрами и формулой Кристоффеля—Дарбуа:

$$K_\mu(x, y)=\frac{1}{\|P_\mu\|^2}\cdot\frac{P_{\mu+1}(x)P_\mu(y)-P_\mu(x)P_{\mu+1}(y)}{x-y},$$

авторы приходят к следующему правилу.

Дано: $P(x)\in\bar{\pi}_n$ начальные приближения: $q^{(0)}(x)\in\bar{\pi}_{n-1}$ и $\beta^{(0)}$; алгорифм: при $i=0, 1, 2, \ldots$ $P(x)-\frac{P(\beta^{(i)})}{q^{(i)}(\beta^{(i)})}=(x-\beta^{(i)})q^{(i+1)}(x)$, $\beta^{(i)}-\frac{P(\beta^{(i)})}{q^{(i)}(\beta^{(i)})}=\beta^{(i+1)}$.

Если $q^{(0)}(x)$ и $\beta^{(0)}$ лежат в известной окрестности какого-нибудь простого корня λ_ν и если итерация сходится, то $q^{(i)}(x)\to\frac{P(x)}{x-\lambda_\nu}$ и $\beta^{(i)}\to\lambda_\nu$ при $i\to\infty$ и сходимость квадратичная.

Подобное же обобщение получается и для ступенчатой итерации. М. Горнштейн

759. Границы для определителей. II. Бреннер (Bounds for determinants. II. Brenner J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 532—534 (англ.)

Устанавливаются следующие оценки:

$$\left[1-\sum_1^n m_j(|a_{jj}|+m_j)^{-1}\right]\prod_1^n(|a_{ii}|+m_i)\leqslant$$

$$\leqslant|\det A|\leqslant\prod_1^n\left[|a_{ii}|+m_i\left(b_i^{-1}-1\right)\right],$$

где

$$A=(a_{ij})\ (i, j=1, 2, \ldots, n);\ m_i=\max_j|a_{ij}|,$$

$$f_i=1-\sum_1^{i-1}[m_j(m_j+|a_{jj}|)]^{-1}.$$

В. К. Саульев

760. Алгоритм деления и вычисления. Рутисхаузер (Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Rutishauser Heinz. Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zürich, 1957, № 7, 74 S.) (нем.)

Настоящая работа является обобщением ряда работ автора, посвященных методу деления и вычитания и его обобщениям (РЖМат, 1955, 5316; 1956, 4916, 4926, 6856 1957, 3542). Упрощены доказательства некоторых теорем. В. Н. Фаддеева

761. «Ловушки» в вычислениях. Стиган, Абрамович (Pitfalls in computation. Stegun Irene A., Abramowitz Milton), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 4, 207—219 (англ.)

В популярной форме излагается ряд «ловушек», могущих встретиться при вычислениях, в частности, при использовании электронных вычислительных машин. Так, для $x=314159, 3$, где погрешность не превосходит единицы последней значащей цифры, $\sin x$ колеблется в пределах от $-0{,}07$ до $0{,}13$, т. е. несмотря на то, что x задано с семью значащими цифрами с возможной погрешностью, не превышающей единицы последней цифры, $\sin x$ невозможно определить даже с одним верным десятичным знаком. Если использовать для нахождения $\sqrt{x+iy}$ соотношение $\sqrt{x+iy}=\sqrt{(r+x)/2}+i\sqrt{(r-x)/2}$ и если y мало, то $r=\sqrt{x^2+y^2}\approx x$ и, следовательно, будет иметь место потеря значащих цифр в мнимой части. Если $a\gg b$ в уравнении $x^2+ax+b=0$, то один из корней будет близок к $-a$, а другой будет пренебрежимо мал по сравнению с $|a|$.

Потери значащих цифр происходят также в так называемых неопределенных формах. Так, при малом x числитель и знаменатель в выражении $f(x)=(1-\cos x)/\sin x$ близки к нулю. Подобная ситуация встречается в экстраполяционных методах ускорения сходимости итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Несколько иного рода «ловушки» могут встретиться при оперировании с рядами. Так, для вычисления суммы ряда

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^4(t-n)^2(t-n-1)^2}$$

при $t=20$ мы оборвем его на члене, меньшем чем 10^{-7}. Это будет иметь место при $n=4-15$, для которых $f(20)\approx10^{-5}$. На самом же деле для $n=19$ имеем $f(20)\approx2$. Однако для $n>20$ ряд сходится столь быстро, что критерий 10^{-7} можно уже использовать.

Более подробно авторы исследуют «ловушки», могущие встретиться при численных квадратурах.

В. К. Саульев

762. Оценка точности по большому числу малых рядов измерений. Нестеров А. Ф., Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр., 1957, вып. 26, 65—69

763. О статье Миддлтона «Некоторые общие результаты теории распространения через нелинейные аппараты». Шипман (On Middleton's paper «Some general results in the theory of noise through non-linear devices». Shipman, J. S.), Quart. Appl. Math., 1955, **13**, № 1, 200—201 (англ.)

Корреляционная функция $R_\epsilon(t)$, полученная Миддлтоном (Quart. Appl. Math., 1948, **5**, 379), выражается через функции Беннетта.

764. Об удвоении куба. Сельмер (Apropos kubens fordobling. Selmer Ernst S.), Nord. mat. tidskr., 1957, 5, № 2, 84—86, 119 (норв.; рез. англ.)

Для аппроксимации $\frac{1}{10}\sqrt[3]{2}$ предлагаются следующие величины:

$$8-\sqrt{62};\ \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{16}};\ \frac{127}{1008}.$$

Точность аппроксимации 6—7 десятичных знаков.

765. Исследование некоторых классов функций при помощи интеграторов. Кузьминок Г. К., Михельсон В. С., Инженерный сб., 1956, 24, 190—208

Авторы рекомендуют применить интегратор, предназначенный для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=1}^n(a_{ik}+b_{ik}d/dt)U_k=a_i;\ U_k(0)=C_k \qquad (1)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

для исследования свойств функций, являющихся решениями системы (1), т. е. функций вида

$$F(t)=P_1(t)\cos\omega t+P_2(t)\sin\omega t+P_3(t), \qquad (2)$$

$$F(t)=P_1(t)e^{at}+P_2(t), \qquad (3)$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — полиномы от t.

Дается способ составления матрицы той системы (1) и тех начальных условий, которым удовлетворяют

функции (2) или (3). С помощью полученных на осциллографе решений можно найти все действительные корни функций (2) или (3), точки экстремума, производные и первообразные функции и т. д.

Интегратор также можно применить для извлечения корня n-й степени; с помощью «фазовой плоскости» легко получить график полиномов Чебышева и т. д.

Т. И. Маруашвили

766. К методике решения обратных задач. Мотяков В. И., Докл. АН Аз ССР, 1956, 12, № 2, 91—95 (рез. азерб.)

Применяется известный способ нахождения дебитов скважин при помощи сеточного интегратора, если известны величины давления в некоторых внутренних точках данной области.

Т. И. Маруашвили

767. О гладком выравнивании последовательности значений. Беккен (Über die glatte Ausgleichung von Wertefolgen. Wecken Fr.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8-9, 305—306 (нем.)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — приближенные значения при $t=\nu$ ($\nu=1, \ldots, n$) функции $f(t)$, имеющей при $1<t<n$ непрерывную производную $(k-1)$-го порядка и кусочно-непрерывную производную k-го порядка. Если $g(t)$ удовлетворяет указанным требованиям, то полагаем

$$A(g)=\sum_{\nu=1}^{n}|g(\nu)-x_\nu|^2,\quad B(g)=\int_1^n|g^{(k)}(t)|^2dt.$$

При фиксированных x_ν, k и $\lambda>0$ рассматривается задача

$$A(g)+\lambda B(g)=\min.$$

Несколько подробнее разобран случай бесконечной последовательности $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ Отмечается, что число k обычно однозначно определяется из физических соображений, чего нельзя сказать относительно λ.

В. В. Петров

768. Конструирование номограмм (Construction of nomograms), Mech. World and Engng Rec., 1957, 137, № 3453, 170—172 (англ.)

Популярная статья о построении номограмм с параллельными логарифмическими шкалами для выражений вида $x=AB$, $x=A/B$, $x=kAB$, $x=kA/B$, $x=A^2B$, $x=ABC$. Градуировку шкал рекомендуется выполнять с помощью шкал логарифмической линейки. Отмечается, что номограммы более удобны для вычислений, чем логарифмическая линейка, так как при пользовании номограммами отпадает необходимость в определении места запятой в ответе.

Г. С. Хованский

769. Применение графо-аналитического метода интегрирования для расчета нелинейной электрической цепи. Фейгин Л. З., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1956, 43/57, 81—89

Для уравнения $y''=f(y', y, t)$ с заданными начальными данными предлагается искать приближенное решение на конечном интервале следующим образом: Пусть τ — шаг по времени, тогда (оставляя в степенном ряде только три члена):

$$y_k=y_{k-1}+y'_{k-1}\tau+y''_{k-1}\frac{\tau^2}{2},$$
$$y'_k\tau=y'_{k-1}\tau+2y''_{k-1}\frac{\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Однако такое приближение слишком грубо, поэтому на каждом пятом шаге предлагается вносить поправку

$$\delta y_5=\left(45y''_4+100y''_1-145y''_0\right)\frac{\tau^2}{48},$$
$$\delta y'_5\tau=\left(11y''_5+5y''_1-16y''_0\right)\frac{\tau^2}{24},$$

после чего следует продолжать вычисления по формулам (1). В приведенном расчетном примере одна из поправок составляет около 40% вычисляемой функции, что указывает на необходимость соблюдения осторожности при применении данного метода.

Ю. Н. Днестровский

770. К вопросу о графическом решении системы линейных уравнений. Туманьян Г. Т., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1956, вып. 14, 59—62

Показывается, что в частном случае системы m неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных с положительными коэффициентами и свободными членами решение для положительных корней может быть получено (при $n\leqslant 6$, $m\leqslant 6$) использованием графических построений, разработанных автором в более ранней работе (Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1949, вып. 6).

Ю. Н. Днестровский

771 К. Численные методы. Баккингем (Numerical methods. Buckingham Richard Arthur. London, Pitman, 1957, XII, 597 pp., ill., 70 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 383, 11 (англ.)

772 К. Основы приближенных вычислений. Погосов М. М. Заочн. бухгалтерск. отд. Ашхабадск. землеустроит. техникума. Ашхабад, 1957, 14 стр.

773 К. Вопросы численного прогноза и теории климата. Ред. Юдин М. И. (Тр. Гл. геофиз. обсерв., вып. 71). Л., Гидрометеоиздат, 1957, 238 стр., илл., 17 р. 30 к.

774 К. Вариационные методы для решения задач о собственных значениях. Гулд (Variational methods for eigenvalue problems. An introduction to the methods of Rayleigh, Ritz, Weinstein and Aronszajn. Gould S. H. Toronto, Univ. Toronto Press; London, Oxford, Univ. Press., 1957, 179 pp.) (англ.)

Книга посвящена изложению двух принципиально различных вариационных методов решения задач на собственные значения применительно к дифференциальным уравнениям: 1) хорошо известного метода Релея—Ритца, дающего приближения к собственным значениям сверху (усиление ограничений на допустимые функции) и 2) метода Вайнштейна, дающего приближения к собственным значениям снизу (ослабление ограничений на допустимые функции).

Для иллюстрации сущности связи между задачей на собственные значения для дифференциальных уравнений и соответствующей вариационной задачей в первых двух главах рассмотрен конечномерный случай. В гл. III и IV рассмотрены собственно методы Релея—Ритца и Вайнштейна в их первоначальной форме. Гл. IV, V и VII носят вспомогательный характер. В них рассмотрены, например, следующие вопросы. Вполне непрерывные операторы в абстрактном гильбертовом пространстве; спектры положительно определенных вполне непрерывных операторов; сходимость операторов; подпространства; пополнение пространств; колебание стержней, мембран и пластин; функции Грина для мембраны, опертой и зажатой пластины; резольвента. В гл. VIII обобщается метод Вайнштейна и Релея—Ритца на гильбертово пространство. В гл. IX рассмотрен особо метод Вайнштейна применительно к проблеме зажатой пластинки. Наконец, в гл. X обсуждаются некоторые идеи Ароншайна для более общих дифференциальных уравнений.

Содержание книги по главам следующее: Гл. I. Колеблющиеся системы с конечным числом степеней свободы. Гл. II. Вариационные принципы для конечномерных систем. Гл. III. Колебание систем с бесконечным числом степеней свободы. Гл. IV. Воспроизводящие ядра и функциональные пополнения. Гл. V. Колебание стержней, мембран и пластинок. Гл. VI. Метод Вайнштейна в его первоначальной форме. Гл. VII

Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Гл. VIII. Метод Вайнштейна—Ароншайна для линейных операторов в гильбертовом пространстве. Гл. IX. Применение метода Вайнштейна—Ароншайна в гильбертовом пространстве к дифференциальной проблеме колебания пластинки. Гл. X. Применение приближенных методов к общим дифференциальным задачам. Книга предназначена для широкого круга читателей—математиков, физиков, инженеров и пр. По возможности, в сжатой форме, приводятся сведения, необходимые для понимания последующего материала.

Книга изложена, в основном, на языке функционального анализа. Изложение сопровождается упражнениями и примерами.

В последних главах рассмотрены вопросы сходимости и существования; при этом по существу используются полнота соответствующих пространств и фундаментальное свойство вполне непрерывных операторов (в первых двух главах, в которых исследуется конечномерный случай, аналогичную роль играют теоремы Больцано и Вейерштрасса).

Для случая зажатой пластинки приводятся числовые примеры, показывающие высокую точность методов Вайнштейна и Релея—Ритца. При этом, в случае метода Вайнштейна, в качестве «основной» проблемы взят случай опертой пластинки, для которой собственные значения предполагаются известными (они равны квадратам собственных значений мембраны той же геометрии). Библ. 88 назв. В. К. Саульев

ТАБЛИЦЫ

775. Функции $E_n(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-n}du$. Плачек (The functions $E_n(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-n}du$. Placzek G.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 57—111 (англ.)

Даны определения и выводы свойств функций $E_n(x)$, встречающихся в теории диффузии, и их преобразований Фурье и Лапласа. В приложениях приведены асимптотическое разложение $E_n(x)$ для $x+n\gg 1$ таблица $E_n(x)$ для $n=0\,(1)\,20$ и $x=0\,(0{,}01)\,2\,(0{,}1)\,10$ с 4—9 значащими цифрами, таблицы вспомогательных функций $E_2(x)-x\ln x$ для $x=0\,(0{,}01)\,0{,}5$ и $E_3(x)+\frac{1}{2}x^2\ln x$ для $x=0\,(0{,}01)\,0{,}1$ с 7 десятичными знаками, $\int_0^{\pi/2}x^{10}\cos n\pi x dx$ для $n=1\,(1)\,100$ с 10 десятичными знаками и замечания о точности интерполяции.

Н. М. Бурунова

776. Таблицы некоторых интегралов. Бергхёйс (A table of some integrals. Berghuis J. Math. Centrum, Amsterdam, Rekenafdeling. Rept, 1954, № R 245, 8 pp.) (англ.)

Пусть

$$b_n(x)=\int_0^x v^n \operatorname{tg} v dv,\quad F_n(x)=\int_0^x v^n \operatorname{tg} hv dv$$

$$g_n(x)=\int_0^x v^n \operatorname{ctg} v dv,\quad G_n(x)=\int_0^x v^n \operatorname{ctg} hv dv.$$

Протабулированы f_n для $n=1\,(1)\,5$, $x=0\,(0{,}05)\,1{,}5$; $g_n(x)$ для $n=1\,(1)\,5$, $x=0\,(0{,}05)\,2{,}5$; F_n и G_n для $n=1\,(1)\,4$, $x=0\,(0{,}02)\,1{,}98$. Таблицы даны с 7 или 8 знаками с ошибкой, не превосходящей 1×10^{-7} в случае f, F, G и 3×10^{-8} в случае f. Таблицы проверены разностями; f и g вычислены на руках; f и g вычислены на релейной машине APPA математического центра. J. Todd

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 750

777. Таблицы $n\lg_2 n$ и $n\lg_{10} n$ для n от 1 до 1000. Миллер, Росс (Tables of $n\log_2 n$ and $n\log_{10} n$ for n from 1 to 1000. Miller George A., Ross Patricia M.), Techn. Rept, Lincoln Lab. Mass. Inst. Technol., 1954, № 60, 9 pp. (англ.)

Указанные в заглавии функции протабулированы с семью значащими цифрами для $n=1\,(1)\,1000$.

778. Таблицы интегралов $A_n(\alpha)=\int_1^\infty \lambda^n e^{-\alpha\lambda}d\lambda$ и $F_n(\alpha)=\int_1^\infty Q_0(\lambda)\lambda^n e^{-\alpha\lambda}d\lambda$. Рахман (Tables of integrals $A_n(\alpha)=\int_1^\infty \lambda^n e^{-\alpha\lambda}d\lambda$ and $F_n(\alpha)=\int_1^\infty Q_0(\lambda)\times\times\lambda^n e^{-\alpha\lambda}d\lambda$. Rahman A.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1955, Ser. 1, 69, № 2, 123—128 (франц.)

Даны рекуррентные соотношения для $A_n(\alpha)$ и $F_n(\alpha)$, значение постоянной Эйлера с 15 десятичными знаками и таблица значений интегралов $A_n(\alpha)$ и $F_n(\alpha)$ для $n=0\,(1)\,10$, $\alpha=0{,}1\,(0{,}1)\,3$ с 10 значащими цифрами.

Имеется 3 ссылки на литературу, содержащую таблицы этих интегралов и родственных им.

Н. М. Бурунова

779. Таблицы для решения уравнений по Гарсиа. Фрейеслебен (Numerische Tafeln zur Lösung von Gleichungen nach J. Garcia. Freiesleben H.-Chr.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, **9**, № 5, 218—222 (нем.)

Дается обзор исследований Гарсиа, посвященных: а) некоторым вопросам интерполяции в таблицах и б) вопросам табулирования функций многих переменных, в связи с некоторыми задачами мореходной астрономии.

Приведены схемы конструкции таблиц для определения азимута светила и таблиц для решения уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$. А. И. Взорова

780. Числовые значения температуры вне кругового цилиндра. Егер (Numerical values for the temperature in radial heat flow. Jaeger J. C.), J. Math.-Phys,. 1956, **34**, № 4, 316—321 (англ.)

Приведены трехзначные таблицы значений температуры, как функции времени и расстояния от оси для внешней области кругового цилиндра, температура на поверхности которого предполагается равной единице, а температура в начальный момент считается равной нулю. Табулирование осуществлено по формуле

$$v=1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\tau u^2}\frac{I_0(u)\,Y_0(Ru)-Y_0(u)\,I_0(Ru)}{u\left[I_0^2(u)+Y_0^2(u)\right]}du,$$

где величины τ и R, соответствующие времени и расстоянию, изменяются соответственно в пределах $0{,}001\leqslant\tau\leqslant1000$ и $1\leqslant R\leqslant100$. В. К. Саульев

781 К. Райнхартовские математические таблицы, формулы и кривые. Ларсен (Rinehart mathematical tables, formulas and curves. 6th enlarg. ed. Comp. Larsen Harold D. New York, Rinehart and Co., Inc., 1956, 280 pp.) (англ.)

Книга состоит из двух частей. В первой части (стр. 3—179) приведены 34 таблицы различных функций. Названия некоторых из них таковы: пятизначные логарифмы чисел, натуральные тригонометрические функции, степени, корни и обратные величины, значения и логарифмы показательных функций, значения гиперболических функций, американские экспоненциальные таблицы смертности, ординаты нормальной вероятностной кривой, функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$; полные эллиптические интегралы и т. д.

Во второй части (стр. 179—277) приведены различные наиболее употребительные постоянные формулы,

кривые и пр. Названия некоторых из 15 параграфов таковы: важные математические константы; формулы из алгебры, геометрии, тригонометрии, формулы аналитической геометрии на плоскости, производные, неопределенные интегралы, определенные интегралы.

Книга представляет собой краткий справочник для лиц, имеющих дело с различными вычислениями.

В. К. Саульев

782 К. Новые таблицы определенных интегралов. Биренс-де-Хан (Nouvelles tables d'intégrales définies. Bierens de Haan David. Nouv. éd. New York—London, Hafner, 1957, [5], XIV, 716 p., 90 sh.) (франц.)

783 К. Физико-математические таблицы. Жмигродзкая, Обальский, Грыкаловский (Tablice matematyczno-fizyczne. Praca zbiorowa. Wyd. 4. Zmigrodzka Wanda, Obalski Tadeusz, Grykałowski Zbigniew. Warszawa, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod., 1957, 104 s., il., 6.80 zł.) (польск.)

См. также: 447 К, 457, 468, 469

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

784. Десятичные циклические коды для преобразователей непрерывной информации в цифровую. О'Брайен (Cyclic decimal codes for analogue to digital converters. O'Brien Joseph A.), Commun. and Electronics, 1956, № 24, 120—122 (англ.)

Описывается принцип построения циклических числовых систем и применение двоично-десятичных циклических кодов в устройствах преобразования угла поворота вала в цифровую форму. Циклической числовой последовательностью называется такая система чисел, где каждое последующее число отличается от предыдущего только одной цифрой, причем тем же свойством обладают любые два числа каждого цикла, равного основанию данной системы счисления. Такие числовые системы находят широкое применение в устройствах преобразования углового положения вала в цифровую форму вместо обычных двоичных или десятичных систем с целью устранения ошибок считывания, возникающих на границах между двумя соседними числами, отличающимися более чем одной цифрой.

Эти устройства представляют собой диск или цилиндр, соединенные с валом, угловое положение которого регистрируется. На поверхности диска или цилиндра размещаются проводящие и непроводящие участки в соответствии с системой кодирования, в которой требуется получать отсчеты положения вала. Съем положения вала осуществляется с помощью щеток, скользящих по кодированной поверхности диска или цилиндра.

Дается подробное исследование методом карт различных двоично-десятичных кодов с целью определения оптимального соотношения таких параметров преобразовательного устройства с циклическим двоично-десятичным кодом, как ошибки считывания, количество щеток, величина среднего тока, потребляемого щетками, и сложность устройства преобразования циклического двоично-десятичного кода в обычный двоично-десятичный код на выходе преобразовательного устройства. Метод карт заключается в использовании прямоугольной сетки 4×4 для представления всех 16 комбинаций 4 двоичных переменных. Четыре последовательных значения как вертикальных, так и горизонтальных координат карты равны 00, 01, 11 и 10, благодаря чему каждый квадрат карты представляет собой одно 4-разрядное двоичное число. Проектирование любого циклического кода с помощью такой карты заключается просто в соответствующем размещении на ней десятичных чисел. Даются примеры нахождения кодов с наименьшим количеством проводящих щеток, а также с наименьшим количеством проводов между щетками и устройством перевода в обычный двоично-десятичный код. Приводятся оптимальные в указанном выше смысле коды для преобразовательных устройств с диском и с цилиндром.

Б. И. Стрелков

785. Новая электронная вычислительная машина ИБМ-709 для обработки данных (New electronic data-processing computer), J. Franklin Inst., 1957, **263**, № 4, 375—377 (англ.)

Сообщается о выпуске новой цифровой электронной машины ИБМ-709. Эта машина названа в статье первой машиной, способной с одинаковым успехом производить коммерческие, научные и инженерные вычисления. Ее стоимость — 3 млн. долл., арендная плата 56 тыс. долл. в месяц. В машине имеются команды преобразования числовой информации из различных систем счисления в двоичную, что позволяет все исходные данные при подготовке задачи записывать в любой, наиболее экономичной и желаемой форме. В ИБМ-709 используется блок магнитной ленты ИБМ-729, в котором автоматически проверяется точность записи информации в момент ее записи и выдается сигнал при обнаружении ошибки. Дальнейшая запись на ленту может быть приостановлена и информация переписана. Объем оперативного запоминающего устройства на ферритовых сердечниках составляет 32 768 чисел, эквивалентных десятизначным числам. Время выбора одного числа 12 *мксек*. Машина выполняет за 1 сек. 42 000 сложений и вычитаний и 5 000 умножений и делений.

К ИБМ-709 придается до 3 синхронизаторов ИБМ-766, которые позволяют системе одновременно производить считывание, запись и вычисления; каждый синхронизатор имеет 2 канала для ввода и вывода данных. К каждому каналу можно присоединять по 8 блоков магнитных лент. Кроме того, к каждому каналу могут быть присоединены: 1) устройства для считывания и записи на перфокарты и печатающий аппарат; 2) два запоминающих устройства на магнитных барабанах и 3) регистратор на катодной трубке ИБМ-740. По каналам синхронизаторов можно работать с любой комбинацией шести оконечных блоков ИБМ-709. Магнитные ленты, полученные для ИБМ-709, могут использоваться другими машинами ИБМ серии 700. Существующие программы для ИБМ-704 могут быть использованы для ИБМ-709 с небольшими изменениями в подпрограмме ввода—вывода.

З. Д. Доброхотова

786. Электронная цифровая машина (Electronic digital computer), Engineer, 1957, **203**, № 5278, 456—457 (англ.)

Приводится краткая характеристика опытного экземпляра безламповой машины Метровик (Metrovick), разработанной английской фирмой Metropolitan-Vickers Electrical Co. Машина выполнена на кристаллических триодах с применением печатных монтажных

схем. Для оперативного запоминания используется магнитный барабан, имеющий 128 дорожек общей емкостью 4096 32-разрядных двоичных чисел. Среднее время выборки данных с магнитного барабана составляет 10 *мсек*.

Арифметическое устройство — последовательного действия; кроме сумматора, имеется умножитель. Сокращение времени умножения достигается путем параллельного проведения восьми сложений, повторяемых четыре раза за время одного умножения. Часть дорожек барабана используется как регенеративные регистры. Два из них служат для записи произведения. Восемь регистров используются для модификации команд. Частота главных импульсов машины равна 57 *кгц*. Пульт машины имеет две осциллографические трубки, с помощью которых можно просматривать любую дорожку магнитного барабана. Размеры машины — около 4,5×1,5×2 *м*. Потребляемая мощность — 3 *квт*.

Для контроля работы машины разработаны тестовые программы. Запуск их при различных напряжениях питания позволяет установить места неисправностей. Указывается, что на основе опытного образца в ближайшее время будут изготовлены еще две машины.

Б. Н. Малиновский

787. Запоминающие устройства для быстродействующих вычислительных машин. Б у т (Storage devices for high speed calculators. B o o t h A. D.), Research, 1955, 8, № 4, 130—140 (англ.)

Дается краткий обзор запоминающих устройств для быстродействующих цифровых машин. Наряду с широко распространенными устройствами (ртутные линии задержки, электроннолучевые трубки, магнитный барабан, магнитные матрицы, диодно-емкостные устройства) описываются менее известные виды запоминающих устройств: тепловые, электрохимические, магнитострикционные, диэлектрические.

Принципы работы двух вариантов запоминающего устройства, основанного на передаче и хранении тепла, состоят в следующем. В первом случае запись данных в виде тепловых импульсов производится на поверхности вращающегося цилиндра из материала с малой теплопроводностью. Тепловой импульс передается на цилиндр с помощью провода, снабженного рефлектором. Импульс тока, разогревающий провод, создается при разряде конденсатора. Считывающее устройство расположено на диаметрально противоположной стороне цилиндра и представляет собой термочувствительный элемент (например, термопару). Для регенерации информации используется усилительное устройство, на которое подается импульс с термопары.

Во 2-м варианте вместо вращающегося цилиндра используется пластинка из теплоизоляционного материала с рядом отверстий, в каждое из которых закладываются термопара и выпрямитель, соединенные последовательно. Запись информации производится с помощью матричной системы проводов путем подачи импульсов тока, разогревающих термопары и теплоизоляционный материал вокруг них. После подачи импульса термопара некоторое время обладает определенной электродвижущей силой и таким образом сохраняет полученную информацию. Отмечается, что несовершенство теплоизоляционных материалов затрудняет разработку описанных видов памяти.

Показан принцип устройства магнитострикционной линии задержки. Для линии используется тонкий никелевый провод диаметром 0,12 *мм*, или тонкостенная трубка диаметром 0,37 *мм* с толщиной стенки 0,12 *мм*, или тонкая лента сечением 0,12×3,12 *мм*. Распространение импульса, поданного в обмотку, по линии происходит со скоростью $5 \cdot 10^5$ *см/сек*, поэтому длина провода (ленты, трубки) между записывающей и считывающей обмотками должна быть значительной. Частота импульсов записи может достигать 1 *мгц*.

Указывается на возможность создания оптических и электрохимических запоминающих устройств. Для оптических можно использовать свойства ряда веществ (например, Hg_2I_2, · HgS), иметь два устойчивых цветовых состояния. Переход от одного состояния к другому происходит путем облучения от источника света с определенной длиной волны. Предполагается, что электрохимическое устройство может иметь весьма малые размеры.

Б. Н. Малиновский

788. В вычислительной машине военно-воздушных сил США используются магнитные усилители. — (USAF computer uses magnetic amplifiers), Electronics, 1956, 29, № 7, 138—139 (англ.)

Кратко описана вычислительная машина, разработанная фирмой «Сперри Рэнд» (Sperry Rand) для Кембриджского исследовательского центра военно-воздушных сил США. Машина (см. фото) имеет 2-адресную систему кодирования, 10 десятичных разрядов, частоту синхронизирующих импульсов 660 *кгц*, запоминающее устройство на магнитном барабане и сконструирована для работы в реальном масштабе времени, благодаря чему может использоваться для работы совместно со станциями обнаружения ПВО. Имеется 4 арифметические операции, 7 операций передачи данных, 7 логических операций и операции вывода. Предусмотрено 3 рода работы: непрерывный, шаговый (по одной инструкции с печатью выполняемой инструкции по желанию оператора) и работа с остановкой перед каждой инструкцией передачи управления. Время сложения двух 10-разрядных десятичных чисел — 90 *мксек*, умножения — от 0,3 до 1,7 *мсек*. Ввод данных производится с перфоленты. Выходные данные могут печататься на телетайпе или направляться в линию для дистанционного управления. Арифметический узел состоит из 3 регистров на магнитных усилителях. Кроме того, имеется 44-разрядный буферный входной регистр и 26-разрядный сдвигающий регистр, питающий выходную линию. В магнитных усилителях используются ленточные сердечники, намотанные на бобинах из нержавеющей стали. Максимальная рабочая частота усилителя достигает 2,5 *мгц*. Приведены схемы некоторых элементов на магнитных усилителях. Магнитный барабан вращается со скоростью 16 500 об/мин, имеет диаметр 125 *мм*, длину 75 *мм*, покрыт никель-хромом и помещается в кожухе, заполненном гелием для предотвращения коррозии. Общий объем запоминающего устройства — 2000 10-разрядных кодов с их знаками. Среднее время выборки одного числа — 1,8 *мсек*. Десять дорожек барабана образуют быстродействующее запоминающее устройство емкостью 400 кодов со временем выборки 450 *мксек*, благодаря установке на одной дорожке 4 головок, сдвинутых на 90°.

Маркерные импульсы используются для синхронизации работы генератора синхронизирующих импульсов машины. В машине применяется около 1500 элементов на магнитных сердечниках, около 9000 германиевых диодов, 15 электронных ламп и несколько полупроводниковых триодов. Весь монтаж размещен в 600 съемных блоках с печатными монтажными панелями. Машина состоит из шкафа размером 1,8×1,8×0,5 *м* и пульта управления размером 1,35×1,8×0,9 *м*. Потребляемая мощность 5 *квт*.

А. И. Щуров

789. Универсальная электронная вычислительная машина «Урал» для инженерно-технических исследований. Базилевский Ю. Я. (Die universelle Elektronen-Rechenmaschine «Ural» für Ingenieur-technische Untersuchungen. Basilewski J. J.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 80—86, 221 (нем.; рез. англ.)

Доклад, представленный на Дармштадтской конференции (25—27 октября 1955 г.) по электронным вычислительным машинам и обработке информации. Машина «Урал» имеет программное управление, одноадресную систему команд; скорость 100 операций в 1 сек., оперативное хранение информации осуществлено на магнитном барабане (1024 ячейки); емкость запоминающего устройства на магнитных лентах 40 000 ячеек. В машине насчитывается 800 электронных ламп 3000 германиевых диодов. Потребление электроэнергии 8 *квт*. Дано техническое описание и рассматриваются логические и математические особенности машины.

Е. И. М.

790. Английские цифровые вычислительные машины. Мухин И. С., Вестн. АН СССР, 1956, № 7, 55—56

Сообщается, что в Лондоне 9—14 апреля 1955 г. состоялся съезд по цифровым вычислительным машинам, организованный Институтом инженеров-электриков. На съезде присутствовало около 900 человек. Делегация Академии наук СССР представила на съезде 2 доклада: «Быстродействующая электронная вычислительная машина АН СССР, ее проверка и надежность» и «Опыты автоматического перевода на электронной вычислительной машине БЭСМ».

На съезде были заслушаны доклады о вычислительных машинах ДЭЮКЕ (DEUCE), «Меркурий» (Mercury), серий «650», «700», серий «400»—«405», «Пегас» (Pegasus), «ГЭК-4 (HEC-4), Марк-II (Marc-II), ЭДСАК-II (EDSAC-II), НИКОЛАС (Nicholas), АКЕ (ACE), ИМП (IMP) и других. Большинство английских вычислительных машин — последовательного действия. В качестве оперативного запоминающего устройства используются магнитострикционные линии задержки, ртутные трубки, магнитные барабаны. Только в машинах ЭДСАК-II (Кембриджский университет) и «Меркурий» (фирма «Ферранти») применяются запоминающие устройства на ферритных сердечниках. Обращает на себя внимание стандартизация вводных и выводных устройств не только машин разных типов, но даже машин, выпускаемых разными фирмами.

Машина «Меркурий» — самая быстродействующая из английских машин. Сложение выполняется за 60÷180 *мксек*, а умножение — за 300 *мксек*. В машине применена система с плавающей запятой. Принцип работы — параллельно-последовательный. Оперативное запоминающее устройство сделано на ферритах, промежуточное запоминающее устройство — на 4 магнитных барабанах.

Г. С. Горячева

791. Криотрон — новый элемент для вычислительных машин (The cryotron — a new computer element), Brit. Communs and Electronics, 1957, 4, № 4, 234 (англ.)

Сообщается о разработанном в Массачусетском технологическом институте новом элементе для вычислительных машин — криотроне. Криотрон представляет собой прибор, состоящий из двух проводников. Один проводник является обмоткой («управляющая обмотка»), намотанной вокруг второго проводника («клапан»). Прибор работает при температуре жидкого гелия, когда оба проводника обладают свойством сверхпроводимости. Если в управляющей обмотке возникает достаточно сильное магнитное поле, то сопротивление клапана восстанавливается. Криотроны можно использовать в качестве запоминающих элементов, а также для построения логических цепей.

Ток, необходимый для переключения криотрона, равен приблизительно 0,5 *а*; одного источника будет достаточно для всей машины, так как мощность, необходимая для переключения криотрона, составляет доли микроватта. Применение криотронов дает возможность построить вычислительную машину с очень малыми габаритами. Недостатками криотронов являются малое быстродействие (время переброски триггера на криотронах — порядка 500 *мксек*) и необходимость применения жидкого гелия.

А. Н. Чуйкин

792. Быстродействующий параллельный сумматор для цифровых машин (High-speed parallel adder for digital computers), Electr. J., 1956, 157, № 12, 872—873 (англ.)

Описывается параллельный цифровой сумматор, работающий на частоте 1 *мгц* и разработанный на базе стандартных элементов машины СЕАК.

Л. С. Легезо

793. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках и полупроводниковых триодах. Янкер (A transistor-driven magnetic-core memory. Younker E. Leroy), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 14—20, 61 (англ.)

Описывается запоминающее устройство (з. у.) на магнитных сердечниках с питанием от полупроводниковых триодов, являющееся частью авиационной цифровой вычислительной машины на полупроводниковых триодах ТРАДИК (TRADIC), разработанной американской фирмой Bell Telephone. З. у. работает на принципе совпадения токов и состоит из 18 разрядных плат, каждая из которых содержит по 1024 сердечника, благодаря чему емкость запоминающегося устройства равна 1024 18-разрядным двоичным числам.

Через каждый сердечник разрядной платы проходит 6 проводов: 2 из них образуют строку, а 4 — столбец. Одна пара проводов (один в строке, другой — в столбце) используется для выборки сердечника при считывании, другая такая же пара проводов — для выборки сердечника при записи. Один из оставшихся проводов в столбце представляет собой выходную обмотку, а другой — обмотку запрета. Назначение последней — управление значением записываемой двоичной информации.

Выбор нужных столбца и строки з. у. при записи или считывании осуществляется с помощью координатных переключателей, построенных на магнитных сердечниках. Каждый переключатель используется только для записи или только для считывания, и притом только в столбце или только в строке. Переключатели работают в две фазы: сначала переключатель устанавливается с помощью адресного регистра в положение, соответствующее числу в последнем, а затем через переключатель посылается импульс тока в соответствующий столбец или строку з. у., который одновременно возвращает переключатель в исходное состояние. Запись информации в каждом разряде осуществляется с помощью обмотки запрета, отдельной для каждой разрядной платы и проходящей через все сердечники последней. Запись единицы в данном разряде осуществляется при отсутствии тока запрета в данной обмотке запрета, запись нуля — при наличии

в ней полутока, полярность которого противоположна полярности тока записи. Полный цикл запись — считывание занимает 20 *мксек* при скорости перемагничивания сердечников 4 *мксек*.

Приводится блок-схема з. у., согласно которой оно состоит: из запоминающего куба на магнитных сердечниках, составленного из 18 разрядных плат; четырех координатных магнитных переключателей с 40 усилителями установки; четырех усилителей записи и считывания в столбцах и строках соответственно; восемнадцати усилителей запрета и восемнадцати усилителей считывания с соответствующими вентилями считывания. Все усилители построены только на полупроводниковых триодах без применения электронных ламп.

Дается подробное описание схем усилителей на полупроводниковых триодах, применяемых в данном запоминающем устройстве. Все усилители подразделяются на два типа: усилители, предназначенные для переключения магнитных сердечников, и усилители, предназначенные для усиления сигналов от переключаемых сердечников. К усилителям первого типа относятся усилители запрета, установки магнитных ключей и записи, схемы которых подобны друг другу и отличаются лишь номиналами некоторых элементов схем, в соответствии с потребными от них токами (от 70 до 200 *ма*). Каждый из этих усилителей состоит из двух плоскостных германиевых триодов, соединенных между собой непосредственно и включенных по схеме с общим эмиттером. Первый триод является маломощным и предназначен для управления вторым по сигналу от блока управления запоминающим устройством. Нагрузка в виде соответствующей обмотки магнитных сердечников включена непосредственно в цепь коллектора второго триода, являющегося по существу мощным быстродействующим переключателем. Параметры этого выходного триода усилителя в описываемом запоминающем устройстве таковы: частота среза — более 4 *мгц*, усиление по току в схеме с общим эмиттером — более 10, ток коллектора 200 *ма* и напряжение между коллектором и эмиттером — не более четверти вольта. Вторым типом усилителя является усилитель считывания, предназначенный для усиления сигналов от переключаемых сердечников разрядных плат, равных приблизительно 10 *мв*, и управления последующими схемами на полупроводниковых триодах, требующих для этого ток в несколько миллиампер. Дополнительное требование к этому усилителю заключается в том, чтобы, несмотря на разнополярные входные сигналы, на выходе усилителя были импульсы одной полярности.

В соответствии с этими требованиями схема усилителя считывания представляет собой двухкаскадный усилитель с трансформаторным входом и трансформаторной связью между каскадами, причем на входе второго каскада имеется диодная мостиковая выпрямительная схема. На выходе усилителя считывания имеется синхронизирующая схема совпадения на двух полупроводниковых триодах, соединенных параллельно и работающих на общее коллекторное сопротивление нагрузки. Экспериментальные результаты показали надежность работы описываемого запоминающего устройства при изменении основных параметров не более, чем $\pm 10\%$ и при высоких температурах (до 100°).

Описываемое запоминающее устройство содержит 18 500 запоминающих магнитных сердечников, 48 координатных магнитных сердечников и 160 полупроводниковых триодов, из которых 62 являются мощными, а остальные — маломощными. Приводятся схемы усилителей записи и считывания, осциллограммы их работы и фотографии блоков описываемого запоминающего устройства. Б. И. Стрелков

794. Ферриты и титанаты в качестве основных элементов запоминающих и управляющих схем. Ферриты und Titanate in Steuerelementen für Schalt-und Speichersysteme. Herold Kurt), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 111—114, 223 (нем.; рез. англ.)

Освещены основные принципы работы ферритовых элементов с прямоугольной петлей гистерезиса (в том числе трансфлюксоров) и ферроэлектрических конденсаторов с прямоугольной петлей «электрического гистерезиса». Проводится аналогия между ними и выясняются их сравнительные недостатки и преимущества (в частности, с точки зрения соотношения сигнал/помеха и зависимости этого соотношения от качества элементов).

Рассматриваются две аналогичные друг другу схемы вентиля на 2 выхода, одна из которых построена на 3 ферритовых сердечниках, а другая — на 3 ферроэлектрических конденсаторах. Библ. 8 назв.

А. А. Крупский

795. Некоторые сведения о вычислительных и управляющих схемах на ферритовых тороидальных сердечниках. Гиллерт (Einiges über Rechen- und Schaltkreistechnik mit Ferrit-Ringkernen. Gillert Hans), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 115—117, 223 (нем.; рез. англ.)

Приводятся общие соображения по проектированию простейших схем вычислительной техники на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса. Вводится понятие о зоне устойчивой работы таких сердечников, их основных параметрах (коэрцитивная сила, коэффициент прямоугольности и т. д.) и требованиях, предъявляемых к этим параметрам. Рассмотрена временная диаграмма работы вентильной схемы на несколько совпадений, построенной на одном сердечнике с прямоугольной петлей гистерезиса, и уравнения работы такой схемы в символах математической логики. В качестве примера приводится полная схема двоичного сумматора последовательного действия на 7 сердечниках и краткое описание ее работы. Библ. 3 назв.

А. А. Крупский

796. Цифровой дифференциальный анализатор (Digital-analog computer), Proc. IRE, 1955, **43**, № 7, 18 (англ.)

Лаборатория Ванга (Wang Laboratories, Cambridge, Mass.) сообщает о постройке электронного цифрового дифференциального анализатора «Ведатор» (РЖМат, 1955, 4747).

Вычислительная машина составлена из нескольких стандартных блоков. Конструкция этих блоков дает возможность легко расширять вычислительные возможности машины, если возникают задачи, требующие большого объема вычислений. Решение получается в виде 5-значных десятичных чисел. В качестве выходного устройства может использоваться электрическая пишущая машинка. Данные могут выводиться по нескольким каналам на вычерчиватель кривых или на перфокарты. Приводится фотография машины. Г. И. Танетов

797. Преобразование информации из непрерывной формы в цифровую (Analog-digital conversion), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 11, 1090 (англ.)

Сообщение фирмы «Эпско» (Epsco) о выпуске преобразователя непрерывной информации в цифровую, названного «Датрак», модель «Е», который делает в 1 сек. 2 преобразования в цифровую форму и 30 обратных преобразований. Точность преобразования: $\pm 0{,}01\%$ или последняя значащая цифра. Имеется 3 диапазона преобразования: $\pm 99{,}999$ *в*; $\pm 9{,}9999$ *в* и $\pm 0{,}99999$ *в*. См. также РЖМат, 1956, 6242. А. И. Щуров

798. Системы автоматического получения данных измерения. Стерн (Automatic intelligence gathering systems. Stern Robert K.), ISA Jornal, 1955, 2, № 5, 154—158 (англ.)

Описывается система автоматического снятия результатов измерения и представления их в цифровой форме, удобной как для непосредственного использования в цифровых счетных машинах, так и для передачи на расстояние по телеграфу. Система разработана фирмой «Фишер энд Портер» (Fischer & Porter Co.). Для снятия измерений используются мостовые схемы автоматических самобалансирующихся потенциометров, данные которых с помощью электромеханических преобразователей (шаговых искателей) представляются в цифровой форме. Указывается, что для использования в промышленных условиях электромеханические преобразователи непрерывных данных более удобны, чем быстродействующие, но сложные электронные преобразователи, использующие импульсную технику. Как пример описана автоматическая система, позволяющая измерять электрические величины, а также давление, поток и температуру газов. Приводятся блок-схема и фотографии аппаратуры. В. П. Парамонов

799. **Моделирующие установки. Ванс, Хаттер, Леман, Уодлин** (Analog computers. Vance-A. W., Hutter E. C., Lehmann J., Wadlin M. L.), Advances Electronics and Electron Phys. 7, New York, 1955, 363—398 (англ.)

Изложены вопросы развития решающих элементов, построения систем электронных моделирующих установок и их применения.

В разделе «Решающие элементы» рассматриваются принципы работы различных схем решающих усилителей, множительных устройств и функциональных преобразователей и дается краткая характеристика каждой схемы. Рассматриваются следующие методы борьбы с дрейфом нуля усилителей постоянного тока: а) преобразование сигнала постоянного тока в сигнал переменного тока — усиление — обратное преобразование; (б усилители с модуляцией и демодуляцией сигнала механическим вибратором; в) усилители с модуляцией и демодуляцией сигнала фотовибратором.

Краткие характеристики описанных множительных устройств: а) электроннолучевой множитель с ширмой и фотоумножителем имеет точность 2% на частоте 50 *гц* и полосу пропускания от 0 до 10 *кгц*; б) специальная электроннолучевая трубка-множитель обеспечивает точность 2%, максимальное выходное напряжение 3 *в*; в) множители, работающие по принципу решения уравнения $xy = [(x+y)^2 - (x-y)^2]\,y$, используют в качестве квадратора нелинейное сопротивление (тирит) или диодную схему и обеспечивают точность 0,5%, частота умножаемых переменных может быть более 50 *кгц*; г) множитель, использующий логарифмическую зависимость «обратного» триода (т. е. такого триода, у которого сетка выполняет функции анода и анод — функции сетки), обеспечивает точность 5%, лучшая точность получается при использовании магнитного усилителя; д) точное множительное устройство работает по принципу преобразования сигнала переменных x и y в проводимости с помощью счетных и релейных цепей; е) импульсное множительное устройство, осуществляя широтную и амплитудную модуляцию импульсов пропорционально переменным x и y, выдает произведение с точностью 0,01% при однополярном сигнале и с точностью 0,1% при двухполярном сигнале и частоте 200 *гц*; ж) множительное устройство с ограничителями работает по принципу оценки площадей трапеций, получаемых в результате усечения вершин калиброванной треугольной волны пропорционально переменным x и y.

Краткие характеристики описанных функциональных преобразователей: а) потенциометрический преобразователь с распайкой согласно заданной функции; б) функциональный преобразователь с двумя следящими системами, работающий аналогично двухкоординатному регистрирующему устройству; обеспечивает статическую точность 0,2%; в) электроннолучевой функциональный преобразователь с ширмой, фотоумножителем и оптической системой для фокусировки луча; обеспечивает статическую точность 0,5%; г) функциональный преобразователь, использующий диодные схемы; обеспечивает точность 0,1%; д) электронный функциональный преобразователь, работающий аналогично потенциометрическому преобразователю (пункт а), но без электромеханического привода.

Системы моделирующих установок проектируются как для скоростного решения с выходом на электроннолучевую трубку, так и для медленного решения с записью выходных данных на бумажную ленту, причем точность первых — до ±5%, а вторых — лучше 1%.

Рассматриваются типовые схемы построения систем моделирующих устройств, в частности установка «Тайфун» (Typhoon), которая предназначена для решения проблем, связанных с проектированием управляемых снарядов. Установка включает пять моделирующих устройств для моделирования цели, узла наведения, аэродинамических сил, изменения массы и момента инерции снаряда и решения уравнений движения.

Программирование установки (набор задачи) осуществляется вставлением штеккеров в наборное поле через перфорированную карту, установка масштабных коэффициентов производится регулировкой потенциометров или с помощью магазинов сопротивлений. Рассмотрены новые методы программирования: съемное наборное поле и наборное поле, построенное по типу считывающих устройств в цифровых вычислительных машинах, причем на перфокарте программируется не только соединение элементов установки, но и установка масштабных коэффициентов.

Дается краткий обзор анализа ошибок решения и методов контроля.

Использование моделирующих установок в физике, химии, биологии, геологии, медицине, математике, экономике и других науках, а также для моделирования полета и производственных процессов проиллюстрировано на конкретных примерах.

В математике моделирующие устройства используются для решения статистических задач, интегральных уравнений, задач булевой алгебры, уравнений в частных производных, задач о собственных значениях, линейных и нелинейных уравнений, возникающих при решении технических проблем, и для получения корреляционных функций. Библ. 62 назв.

П. В. Тихонов

800. **Построение функциональных генераторов на основе теории непрерывных дробей. Болн** (Synthesis of function generators by continued fraction theory. Bolie V. W.), Tele-Tech, 1956, **15**, № 3, 88—90, 184—187 (англ.)

Дается краткий обзор методов образования функциональных зависимостей. Указывается на возможность представления функций [например, arctg x, tg x и $\ln(1+x)$] в виде непрерывных дробей.

Показано, что входное сопротивление цепной схемы из последовательно соединенных ячеек, имеющих последовательные (z_1; z_3; z_5 и т. д.) и параллельные (z_2; z_4; z_6 и т. д.) сопротивления, представимо в виде непрерывной дроби вида

$$z = z_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{z_2} + \cfrac{1}{z_3 + \cfrac{1}{z_4 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Указывается, что выполнение последовательных элементов цепной схемы z_1, z_3, z_5 и т. д. в виде перемен-

ных сопротивлений, величины которых пропорциональны $(1-x)$, $2(1-x)$, $3(1-x)$ и т. д., и выполнение параллельных элементов z_2, z_4, z_6 и т. д. в виде потенциометров, положения ползунков которых пропорциональны x, $2x$, $3x$, $4x$ и т. д., обеспечивают зависимость входного сопротивления цепной схемы вида $x/\operatorname{arc\,tg} x$.

Представлены схема соединения и форма выполнения элементов для получения зависимостей $x/\operatorname{tg} x$ и $\ln(1+x)$, а также зависимость погрешности воспроизведения от числа элементов в цепной схеме при воспроизведении $\ln(1+x)$. И. М. Витенберг

801. Универсальный электронный переключатель для применений в моделирующих и автокорреляционных устройствах. Диамантидес (A multipurpose electronic switch for analog computer simulation and autocorrelation applications. Diamantides Nick D.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 4, 197—202, 256 (англ.)

Описан мостовой диодный переключатель и приведены примеры его использования, в частности в качестве импульсного модулятора. Входное напряжение, поступая на одну из диагоналей моста, модулируется импульсами, поданными в другую диагональ от генератора. Период и скважность импульсов могут произвольно задаваться. Приведена схема счетчика однополярных импульсов с накопительной емкостью, включенной через переключатель в обратную связь усилителя. Показана возможность применения переключателя в схеме квантования входного напряжения по времени, которая в свою очередь может быть использована в качестве блока задержки автокоррелятора. Приведены две блок-схемы автокоррелятора. И. К. Волков

802. Моделирующие устройства на немецкой промышленной выставке 1957 г. (Analog-Rechenanlagen auf der Deutschen Industriemesse 1957), Elektronik, 1957, 6, № 6, 185—187 (нем.)

Краткий обзор аппаратуры, демонстрировавшейся на немецкой промышленной выставке 1957 г. в Ганновере. Приводятся некоторые данные, характеризующие эту аппаратуру. Г. Г. Рабинович

803. Увеличение времени интегрирования интегратора. Майерс (Extending the operational time of analog integrators. Myers George H.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 34—35 (англ.)

Рассматривается интегрирование с помощью операционного усилителя постоянного тока в течение длительных интервалов времени. Время интегрирования в подобных устройствах существенно зависит от величины «дрейфа нуля» и величины рабочего диапазона для выходной величины. Одним из эффективных способов увеличения точности интегрирования при больших постоянных времени интегрирующего звена является увеличение емкости в цепи обратной связи усилителя, однако этот способ часто влечет за собой чрезмерное увеличение размеров конструкции. Поэтому автором рекомендуется для расширения рабочего диапазона по времени искусственное увеличение шкалы выходной величины за счет включения на выходе интегрирующего звена специального релейного датчика, счетчика и преобразователя цифровой информации в непрерывную. В счетчике добавляется или вычитается единица в тех случаях, когда напряжение на выходе интегрирующего звена достигает соответственно максимального или минимального значения. При этом одновременно разряжается и емкость интегрирующего звена.

Этот метод наиболее эффективен при необходимости увеличить время интегрирования по сравнению с нормальным в 1000 раз и более. Г. М. Петров

804. Моделирующая установка, предназначенная для воспроизведения реакции на ступенчатое возмущение с частотами до 2000 *гц*. Морроу, Ризен (Shock spectrum computer for frequencies up to 2000 cps. Morrow Charles T., Riesen Donald E.), J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, № 1, 93—101 (англ.)

Описаны моделирующие устройства для решения уравнения вынужденных незатухающих гармонических колебаний. В качестве правой части могут использоваться периодические колебания, поступающие извне или от собственного запоминающего устройства на магнитной ленте. Моделирующее устройство в таком виде удобно применять для определения реакции механических конструкций на ударные воздействия; с этой целью колебания различных частей конструкции, возникающие под воздействием ударной нагрузки, запоминаются на магнитной ленте и затем периодически подаются на моделирующее устройство 2-го порядка, собственная частота которого может плавно изменяться в широком диапазоне частот (от 50 до 2000 *гц*). По максимальной амплитуде и соответствующей ей частоте колебаний отдельных узлов конструкции судят о качестве конструкции. Описаны оригинальные схемы генераторов незатухающих колебаний, содержащие как активные, так и пассивные звенья, а также представлены результаты решения на установке ряда практических задач. Г. М. Петров

805. Техника, используемая при решении на электрических моделях с переменным масштабом времени задач управления процессами. Медкеф, Маттьюс (Techniques used in the solution of process control problems by means of variable time base analogue computers. Medkeff R. J., Matthews H.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 28—42, discuss. 42 (англ.)

Приведена классификация электромоделирующих устройств. Различаются: 1) математические моделирующие устройства для решения систем уравнений; 2) прямые (или физические) электрические модели, состоящие из пассивных элементов и использующие явления аналогий между силой и напряжением, скоростью и током, положением и зарядом и т. п.; 3) абстрактные электрические модели, настраиваемые на воспроизведение переходных характеристик данных реальных процессов; 4) абстрактные электрические модели, воспроизводящие нелинейные характеристики элементов систем автоматического регулирования.

Указывается на необходимость изменения масштаба времени при электрическом моделировании процессов, происходящих в течение часов или дней.

Большинство электрических моделей, используемых для изучения задач управления, объединяет характеристики всех вышеописанных устройств. Показано, что с помощью последовательного включения *RC*-цепей можно воспроизводить переходные характеристики инерционных систем, в частности систем распространения тепла. Приведена характеристика систем с запаздыванием и представлена функциональная схема электрической модели, состоящей из 40 последовательно включенных моделей инерционных систем, выходные напряжения которых суммируются с определенными коэффициентами. Кратко описана схема для исследования системы управления процессом, состоящая из описанной электрической модели процесса с запаздыванием и элементов, воспроизводящих систему управления. Приведены результаты электрического моделирования системы для различных вариантов управления. Указывается, что описанная электрическая модель стоит не более 5000 долл. и может быть использована не только для исследовательских работ, но и для тренировки и обучения персонала, обслуживающего процесс. И. М. Витенберг

806. Тригонометрическое моделирующее устройство, использующее линейные элементы. Абу-Хусейн (A trigonometric analogous computer using linear elements. Abou-Hussein M. S. M.), J. Scient. Instrum., 1957, 34, № 3, 126—127 (англ.)

Рассматривается принцип построения тригонометрических моделирующих устройств с помощью *RC*-цепочек, к которым прилагается напряжение переменного тока. Рабочий диапазон аргумента тригонометрических функций при этом не должен выходить за пределы 0÷90°. Указывается, что на основе изложенной методики можно осуществить сложное тригонометрическое вычислительное устройство, схема которого будет содержать только линейные элементы *R* и *C*.

Г. М. Петров

807. Операционные электронные моделирующие вычислительные устройства. Мартинес (Operational electronic analog computers. Martinez Hugo M.), ISA Journal, 1957, 4, № 3, 82—88 (англ.)

Приводится классификация вычислительных устройств, применяемых для решения дифференциальных уравнений. Все современные вычислительные устройства подразделяются на три главных класса: операционные моделирующие вычислительные устройства, электрические модели и цифровые вычислительные устройства. К первому классу относятся операционные электронные моделирующие вычислительные машины и механические дифференциальные анализаторы, в которых выполняются математические операции над переменными, представленными в непрерывной форме. Ко второму классу относятся электрические модели, где переменные представляются электрическими величинами, непосредственно моделирующими процессы в исследуемых физических системах. Математические операции в таких устройствах не выполняются. В третий класс входят универсальные цифровые вычислительные машины и цифровые дифференциальные анализаторы, в которых математические операции выполняются над переменными, изменяющимися дискретно. Дается краткое описание принципа работы всех указанных выше типов вычислительных устройств с иллюстрацией на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, описывающего процесс демпфированных колебаний массы, подвешенной на пружине.

Б. И. Стрелков

808. Специальные решающие элементы дармштадтского электронного моделирующего устройства. Ден (Special computer units in the Darmstadt repetitive electronic analog computer. Dhen W.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 46—48 (англ.; рез. франц.)

В Дармштадтском техническом университете разработано электронное моделирующее устройство, работающее в режиме повторения решения, образец которого после изготовления будет использован в математическом институте для решения различных нелинейных дифференциальных уравнений и в первую очередь краевых задач и задач на определение собственных значений.

Все решающие блоки устройства будут работать с погрешностью, не превышающей 1%. Для суммирования, интегрирования и умножения на константу используется операционный усилитель с параллельной обратной связью. Каскады усилителя связаны через *RC*-цепочки, причем вместо сеточных сопротивлений на входе каскадов стоят диодные ключи, через которые разряжаются емкости связи в предпусковой период. Такое соединение обеспечивает малую погрешность от «дрейфа нуля». Операционный усилитель имеет коэффициент усиления без обратных связей 10 000, а рабочий диапазон частот достигает 600 *кгц*. Перемножающие устройства построены на основе специальной электроннолучевой трубки с электростатической отклоняющей системой. Погрешности при выполнении операции умножения не превышают 1% в диапазоне частот от 0 до 100 *кгц*.

Нелинейные устройства разработаны в двух вариантах: с фотооптической системой и с нелинейными диодными элементами. Последний вариант обеспечил лучшие технические характеристики. С его помощью удалось воспроизводить нелинейные функции с погрешностью, не превышающей 0,6% за 5 час. непрерывной работы при колебаниях температуры в 10°. Частоты входных сигналов ограничиваются 40 *кгц*. На набор одной функции затрачивается от 15 до 30 мин. Регистрация результатов решения на установке осуществляется с помощью электроннолучевого индикатора и фотоприставки. Кроме этого, кривые могут быть сняты по точкам, в этом случае электроннолучевой индикатор используется в качестве пуль-органа.

Вся установка в целом содержит 4 стойки, на которых размещены 12 интеграторов—каждый с инвертирующим усилителем, 4 суммирующих усилителя с четырьмя входами каждый, 4 блока перемножения, 5 нелинейных преобразователей, один управляющий блок и источники питания. Электроннолучевой индикатор помещен на круглом столе, доска которого свободно вращается вокруг оси, так что изображение на экране может наблюдаться с любой стороны установки. В целом схема содержит 500 электронных ламп, а потребление мощности составляет 3,5 *квт*.

Г. М. Петров

809. Использование моделирующего устройства. Леви (Use of an analogue computer. Levy J. F.), Electr. Rev., 1957, 160, № 6, 229—232 (англ.)

Подробно разбирается методика расчета характеристик электромоторов с помощью моделирующего устройства, построенного на трансформаторах.

И. К. Волков

810. Надежность электронного моделирующего устройства РЕАК. Лавман («REAC» computer reliability. Loveman Bernard), Tele-Tech, 1954, 13, № 3, 79—81, 146, 148, 150 (англ.)

Рассматривается опыт годичной эксплуатации электрической модели РЕАК (REAC) в вычислительном центре «Project Cyclone». Приведена схема компенсационных измерений коэффициента усиления усилителя, работающего в режиме отрицательной обратной связи, и указано, что для 94% случаев погрешность в коэффициенте усиления достигала 0,05%, для 70% случаев — 0,012%, а средняя ошибка была равна 0,01%. Максимальная погрешность проволочных потенциометров, измеренная также мостовым компенсационным способом, лежала в пределах 0,05%.

Указано, что эксплуатация электромоделирующих устройств заключается в необходимых регулировках и ремонтных работах. Регулировка производится не чаще одного раза в неделю и включает в себя настройку нулей усилителей, установку коэффициента усиления и демпфирования в следящих системах и балансировку ограничивающих усилителей. Отмечается, что потенциометры выходят из строя после 1500 час. работы.

Надежность работы электромоделирующего устройства может быть определена коэффициентом надежности $R=100\,[1-S/T]$, где S — ремонтное время, а T — общее время работы аппаратуры, и нормой отказов, определяемой процентом элементов, вышедших из строя за 100 час. работы. По результатам годичной (ноябрь 1952 — октябрь 1953 г.) эксплуатации электрических моделей средняя величина коэффициента надежности была равна 90%, изменяясь от 81% (сентябрь 1953 г.) до 95% (июнь 1953 г.). Общее число часов работы было равно 2527. За это время норма отказов составляла для ламп 0,38%, для вибраторов 0,057%, для серводвигателей 1,08% и для пленочных сопротивлений 0,026%.

Приведен ряд уточняющих цифр по статистике выхода из строя деталей в усилителях и характеру отдельных неисправностей и сделан вывод о высокой надежности электромоделирующих устройств. И. М. Витенберг

811. **Заметка о точности дифференциальных анализаторов. Фукс** (A note on the accuracy of differential analyzers. Fuchs Alexander), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 36 (англ.)

Указывается, что пределы точности моделирующих устройств для решения линейных дифференциальных уравнений были исследованы Мак-Ни (MacNee A. B., Proc. IRE, March, 1952, 40, 303—308).

Рассматриваются решения дифференциальных уравнений, которыми описывается вибрационное реле следящего типа, как при помощи моделирующего устройства, так и аналитическим путем по методу Кохенбергера (Kochenberger R. I., Trans. AIEE, 1950, 69, 270—284). Теория дает возможность предсказывать ошибки в амплитудах и частоте при одинаковых фазовых сдвигах. Для рассматриваемого реле ошибка в определении амплитуды электронной машиной достигла 90% по сравнению с результатом, полученным по методу Кохенбергера. Однако та же машина решила задачу с точностью порядка 10% при подходящем выборе постоянной времени сумматора и интегратора.

В. Л. Евтеев

812. **Метод оценки точности решающих элементов моделирующих устройств, основанный на определении интеграла от квадрата ошибки. Бранс** (An integral-error-squared method for evaluating analog computer components. Bruns Robert A.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 35—36 (англ.)

Рассматривается метод оценки точности следящей системы посредством вычисления интеграла от квадрата ошибки при изменении входной величины от максимума до минимума. Для реализации этого метода дается схема, содержащая операционные усилители постоянного тока с нелинейными обратными связями. Преимущество метода состоит в возможности использования для регистрации погрешностей инерционных самописцев и в возможности оценки точности системы одним числом. Г. М. Петров

813. **Анализ ошибок электронных моделирующих установок. Марсоччи** (An error analysis of electronic analog computers. Marsocci Vello A). IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 4, 207—212, 256 (англ.)

Дается анализ ошибок электронных моделирующих установок, обусловленных ограниченностью частотных характеристик решающих элементов. Для оценки смещения корней (погрешностей) при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами выведено выражение

$$e_n = -\left[s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_0}\right)\right](1 - \sqrt{1 - \delta}),$$

где e_n — величина смещения корня, T_0 — постоянная времени интегратора для низких частот, T_1 — постоянная времени интегратора для высоких частот, T_2 — постоянная времени сумматора, s_n — действительное значение характеристического корня исследуемого уравнения

$$\delta = f(T_0, T_1, T_2, s_n).$$

Показаны преимущества данного метода оценки погрешностей в сравнении с методом Мак-Ни (MacNee A. B., Proc. IRE, 1952, 40, 303—308).

Рассмотрен конкретный пример оценки погрешности, вводимой моделирующей установкой в решение дифференциального уравнения 2-го порядка. П. В. Тихонов

814. **Моделирующие устройства для управления производственными процессами. II. Амбер** (Analog computors for machine control. II. Amber George H.), Electr. Manufact., 1955, 56, № 4, 145—153 (англ.)

Дается обзор принципов построения моделирующих устройств, выполняющих математические операции: сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование, векторные и тригонометрические преобразования, преобразование координат, ограничение параметров по модулю и отбор параметров по заданному принципу.

Рассмотрены области применения моделирующих устройств в промышленности, изложен порядок проектирования моделирующего устройства, предназначенного для управления различного рода механизмами, вопросы составления и упрощения структурных схем, согласование масштабов переменных параметров и порядок контрольных испытаний разработанного устройства. П. В. Тихонов

815. **Применение техники моделирования для решения задач управления ядерным реактором и обеспечения безопасности. Вильсон** (The application of analogue computing techniques to the solution of overall nuclear reactor control and safety problems. Wilson I.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 191—197 (англ.; рез. франц.)

Обосновывается целесообразность применения моделирующей установки при проектировании атомных электростанций для анализа стабильности управления, изучения условий аварии и безопасности и исследования режимов пуска и нагрузки реактора и электростанции в целом.

Рассмотрены дифференциальные уравнения процессов в ядерном реакторе и других объектах атомной электростанции с точки зрения возможности воспроизведения их решающими элементами моделирующих устройств.

Приведена фотография и кратко рассмотрены особенности разработанной электронной модели атомной электростанции. Основные решающие элементы электронной модели электростанции построены на базе электронного усилителя постоянного тока, а множительные устройства — электромеханического типа. Малая величина ложного входного сигнала (меньше 10^{-11} *а*) в усилителях постоянного тока и хорошее качество конденсаторов (высокое сопротивление изоляции и низкая диэлектрическая постоянная) позволяют моделировать процессы с постоянными времени порядка 5000 сек. и осуществлять процесс «снятия» данных с конденсатора в ходе процесса.

Моделирующая установка снабжена блоком запаздывания конденсаторного типа, в котором время запаздывания является функцией скорости вращения конденсатора. Конденсаторы в количестве 100 штук служат ячейками памяти. Приводятся результаты анализов некоторых типов процессов. П. В. Тихонов

816. **Моделирующая установка для моделирования динамики атомной электростанции. Мак-Ласки** (An analogue computer simulating the kinetics of a complete nuclear power station. Mac Lusky G. J. R.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 170—174 (англ.; рез. франц.)

Моделирующая установка предназначена для моделирования процессов управления и работы атомной электростанции, параметры которых меняются во времени, как-то: тепловой выход реактора, перемещение регулирующего стержня, температуры входа и выхода устройства охлаждения реактора и др. Установка включает в себя модель реактора, модель сек-

ции управления и модель термодинамических процессов.

Модель реактора, воспроизводящая его динамику, состоит из интегратора, масштабного усилителя, 10 цепей *RC* для воспроизведения эффекта задержанных нейтронов и множительного устройства электромеханического типа. Используется система изменения масштаба всех параметров процесса в момент достижения граничных значений одним из параметров с целью значительного расширения диапазона изменения изучаемых параметров (до 10^{10} раз). Изложен метод устранения ошибки, вносимой множительным устройством вследствие значительной постоянной времени (0,5 сек.). Поскольку все реакторы описываются однотипными уравнениями, модель реактора построена по жесткой схеме, допускающей регулировку только некоторых параметров.

Модели секции управления и термодинамических процессов, наоборот, построены по типу универсальных моделирующих установок. Модель секции управления состоит из 6 решающих элементов и воспроизводит процессы управления регулирующим стержнем и автоматического запуска и управления атомной электростанцией. Модель термодинамических процессов, воспроизводящая температурные условия в реакторе и теплообменниках, состоит из 30 решающих усилителей и 6 множительных устройств электромеханического типа, включающих потенциометры для изменения коэффициентов во времени. Модель термодинамических процессов снабжена блоком запаздывания магнитного типа, работающего с лентой 25,4 *мм* на скоростях от 19 до 190 *мм/сек*. Запись проводится на 16 дорожках. Решающий усилитель построен на базе электронного усилителя постоянного тока с компенсацией нуля методом «модуляция — демодуляция». Первый каскад усилителя собран на двух электромеханических лампах (М1403), для снижения сеточного тока до $3 \cdot 10^{-13} a$. Коэффициент усиления усилителя 50 000. Выходное напряжение меняется на ± 50 *в* при нагрузке 10 *ком*. Долговременный дрейф нуля ± 5 *мкв*.

П. В. Тихонов

817. **Об одном применении электронного моделирующего устройства. Вос** (Eine Anwendung der elektronischen Analog-Rechenmaschine. Vos J. de), Regelungstechnik, 1956, 4, № 7, 161—165 (нем.; рез. англ.)

Отмечается, что многие задачи физики сводятся к решению дифференциального уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами, и рассматривается метод решения на электронном моделирующем устройстве уравнения Матье вида $\frac{d^2y}{dx^2} + c\varphi(x)\,y = 0$, где $\varphi(x)$ — функция, симметричная относительно $x = 1$, а C — коэффициент, который должен изменяться при исследовании от решения к решению. Приведены основные положения теории суммирования и интегрирования с помощью операционных усилителей и блок-схема решения уравнения Матье на электронном моделирующем устройстве.

Подробно рассматривается способ расчета масштабов при моделировании уравнения Матье на моделирующем устройстве EASE.

И. М. Витенберг

818. **Электромеханические устройства, воспроизводящие функции комплексного переменного (применительно к расчету систем автоматического регулирования). Гинзбург С. А.**, Тр. 2-го Всес. совещания по теории автомат. регулирования. 3. М.—Л., 1955, 130—139. Выступления, 140—143

Рассматривается ряд схем электромеханических систем для исследования функций комплексного переменного (определения корней уравнений, построение конформного преобразования для заданной функции комплексного переменного и др.).

В. Д. Князев

819. **Изучение посадки самолета с помощью моделирующего устройства. Хаус** (Possibilité d'étude de l'approche d'un avion par l'emploi de calculateur analogique. Haus Frédéric), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 159—164 (франц.; рез. англ.)

С помощью моделирующего устройства изучалось поперечное движение самолета при сближении его с посадочной полосой. Рассмотрен общий случай, когда направление полета самолета отличается от направления посадочной полосы на данный угол. Наложенные условия постоянства передаточного отношения и отсутствия ступенчатого перемещения в механизме системы управления самолета позволили применить в расчетах линейные уравнения движения самолета. Результаты вычисления дали возможность оценить влияние постоянных коэффициентов в уравнениях движения самолета и вскрыть некоторые особенности поведения самолета при этих условиях.

В. А. Комаров

820. **Автоматическое электромоделирующее устройство для исследования систем вентиляции шахт. Скотт, Хадсон** (An automatic analogue computor for the solution of mine ventilation networks. Scott D. R., Hudson R. F.), J. Scient. Instrum., 1953, 30, № 6, 185—188 (англ.)

При электрическом моделировании систем вентиляции воспроизводится зависимость $P = RQ^2$, где P — давление воздуха, Q — количество протекающего воздуха в единицу времени, а R — постоянная величина, определяемая характеристиками воздуховода. Указанная зависимость реализуется при представлении давления воздуха падением напряжения на сопротивлении R_0 и представлении количества протекающего воздуха величиной тока, протекающего через сопротивление, если сопротивление R_0 выполнить таким образом, чтобы его величина была пропорциональна величине протекающего тока. В этом случае падение напряжения на сопротивлении будет пропорционально квадрату величины протекающего через него тока, а электрическая модель системы вентиляции шахты может быть выполнена в виде сетки сопротивлений, включенных в соответствии со схемой системы вентиляции.

Изменение величин сопротивлений, характеризующих определенные участки системы вентиляции, пропорционально величинам протекающих через них токов производится с помощью специальных следящих систем, число которых должно быть равно числу участков в исследуемой вентиляционной системе.

Чувствительным элементом следящей системы является дифференциальное реле, через одну обмотку которого протекает ток цепи сопротивления, подлежащего изменению, а через другую обмотку — ток цепи обратной связи, образованный путем подачи постоянного напряжения на схему, состоящую из последовательно включенных сопротивления V_0, сопротивления для установки коэффициента R и обмотки дифференциального реле. При неравенстве токов в обмотках двигатель следящей системы изменяет сопротивление V_0 так, чтобы токи в цепях были равны; при этом изменяется и сопротивление R_0, ползунок которого механически связан с ползунком потенциометра V_0. Приведены характеристики дифференциального реле и полная схема следящей системы, включающей систему изменения чувствительности реле и сигнализации. Указывается, что максимальная скорость вращения ползунков потенциометра равна ≈ 7 *град/сек*, а точность установки сопротивления R_0 составляет 5%.

И. М. Витенберг

821. Моделирующая установка для определения движения «механических частиц». Р а н к и н (The «Mechanical particle» an analog computing machine. R a n k i n B a y a r d), Rev. Scient. Instrum. 1954, 25, № 7, 675—678 (англ.)

Рассматривается электромеханическая моделирующая установка для решения уравнений движения заряженной частицы в магнитном поле. Конечный результат представляется в виде графиков, которые вычерчиваются пером регистрирующего устройства на обычной бумаге. Погрешности при вычислении траекторий не превышают 0,5%. Установка отличается возможностью быстрого ввода исходных данных. С ее помощью был решен ряд практических задач, в том числе задача о движении мезонов в магнитном поле.

Г. М. Петров

822. Тактическое моделирующее устройство адмиралтейства (Admiralty tactical simulator), Electr. J., 1957, 158, № 11, 766 (англ.)

В морской тактической школе в Вулидже (Woolwich, Англия) установлена тренировочная установка, разработанная отделом инженерных исследований адмиралтейства. С ее помощью воспроизводятся в учебных целях различные тактические задачи. Установка состоит из большой аудитории и нескольких кабин, которые могут по желанию представлять собою помещения корабля, подводной лодки или самолета.

Контрольная задача ставится штабом, находящимся в аудитории. Учащиеся, разбившись на два противоположных лагеря, размещаются в кабинах, где они должны осуществлять управление «кораблем» или «самолетом». Общее число кабин-«кораблей» составляет 16, из которых 4 могут быть авианосцами, а 6 — подводными лодками. Кроме этого, имеется 12 «самолетов», размещаемых в 4 кабинах. Каждая кабина оборудована аппаратурой контроля, управления и связи.

Картина «боя» в целом наблюдается на большом экране в аудитории. Во время «боя» на экране вычерчиваются траектории «кораблей» и «самолетов». По желанию штаба в «бой» вводятся дополнительно различные цели, торпедные катера, «охотники» за подводными лодками и т. д. Бой может проводиться также и в ускоренном масштабе времени. На установке одновременно может тренироваться около 45 офицеров.

Г. М. Петров

823. Моделирующее устройство в Империал-колледже (Analogue computer at Imperial College), Engineer, 1957, 203, № 5276, 376 (англ.)

Сообщается об установке в Империал-колледже нового моделирующего устройства на сопротивлениях для решения задач по проектированию паровых и газовых турбин. И. К. Волков

824. ТРИДАК — большое моделирующее устройство для имитации полета. Г е й т (Tridac a large analogue computer for flight simulation. G a i t J. J.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 49—53. Discuss., 53—54 (англ.; рез. франц.)

См. РЖМат, 1955, 4048—4050, 6180, 6181; 1957, 6040.

825. ТРИДАК. Имитатор для исследования полета. Ч. 2. Г е й т, Н а т т е р (Tridac. A research flight simulator. Part 2. G a i t J. J., N u t t e r J. C.), Electronic Engng, 1956, 28, № 34, 430—433 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1957, 7538.

Описание моделирующего устройства ТРИДАК (РЖМат, 1955, 4048—4050, 6180, 6181; 1957, 6040).

826. Электронные вычислительные машины. Н е л ь г р е н (Les machines à calculer électroniques. P e l e g r i n M. J.), Electricité, 1954, 38, № 201, 13—20 (франц.)

Первая часть большой обзорной статьи.

В гл. 1 после краткого вступления и исторического введения дается общая характеристика вычислительных машин, рассматривается возможность задания величин непрерывным или дискретным способом, в последнем случае в различных системах счисления (десятичной, двоичной и двоично-пятиричной), и приводится ряд других общих соображений о машинах дискретного и непрерывного действия и их точности. В заключение указываются примеры вычислительных задач в различных областях, требующих механизации.

В гл. 2 дается общая классификация вычислительных машин, начиная с механических приборов непрерывного действия (планиметры, интеграторы и др.). Далее следуют электромеханические и электрические машины непрерывного действия, арифметические машины механические и электронные, машины смешанного типа (например MADDUDA) и специализированные машины. Для каждого типа дана краткая общая характеристика, назван ряд конкретных машин.

К. А. Семендяев

827. Электронные вычислительные машины. П е л ь г р е н (Les machines à calculer électroniques. P e l e g r i n M.-J.), Electricité, 1954, 38, № 203, 75—78 (франц.)

Гл. 1, 2 см реф. 826. Гл. 3 статьи посвящена электромеханическому дифференциальному анализатору непрерывного действия для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дается краткое описание устройства и принципов работы анализатора. Приведен неполный перечень существующих механических анализаторов, указываются некоторые особенности отдельных машин. Отмечается, что в настоящее время подобные устройства больше не строятся, будучи вытеснены электронными цифровыми машинами. К. А. Семендяев

828. Большие вычислительные устройства. К р е м е р (Großrechenanlagen. C r e m e r H u b e r t), Techn. Mitt., 1956, 49, № 12, 552—555 (нем.)

Популярная статья. Кратко изложены принципиальные различия между цифровыми машинами и модулирующими устройствами, приведены сравнительные скорости работы ряда зарубежных цифровых машин, краткие сведения об их устройстве. Е. И. М.

829. О применении цифровых вычислительных машин. М о р с (On the use of digital computers. M o r s e P h i l i p M.), Phys. Today, 1956, 9, № 10, 19—23 (англ.)

На основании опыта работы с цифровыми вычислительными машинами делаются некоторые выводы о целесообразности применения машин. Указывается, что необходимость весьма подробного программирования делает иногда нецелесообразным использование машины. Так, например, счетную машину использовать нецелесообразно, если для проведения расчета «вручную» нужно 3—4 месяца, а повторное решение аналогичной задачи может потребоваться не раньше, чем через год. Приводятся примеры целесообразного использования машин. Указывается, что программирование может быть существенно упрощено при наличии библиотеки подпрограмм. О. Х.

830. Очерк развития автоматических приемов вычисления (продолжение). Р е м о н (Aperçus sur l'évolution des procédés automatiques de calcul (suite). R a y m o n d F. H.), Electronique, 1956, № 116—117, 15—22 (франц.)

Начало см. РЖМат, 1957, 2759.

Дается исторический очерк развития электронных цифровых вычислительных машин. Приводятся фамилии инженеров и перечисляются основные машины, созданных в США, Англии и Франции. Описывается логика построения машин (запоминающее устройство

арифметическое устройство, устройство управления, устройства ввода и вывода). В. П. Кузнецова

831. Возможности развития электронных вычислительных устройств. Пфау (Entwicklungsmöglichkeiten elektronischer Rechenanlagen. Pfau Ernst), Elektronik, 1957, 6, № 4, 87—88 (нем.)

Краткое изложение статьи Голдстайна в швейцарском журнале (РЖЭ, 1958, 4409) о перспективах повышения скорости машин. Высказывается мнение, что время умножения 1 *мксек* является практически предельным. Е. И. Мамонов

832. Вычислительные машины для коммерческих расчетов. Марп (Business computers. Marpe Donald), Minnesota Technolog, 1957, **37**, № 4, 276, 305 (англ.)

Отмечается возможность и экономическая целесообразность использования в коммерческих расчетах вычислительных машин малых и средних размеров, поскольку такие машины позволяют с меньшей затратой труда выполнять операции, производимые с помощью обычных арифмометров и табуляторов. Отмечается высокая надежность и компактность современных вычислительных машин, и приводятся примеры использования машин для коммерческих расчетов. З. Д. Доброхотова

833. Основы электронного расчета. Щульце (Grundgedanken zum elektronischen Rechnen. Schulze H.), Elektrizitätswirtschaft, 1957, 56, № 10, 353—354 (нем.; рез. англ., франц., исп.)

Краткое описание назначения и использования двоичной системы. Дано объяснение принципа построения схем машины УНИВАК-Фактроник (UNIVAC Fac. Tronic) А. Ф. С.

834. Цифровая автоматизация. Клейн, Вильямс, Морган (Digital automation. Klein Martin L. Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 3, 449—456 (англ.)

Популярное изложение основных принципов устройства и работы цифровых вычислительных машин. Описываются основные блоки цифровых вычислительных машин: входные, запоминающие, арифметические и выходные устройства.

Прилагается таблица характеристик некоторых американских цифровых вычислительных машин. Б. И. Стрелков

835. Обзор развития вычислительной техники в течение 1954 г. Браун (Review of electronic computer progress during 1954. Brown David R.), IRE Trans. Electronic Comput. 1955, EC-4, № 1, 33—38 (англ.)

836. Цифровые вычислительные машины и моделирующие устройства в строительной технике. Намьет (Analog and digital computers in civil engineering. Namyet Saul), J. Boston Soc. Civil Engrs, 1957, 44, № 1, 36—56 (англ.)

Разбирается принцип действия цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств; указываются возможности и приводятся примеры их использования в строительной технике. Подробно разбирается пример использования цифровых вычислительных машин для выбора наиболее рациональной трассы прокладки шоссейных дорог по данным стереоскопической аэрофотосъемки. З. Д. Доброхотова

837. Новый вычислительный центр в Лондоне. Брит. пром-сть и техника, 1956, **31**, № 3, 98

Сообщается, что в вычислительном центре фирмы «Инглиш Электрик» (English Electric Company) в Лондоне установлена цифровая электронная универсальная вычислительная машина ДЭЮКЕ (DEUCE) и приведены краткие характеристики и фотография общего вида машины.

См. также РЖМат, 1955, 4740; 1956, 2510, 2511, 4140, 5564, 7748. В. П. Кузнецова

838. Открытие вычислительного центра в Мюнхенской высшей технической школе. Лёвенфельд (Eröffnung des Rechenzentrums an der Technischen Hochschule München. Loewenfeld K.), Maschinenmarkt, 1956, 62, № 52, 5—6 (нем.)

Сообщается об открытии в Мюнхенской высшей технической школе вычислительного центра (РЖМат, 1957, 4443). Г. С. Горячева

839. История развития счетных машин. Общие замечания по конструкции запоминающего устройства. Такэда (電子計算機の成長. 貯蔵装置を中心としての概説. 武田楠雄), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 3, 51—55 (японск.)

840. Общие сведения о математическом аппарате автоматического регулирования. Найтингейл (A basic outline of servo mathematics. Nightingale J. M.), Mach. Design, 1956, 28, № 13, 74—81 (англ.)

Популярное изложение преобразования Лапласа и его применения для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Даны основные понятия автоматического регулирования: передаточная функция, импульсивная функция, единичный скачок, синусоидальное воздействие, частотная характеристика. Библ. 8 назв. М. М. Симкин

841. Электронные вычислительные машины и обработка информации в Дармштадте. Бирман (Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung in Darmstadt. Biermann L.), Phys. Bl., 1956, **12**, № 8, 368—369 (нем.)

Краткое сообщение о тематике докладов на Дармштадской конференции 25—27 октября 1955 г., организованной Обществом прикладной математики и механики. Приводятся некоторые данные о немецких машинах ПЕРМ (PERM), ДЕРА (DERA), G-3, G-2 и др. Е. И. М.

842. Работы по электронным счетным машинам и машинам для обработки информации в Институте низкочастотной техники Высшей технической школы в Вене. Земанек (Die Arbeiten an elektronischen Rechenmaschinen und Informationsbear beitungsmaschinen am Institut für Niederfrequenztechnik der Technischen Hochschule in Wien. Zemanek Heinz), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 56—59, 227. Diskuss., 59 (нем.; рез. англ.)

Сообщается, что в 1952 г. в Институте были начаты работы по созданию электронной цифровой машины с фиксированной программой для статистических расчетов. Машина пока еще не построена. Было построено моделирующее устройство, на котором можно вычислять многочлены до 6-го порядка. Для учебно-исследовательских целей была изготовлена универсальная трехадресная релейная машина. Запоминающее устройство хранит 16 18-разрядных чисел. Построена также машина для решения логических задач. В программе Института предусмотрена разработка последовательной машины с использованием полупроводниковых триодов. Предполагается также проведение работ по созданию аппаратуры для анализа и записи речи. Е. И. М.

843. Электронный переводчик в работе (Der Elektronendolmetscher an der Arbeit), Bürotechn. Organis., 1956, 4, № 1, 34—36 (нем.)

Популярно излагаются принципы автоматического перевода с русского языка на английский на машине ИБМ-701 в США. Е. И. М.

844. Вычислительный робот в качестве пророка (Rechenroboter als Prophet), Universum, 1957, **12**, № 5, 150 (нем.)

Краткое популярное описание применения вычислительной машины УНИВАК для подсчета голосов во время президентских выборов в США. Е. И. М.

845. **Влияние малых нелинейностей на динамическую точность измерительных и контрольных систем. Быховский М. Л.**, Тр. Ин-та машиновед. АН СССР. Семинар по точности в машиностр. и приборостр., 1957, вып. 9, 3—21

846. **Об обобщении схемы гидравлического прибора, позволяющем решить системы некоторых нелинейных алгебраических уравнений. Александров А. Я.**, Тр. Новосибир. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1955, вып. 12, 22—29

Показывается, как построить гидравлические модели для решения систем уравнений вида

$$A_1x^{\alpha_1} + A_2y^{\beta_1} + \ldots + A_nu^{m_1} = E_1,$$

$$B_1x^{\alpha_2} + B_2y^{\beta_2} + \ldots + B_nu^{m_2} = E_2$$

и несколько более общего вида. Ю. А. Шрейдер

847. **Об одном механическом преобразователе. Артоболевский И. И.**, Докл. АН СССР, 1957, 113, № 1, 43—45

848. **Электронная читающая машина** (Electronic reading machine), World Sci. Rev., 1957, May, 33—36 (англ.)

Сообщается об электронном читающем автомате ЭРА (ERA — Electronic Reading Automaton), который позволяет наносить данные на перфоленту или на перфокарты непосредственно с документов, «читая» с них нужные данные.

Для опознания печатных знаков используется световой поток, отраженный от документа. Каждый знак условно делится на сто одинаковых черных и белых площадок. Поэтому после чтения одной напечатанной цифры в машине образуется 100-разрядный двоичный код, хотя для опознания цифр от 0 до 9 достаточно 4-разрядного кода. Избыточность кода используется для исправления ошибок, которые могут возникнуть в результате помарок печати, неровности шрифта и т. п. Так как цифры могут быть сдвинуты относительно центра строчки, то в машине предусмотрен режим, когда каждая цифра читается два раза: первый раз для того, чтобы определить положение цифры относительно центра строчки, и во второй раз для того, чтобы получить ее код. Предусмотрена возможность выборочного чтения лишь нужных частей документа. Машина может читать со скоростью 120 знаков в 1 сек. Сообщается, что скорость работы может быть повышена до 500 знаков в 1 сек.

В качестве выходного устройства автомата используется перфоратор. Достоинством автомата ЭРА является то, что для чтения различных шрифтов он не требует специальной настройки. А. Н. Чуйкин

849. **Достижения в области электронных читающих машин** (Developments in electronic reading machines), Brit. Communs and Electronics, 1957, 4, № 5, 276—278 (англ.)

Дается описание принципа устройства и основных характеристик двух английских электронных читающих машин: ЭРА (ERA) и Mark Scanning Punch.

Машина ЭРА обладает скоростью считывания 120 знаков в 1 сек., которую можно увеличить до 500 или более знаков в 1 сек. Машина может считывать искаженные и испачканные знаки с документов различных типов, а также способна выбирать нужные для считывания знаки. После считывания машина выдает электрические сигналы, которые могут быть использованы для пробивки перфокарт или в другом подобном оборудовании. Указывается, что скорость пробивки карт машиной ЭРА в 144 раза больше, чем скорость ручного перфорирования, равная 300 картам в час. Принцип работы машины заключается в том, что вертикальный растр электроннолучевой трубки проектируется с помощью фотообъектива на считываемую цифру. Все цифры от 0 до 9 разбиты путем соответствующего хронирования растра на 100 равных участков, каждый из которых в любой момент времени в зависимости от цифры будет или темным, или светлым. Таким образом, после отражения от считываемой цифры луч света, образуемый растром, модулируется по яркости считываемой цифрой. Этот луч подается далее на высокочувствительный фотоумножитель, который преобразует его в видеоимпульсы, несущие кодированную информацию о считываемой цифре. Распознавание цифр осуществляется с помощью логической матрицы, связанной со специальной системой хронирования. Логическая матрица построена на диодах таким образом, чтобы по заданной программе решать ряд логических задач по распознаванию цифр, а также некоторые другие задачи по регулированию положения растра относительно считываемой цифры. Структурно эта матрица представляет собой последовательность схем «ИЛИ» и «И», управляемых сигналами темных и светлых участков.

Машина Mark Scanning Punch представляет собой более простой подход к решению той же задачи передачи написанной информации на перфокарты. В этой машине имеется оптическая система сканирования поверхности считываемого документа, который представляет собой специальную бумагу с нанесенной на ней сеткой. Информация наносится на такую бумагу в виде карандашных отметок, расположение которых и определяет собой их значение. Наличие карандашных отметок на считываемом документе регистрируется рядом фотоумножителей, управляющих перфорирующим механизмом. В машине предусмотрен автоматический контроль правильности перфорации карт. Скорость работы этой машины 100 карт в 1 мин.

Одним из применений такой машины является механизация учета телефонных разговоров. Приводятся блок-схемы и фотографии описываемых машин.

Б. И. Стрелков

850. **Автоматический читающий блок** (Automatic reading-unit), Aircraft Prod., 1957, 19, № 5, 208—210 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные со скоростью, точностью и экономичностью ввода материала при обработке коммерческих данных. Обосновывается необходимость создания читающего автомата.

Сообщается о постройке электронного автомата Solartron ERA, способного считывать десятичные цифры со скоростью 120 знаков в 1 сек. Скорость считывания может быть легко увеличена до 500 знаков. Более поздние модели будут приспособлены также для считывания алфавита.

Описывается принцип работы устройства. Текст помещается перед экраном электроннолучевой трубки с растром. Отраженный от облученного участка бумаги, свет попадает на фотоумножитель и затем в вычислительную часть автомата. В каждый момент времени считывается один знак. С облучаемого участка снимается от 100 до 1000 посылок в зависимости от знака. Определенные комбинации посылок соответствуют тому или иному знаку.

Для непосредственной работы автомата с машиной прочитанные данные могут запоминаться в специальном запоминающем устройстве в двоичной системе счисления. Стоимость автомата составит 20—50 тыс. фунтов стерлингов. З. Д. Доброхотова

851. **Обработка данных экспериментов в аэродинамической трубе с использованием бумажной ленты в качестве запоминающего элемента. Хувер, Уэдел, Брумен** (Wind-tunnel data reduction

using paper-tape storage media. Hoover William R., Wedel John J., Bruman Joseph R.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 2, 101—109 (англ.)

Лаборатория реактивных двигателей Калифорнийского технологического института (Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology) использует для обработки данных, получаемых при испытаниях моделей в двух сверхзвуковых аэродинамических трубах, электронную машину типа «36-102» фирмы «Электродата» (Electro-Data). Описывается система обработки данных. Для эффективного использования аэродинамической трубы необходим быстрый и надежный метод накопления данных. В рассматриваемой системе применительно к особенностям машины запись экспериментальных данных ведется на перфоленте.

Считывание данных производится после достижения устойчивого состояния при изменении α или φ или других параметров. Показания весов и манометров считываются со шкал и набираются на клавишных панелях оператором. После этого нажимается пусковая кнопка и данные последовательно перфорируются в любом порядке, выбранном оператором, на бумажной ленте. Система записи данных имеет до 24 каналов, и ввод данных можно производить по любому из них. Результаты измерений в какой-либо точке записываются в одном канале.

Для контроля записываемых данных перфолента пропускается через печатающее устройство и, кроме того, данные подаются на автоматический вычерчиватель кривых, который выбирает 13 каналов из 24 и вычерчивает 12 кривых, используя 13-ю переменную как независимую. Вычерчиватель принимает 3-значные числа и наносит точки с точностью 0,1% от полной шкалы.

Ввод 5-значных десятичных чисел в цифровую машину осуществляется с перфоленты через фототрансмиттер со скоростью 45 чисел в сек. Имеется еще один фототрансмиттер, через который вводится лента с константами. Результаты набиваются на ленте перфоратором типа БРПЕ (BRPE), дающим 60 знаков в сек.

Главной задачей обработки данных является приведение значений, полученных в системе координат весов, к системе координат, выбранной заказчиком.

Имеется ряд приемов контроля исходных данных в процессе обработки.

Система обрабатывает результаты дневных испытаний за 2 часа, в остальное время машина используется для других вычислений. Предыдущая система с применением вычислительной перфокартной машины «КПК» обрабатывала одну точку за 80 сек., новая система обрабатывает точку за 20 сек. В. Д. Князев

852. **Электронный умножающий перфоратор ускоряет конторские вычисления** (Emp speeds up office arithmetic), Metalwork. Product., 1957, 101, № 18, 759—761 (англ.)

Сообщается, что фирма «Кларксон» (Clarkson (Engineers) Ltd.) применила электронный умножающий перфоратор фирмы «Пауэрс-Сеймас» (Powers-Samas) для составления накладных. Данные вводятся в машину с помощью перфокарт. Описан процесс подготовки данных для нанесения их на перфокарты.

Машина может выполнять умножение двух чисел, делать перекрестное сложение и вычитание четырех чисел, одно из которых может быть ранее полученным произведением, и производить суммирование результатов вычислений или любых других групп чисел. Вычисления могут производиться в фунтах стерлингов или в десятичной системе. Машина также используется для подсчета денежных фондов, для расчета зарплаты рабочих с учетом налогов и премий и для других целей. А. Н. Чуйкин

853. **Цифровое управление.** Фармер (Digital control. Farmer Peter J.), Aircraft Prod., 1956, 18, № 7, 256—267 (англ.)

Дается общее описание цифровой системы управления фрезерным станком, разработанной фирмой «Ферранти» (РЖМат, 1956, 4234, 4235, 5004, 7025).

Приводится конструкция фотоэлектрической измерительной головки, конструкция винта подачи с устройством для выбора мертвого хода и конструкция специального редуктора, обеспечивающего малую потерю мощности и устранение мертвого хода.

В. Д. Князев

854. **Электронная контора.** Херд (The electronic office. Hurd C. C.), Punched Card Annual, 1955—1956, 4, 7—12 (англ.)

Обзор вычислительных машин фирмы «ИБМ» и некоторых применений этих машин в области коммерческих, экономических и научных расчетов.

В 1954 г. была введена в эксплуатацию электронная цифровая вычислительная машина «702» фирмы «ИБМ». Первой фирмой, установившей у себя эту машину, была «Монсанто Кемикл» (Monsanto Chemical Company). Такая же машина была установлена фирмой «ИБМ» на заводе в Поукипси (Poughkeepsie) для составления платежных ведомостей на 8000 чел., планирования производства и ведения инвентарной ведомости. Подобные задачи на атомном заводе фирмы «Дженерал Электрик» выполняла машина, установленная в июне 1955 г.

Сообщается, что машина «702» и более поздняя «705» являются удобными инструментами для ведения коммерческих расчетов. Фирма «Пруденшл Лайф Иншурэнс» (Prudential Life Insurence Company) арендует у фирмы «ИБМ» 7 машин типа «705» и 2 машины «702», расходуя 3,8 млн. долларов в год на арендную плату.

Для научных вычислений фирмой «ИБМ» была разработана машина «704», более мощная, чем «701», и использующая 3 запоминающих устройства на магнитных сердечниках. Для машин «701» и «704» разработано выходное устройство «740» для записи данных с электроннолучевой трубкой, на экране которого появляются вычисленные данные или графики. Выпущен стандартный блок магнитных лент «727».

Спроектирована и построена вычислительная машина «608» (РЖМат, 1956, 3396, 5563) на полупроводниковых триодах с запоминающим устройством на ферритовых сердечниках. В ней нет ни одной электронной лампы. Серийный выпуск машины намечен на 1956 г.

Необходимость в запоминающем устройстве с произвольным выбором информации и почти неограниченной емкостью привела к разработке экспериментального запоминающего блока «305» на 5 млн. цифр (РЖМат, 1956, 824). Это устройство, сконструированное для обработки коммерческих сделок, даст возможность механизировать бухгалтерию и ведение бухгалтерских записей, что ранее не проводилось ввиду дороговизны и сложности. Почти целиком исключается сортировка данных, которая была наиболее дорогой и длительной операцией.

С широким использованием вычислительных машин растет необходимость передачи данных, записанных на перфокартах, на большие расстояния. Приемопередатчик ИБМ (transceiver) дает возможность осуществлять такую передачу путем использования телефонных и радиолиний связи. При чтении перфокарты электронные схемы приемопередатчика вырабатывают кодированные импульсы в виде серий колебаний звуковой частоты. Эти звуковые сигналы воздействуют на перфораторный механизм удаленного приемника, который пробивает точные копии передаваемых перфокарт. После пробивки передатчик посылает сигнал для контроля пробивки. Этот приемопередатчик был испытан между

двумя установками военно-воздушных сил США. Одна фирма авиационных двигателей провела испытание устройства при передаче данных между лабораторией и вычислительным центром.

Упоминается бухгалтерская машина «858» (Cardatype Accounting Machine 858) для приготовления коммерческих документов. Эта машина включает в себя электрическую пишущую машинку, вспомогательную цифровую клавишную панель, оборудование для чтения перфолент и вычислительный блок. Особенностью машины является возможность производить вычисления по заранее заданной программе. В. Д. Князев

855. **Вычислительная машина для зенитной артиллерии. Годфринд** (La machine à calcul de D.T.C.A. Godfrind P.), Revue HF, 1954, 2, № 11, 283—288 (франц.)

Краткое описание математических основ построения специализированной моделирующей машины электромеханического типа, предназначенной для вычисления данных стрельбы зенитной артиллерии. Рассматриваются некоторые способы преобразования решаемых задач и построения блок-схем таких машин.

В. В. Васманов

856 К. **Электронные умножители. Изд. 2-е, доп. и переработ. Чечик Н. О., Файнштейн С. М., Лифшиц Т. М.** М., Гостехиздат, 1957, 575 стр., илл., 21 р. 15 к.

857 К. **Счетная линейка.** Изд. 11-е, стереотипн. **Панов Д. Ю.,** М., Гостехиздат, 1957, 128 стр., илл., 3 р. 15 к.

858 К. **Технические и эксплуатационные характеристики счетных машин. Шапиро И. Л.** М., Госстатиздат, 1955, 244 стр., илл., 8 р. 50 к.

859 П. **Репродукторы для перфорации многопольных карт. Маульь** (Automatic repitition punch for record cards. Record card reproducing punch. Machine for copying data on to record cards. Maul Michael), USA Pat. Cl. 164—115 № 2703616, 2703617, 2703618, 08.03.55 (англ.)

Описываются три автоматических репродуктора для перфорации многопольных перфорационных карт.

Первый репродуктор предназначается для перфорации пробивок в исполнительной карте в соответствии с пробивками предыдущей исполнительной карты или в соответствии с пробивками управляющей карты. Репродуктор имеет два механизма подачи карт: один для исполнительных карт, другой для управляющих карт. Для перфорации пробивок в исполнительных картах имеется один ряд пробивных пуансонов, по одному пуансону на каждую колонку карты, общему для всех полей карты. Восприятие пробивок исполнительных карт производится одним рядом воспринимающих устройств, по одному устройству на каждую колонку, общему для всех полей карты. Аналогичные воспринимающие устройства имеются и для управляющих карт. Для связи воспринимающих устройств с пробивными устройствами служат 4 ряда селекторов: по одному ряду для каждого поля исполнительной карты и по одному ряду для каждого поля управляющей карты. Каждый селектор обслуживает одну колонку поля. Имеется специальное устройство для последовательного включения рядов селекторов при прохождении соответствующих полей исполнительных и управляющих карт мимо воспринимающих устройств.

Исполнительные карты подаются в репродуктор по одной и проходят сначала под пуансонами пробивного устройства, а затем под воспринимающими устройствами. Расстояние между пуансонами и воспринимающими устройствами таково, что если под воспринимающими устройствами проходит какая-либо позиция предыдущей карты, под пробивным устройством движется соответствующая позиция того же поля последующей карты. Воспринимающее устройство управляет перфорацией пробивок в последующей карте в соответствии с пробивками в предыдущей карте. Часть исполнительной карты или вся карта могут быть отперфорированы соответственно пробивками управляющей карты. Для этого управляющая карта движется под своими воспринимающими устройствами синхронно движению соответствующей исполнительной карты под пробивными устройствами. Команды с воспринимающего устройства управляющей карты передаются через селектор управляющей карты на пробивные устройства исполнительной карты.

Второй репродуктор предназначается для перфорации исполнительных карт только в соответствии с пробивками управляющей карты. В этом репродукторе нет второго ряда воспринимающих устройств для исполнительных карт. В нем также отсутствуют два ряда селекторов для исполнительных карт.

Третий репродуктор предназначается для перфорации исполнительных карт только в соответствии с пробивками предыдущей исполнительной карты. В этом репродукторе отсутствуют все механизмы и устройства (падающий механизм, воспринимающие устройства, селекторы), относящиеся к исполнительным картам.

Е. И. Маквецов

См. также: 1, 70, 71, 591, 726, 731, 765, 766

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агапова К. Ф. 84
Аким Э. Л. 503
Александров А. Я. 846
Аллахвердиев Дж. Э. 369 Д
Артин 184
Артоболевский И. И. 847
Ахмедов К. Т. 508

Б

Базу Д. 523
Баранцев Р. Г. 372 Д
Бауман В. А. 376
Бахвалов Н. С. 728
Белецкий А. 337
Беляева Г. М. 725
Белянин В. М. 648
Березин Ф. А. 501, 505
Берлинков М. Л. 168
Бермант А. Ф. 443 К, 623 К
Берштейн И. 314
Бирман М. Ш. 486
Бицадзе А. В. 9
Богушевский К. С. 643
Бокштейн М. Ф. 194
Болтянский В. Г. 211
Бондаренко П. С. 730
Борок В. М. 371 Д
Бочкарев Д. 118, 127
Брадис В. М. 41 Д
Бразма Н. А. 399
Бредихина Е. А. 249
Бродский М. С. 488
Будак Б. М. 401 К
Быховский М. Л. 845

В

Важевский Т. 325
Викторов Б. В. 376
Викторовский Е. Е. 423
Виленкин Н. Я. 503, 504
Вишик М. И. 328
Владимиров В. С. 611
Власова З. П. 739
Вознюк Л. Л. 311
Воробьев Н. Н. 580
Ворович И. И. 392
Выгодский М. Я. 39 К

Г

Гагаев Б. М. 226
Гандин Л. С. 743
Гельфанд И. М. 501
Георгиев Г. 36 К, 437 К
Гинзбург С. А. 818
Глушков В. М. 141
Гордон В. 653 К
Гохберг И. Ц. 480
Граев М. И. 501, 506
Гуревич Б. Л. 370 Д
Гутковский Ф. 30
Нэсэнов Э. Ч. 446 К

Д

Далецкий Ю. Л. 509
Джавадов М. А. 705, 713 Д
Добротин Д. А. 309
Дринфельд Г. И. 672
Дубнов Я. С. 56
Дун Гуан-чан 79
Дун Хуай-юань 284

Е

Егоров В. А. 322 Д
Ейдельман С. Д. (Эйдельман) 366, 367

З

Зерагия П. 365

И

Ибрагимов И. А. 521
Ибрагимов И. И. 114 К
Иванов А. 36 К
Измайлов В. Д. 680
Ин Вен-лин 75
Инфельд Л. 419
Исобэ 453
Исраилов М. И. 81

К

Казакова Р. К. 739
Казимирский П. С. 124
Кандов Л. Т. 321 К
Караниколов Хр. 36 К
Като 453
Киселева Н. А. 40 Д
Коваль П. И. 738
Коган Я. М. 755
Кожеуров П. Я. 622 К
Колибиар М. 169
Кондрашева И. Л. 739
Коренев Б. Г. 390
Королевич А. И. 646
Костомаров Д. П. 298
Котов И. И. 649
Красносельский М. А. 507
Крейн М. Г. 405
Кремнева Ю. П. 122
Кузьминок Г. К. 765
Кулиев А. М. 757
Курепа Б. 54
Кшижанский М. 361

Л

Лабазин В. Г. 121
Лабутин Д. Н. 108
Лага Р. Г. 531
Ладыженская О. А. 52, 328
Ладыженский Л. А. 409
Левин А. А. 503
Летов А. М. 375
Ликова О. Б. 312
Линник Ю. В. 542
Лифшиц Т. М. 856 К
Лопшиц А. М. 56
Лурье А. И. 375
Лу Ци-кэн 285
Любич Ю. И. 406
Люстерник Л. А. 623 К
Лященко Н. Я. 310

М

Мальцев А. И. 179
Манакін Л. О. 302
Маневич В. А. 645
Маслов В. П. 301
Маркус А. С. 480
Мейзлер Д. Г. 560
Мергелян С. Н. 262
Микусинский Я. 323
Милевский Ю. Г. 753
Минь Сы-хао 284
Михельсон В. С. 765
Морен К. 329, 338
Мотяков В. И. 766
Мухин И. С. 790
Мухутдинов Р. Х. 82
Мыцельский Я. 238
Мэммэдов К. Ч. 652 К
Мэммэдов Э. М. 652 К

Н

Наймарк Б. М. 345
Наймарк М. А. 501, 502
Накамура 209
Невский В. А. 23
Немыцкий В. 434 К
Несмеянов А. Н. 1
Нестеров А. Ф. 762
Нечепуренко М. И. 741
Никитин Н. Н. 27
Нилов Г. Н. 107

О

Обувалин М. И. 726
Орлов С. А. 304
Охоцимский Д. Е. 739

П

Панов Д. Ю. 36 К, 857 К
Пенков П. 36 К
Первикова В. Н. 650
Пинскер М. С. 535
Плебанский Г. 419
Погорелов А. В. 719, 723 К, 724
Погосов М. М. 772 К
Позняк Э. Г. 673
Полак А. И. 408
Полищук Е. М. 512
Полозков Д. П. 440 К
Попов Е. П. 374
Постников А. Г. 9
Потапов В. П. 289
Прудников В. Е. 50
Пузыревски В. Ф. 652 К

Р

Рабинович Ю. Л. 268
Рам Ж. де 703 К
Реморов П. Н. 104
Ривкинд Я. И. 177
Рудаев А. К. 655 К
Рутицкий Я. Б. 477, 482

С

Самарский А. А. 401 К
Семененко М. П. 6
Семенцов—Огиевский М. 653 К
Сигалов А. Г. 411
Сімонов М. І. 353
Ситников К. 196
Скворцов В. С. 733, 734
Скворцова М. Г. 241
Склянский А. Л. 373
Скорняков Л. А. 706
Слудская М. 434 К
Смирнов В. Н. 745
Смогоржевский А. С. 632
Соболев В. И. 487
Старков В. М. 657 Д
Степанюк К. Л. 481
Стечкин С. Б. 10
Сушкевич А. К. 113 К
Сюй Ли-чжи 192

Т

Табакс К. К. 731
Такэда 839
Тамакава 97
Тарасов Н. П. 37 К
Тесленко І. Ф. 636
Тихонов А. Н. 401 К
Ткачев М. И. 110, 111, 112
Треногин В. А. 478
Трошин Г. Д. 269
Туманьян Г. Т. 770
Турсунов А. 7

У

Угодчиков А. Г. 403 Д
Улановский М. А. 685
Успенский В. А. 67

Ф

Фаддеев Д. К. 524
Файнштейн С. М. 856 К
Фейгин Л. З. 769
Фихтенгольц Г. М. 52
Фрумкин П. Б. 747

Х

Хазанов М. Б. 109
Хан Хен Гон 190
Хаяси 431
Хигути 465
Ху Хэ-шэн 682

Ц

Цветков Ц. 36 К
Цейтин Г. С. 66
Цзюй Дэ-хан 450
Цзян Цзэ-пей 536

Ч

Черкасов А. 434 К
Чернлев М. П. 661

Чечик Н. О. 856 К
Чжун Тун-дэ 285
Чудаков Н. Г. 159
Чэн Минь-дэ 247, 248
Чэнь Юн-хэ 247, 248

Ш

Шагинян А. Л. 277
Шапиро И. Л. 858 К
Швец М. Н. 106
Шерешевский И. А. 654 К
Ширшов А. И. 164
Шмидт З. 351
Шпраус А. В. 305
Шустеф Ф. М. 22

Э

Эйдельман С. Д. (Ейдельман) 362, 366, 367
Эльсгольц Л. Э. 320 К
Этерман И. И. 726

Ю

Юдин М. И. (ред.) 773 К

Я

Яглом И. М. 615, 707
Якубик Я. 169
Якубович В. А. 299
Янов Ю. И. 70

A

Abhyankar Sh. 662
Abou-Hussein M. S. M. 806
Abramowitz M. 761
Aczél J. 676
Adachi R. 727
Adil Y. 158
Aitchison J. 614 К
Albasiny E. L. 736
Albrecht J. 735
Alexiewicz A. 354
Aljančić S. 240
Amber G. H. 814
Amir-Moéz A. R. 426
Anderson T. W. 607
Andreian Cazacu C. 279
Angelescu Tr. 334
Arens R. 493
Arsove M. G. 252
Artin E. 181 К
Ascoli G. 410
Avakumović V. G. 347, 460
Ayer M. 554
Azpeitia A. G. 46

B

Babuška I. 732
Bader R. 281
Barbilian D. 115 К
Basilewski J. J. 789
Bauer F. L. 752, 758
Bauer F.-W. 195
Bazin A. 613
Beatty S. 155
Beckert H. 332
Bečvář J. 223
Behari R. 679
Belda E. 448 К
Bellman R. 381, 412, 538, 587, 588, 589
Benedicty M. 658
Berghuis J. 776
Bergmann A. 162
Bertran 26
Beth E. W. 73 К
Bhatt S. N. 244, 245
Bhonsle B. R. 467
Białynicki-Birula A. 178
Białynicz S. 38 К
Bieberbach L. 291 К
Bielecki A. 337
Bierens de Haan D. 782 К
Biermann L. 841
Birnbaum Z. W. 574
Blahó M. 386
Blanchard A. 213
Blanuša D. 722
Bloch G. 236
Blum J. R. 530
Boas R. P., Jr 464
Bochner S. 272
Bodiou G. 597
Boiteux M. 594
Bojanić R. 240
Bolie V. W. 800
Bompiani E. 690
Bonferroni C. E. 577
Bononcini V. E. 433 К
Booth A. D. 787
Borel A. 205
Bott R. 214
Bouligand G. 617
Bourbaki N. 516 К
Boyer D. L. 135
Brejcha J. 668
Brelot M. 343
Brenner J. L. 759
Brepson R. 457
Broadbent S. R. 565
Browder F. E. 324, 363, 491
Brown D. R. 835
Brown J. A. C. 614 К
Bruman J. R. 851
Brunelli B. 445 К
Brunk H. D. 554
Bruns R. A. 812
Buckingham R. A. 771 К
Butson A. T. 130

C

Caccioppoli R. 444 К
Calderon A. P. 493
Campanato S. 393, 394
Capel C. E. 193
Capriz G. 396
Cartan H. 206
Cartier P. 139
Castelnuovo G. 625 К
Castoldi L. 569
Cecconi J. 233
Čech E. 14, 670, 671
Čenĕk G. 647
Černák J. 294
Chaki M. C. 681
Chalk J. H. H. 99
Chamfy C. 93
Chanda K. C. 556
Chandrasekharan K. 272, 273
Cheema M. S. 83
Chern S. S. 212
Cherubino S. 651 К
Choquet G. 218
Chu J. T. 557
Churchman C. W. 593 К
Ciorănescu N. 25
Ciucu G. 534
Clavier 26
Clavier P. A. 471
Clunie J. 449
Cohn H. 278
Conrad P. 137
Constantinescu M. 595
Conte L. 618, 633
Conti R. 307
Contour 26
Couty R. 702
Coxeter H. S. M. 132, 656 К, 712
Craig H. V. 695, 696
Cremer H. 828
Crum M. M. 306
Cuesta N. 235
Curtis M. L. 202
Cyffers B. 606

D

Daniels H. E. 551
Dantzig G. B. 581, 584
Darbo G. 422
Davies R. 349
Davis C. 489
Deaux R. 430
Delcourte M. 430
Delerue P. 470 К
Delesalle A. 116 К
Dery M. 468, 469
Descombes R. 92
Dhen W. 808
Diamantides N. D. 801
Diliberto S. P. 316
Di Palo R. 342
Divinsky N. 157
Djerasimović B. 95
Doetsch G. 463
Donoghue W. F., Jr 494
Doss R. 250
Duff G. F. D. 352
Duffin R. J. 308, 582
Durand E. 729

E

Eeden C. van 559, 576
Eichler M. 98
Eilenberg S. 210
Epstein B. 398
Ewing G. M. 554
Ezra J. 333

F

Fabricius—Bjerre Fr. 641
Faragó T. 386
Farinha J. 484
Farmer P. J. 853
Favard J. 674 К
Feldman J. 495
Félix L. 710
Feller W. 522
Fempl S. 436 К
Fernandez Avila F. J. 227
Fernández de Troconiz A. 448 К
Feys R. 63
Ficken F. A. 388
Fiedler M. 754
Finetti B. de 525, 533
Finsler P. 21
Fleming W. H. 232
Flett T. M. 428
Fock V. A. 620
Foguel S. R. 344
Foias C. 356
Ford L. R. 581
Fort M. K., Jr 202
Foster F. G. 549
Fox C. 253
Francis L. 44
Fraser D. A. S. 528
Fréchet M. 608
Freiesleben H.—C. 779
Freudenthal H. 55, 140
Fuchs A. 811
Fujiwara T. 180
Fulkerson D. R. 581, 584

G

Gait J. J. 824, 825
Gale D. 583
Ganea T. 210
Geisser S. 541
Gervaise A. M. 527
Geymonat L. 189
Gheorghiu O. E. 675
Ghermănescu M. 350
Gilbert E. N. 185
Gilbert W. M. 429
Gillert H. 795
Gloden R.-F. 663
Godeaux L. 669
Godfrind P. 855
Godwin H. J. 101
Goffman C. 475
Gołąb S. 639
Goldstine H. H. 740
Gonçalves J. V. 427
Good I. J. 558
Goodstein R. L. 45
González-Fernández J. M. 464
Gould H. W. 117
Gould S. H. 774 К
Graesser R. F. 42
Graffi D. 318
Gravett K. A. H. 131
Gregory R. T. 744
Grotemeyer K.-P. 721
Grothendieck A. 479
Grundy P. M. 552
Grykałowski Z. 783 К
Guggenheimer H. 200
Gumowski I. 462
Günter N. M. 34 К
Günther P. 331
Gupta H. 83
Gupta O. P. 83
Gürsey F. 628
Gussi G. 356

H

Haag J. 368 К
Haimovici A. 29
Hamblen J. W. 529
Hammer P. C. 714
Hammersley J. M. 596
Hartman S. 87
Hasenjaeger G. 60
Hassitt A. 737
Haus F. 819
Havinson S. Ya 266
Havlíček K. 664
Hayes C. A., Jr 183
Hayman W. K. 271
Hellman O. 313
Hermann R. 216
Herold K. 794
Heyting A. 2)
Higuchi I. 570
Hiong King-Lai 264, 275, 276
Hiraga Y. 573
Hiramatu H. 686
Hirzebruch F. 212
Hitchcock A. J. M. 742
Hodges J. H. 129
Hoffman A. J. 166
Hoover W. R. 851
Hornfeck B. 76
Horváth J. 300
Hruban K. 395
Hsu L. C. 192
Hudson R. F. 820
Hunt G. A. 510
Hunter J. 100
Hurd C. C. 854
Hurwitz H., Jr. 746
Hutter E. C. 799

I

Igusa J. 659
Ijzeren J., van 568
Ionescu D. V. 637

J

Jacobs K. 513
Jaeger J. C. 780
Jaffard P. 136
Jakubík J. 170
Jarnik V. 435 К

Jha P. 666
Jowett G. H. 553
Jurek B. 58

K

Kakehashi T. 260
Kalmár L. 68, 69
Kano C. 687
Kaplansky I. 154 К
Kasch F. 77
Kato T. 485
Kawaguchi S. 688
Kegel G. 119
Kendall D. G. 514
Khan N. A. 126, 128
Kimball G. E. 592
Kirschmer G. 133
Klapka J. 667
Klee V. L., Jr 16, 188, 473
Klein M. L. 834
Klein-Barmen F. 146
Klimeš F. 631 К
Knapowski S. 87
Koch R. J. 151
Koehler F. 265
Koizumi S. 242
Kolibiar M. 167
Komatu Y. 601
Koosis P. 315
Koppe E. 414
Korobov N. M. 88
Kosko E. 751
Kosmin R. O. 34 К
Kožešník J. 296
Kraemer E. 624 К
Kreisel G. 62
Kreyszig E. 693
Kron G. 629
Krzywicki A. 383, 384
Krzyżański M. 341, 361
Kuramochi Z. 282, 283

L

Lance G. N. 385
Landau B. V. 425
Larsen H. D. 781 К
Lavoine J. 466
Lazard M. 142
Lebedĕv N. N. 461 К
Lehmann J. 799
Lehner J. 515
Levi E. 600
Levy J. F. 809
Lévy P. 526
Lewis D. J. 105
Lichnerowicz A. 699
Lindberger A. 591
Lions J. L. 327
Loewenfeld K. 838
Lombardo G. 472
Lomnicki Z. A. 517
Longo C. 660
Lorch L. 246
Łoś J. 61
Louhivaara I. S. 326, 483
Loveman B. 810
Ludford G. S. S. 35

M

Machado E. A. 539
McLachlan N. W. 387
McLain D. H. 134
Mac Lusky G. J. R. 816
Mahler K. 254
Mainra V. P. 407
Majó Torrent J. 416
Makabe H. 519
Makar R. H. 261
Ma Min-Yuan 457
Manaresi G. 319
Mandelbrojt S. 273
Mandelstam S. 415
Marcus S. 220, 221, 222, 228
Mardešić S. 199
Mařík J. 229
Marpe D. 832
Marsocci V. A. 813
Martin A. I. 346, 357
Martinez H. M. 807
Marx H. 447 К
Masuyama M. 598, 599
Matsukura K. 756
Matsumoto M. 684
Matsuyama N. 520
Matthews H. 805
Maul M. 859 П
Mauldon J. G. 543
Maurin K. 329, 338
Maurin L. 330
Mazzoni P. 609
Medek V. 720
Medgyessy P. 562
Medkeff R. J. 805
Meyer P. L. 574
Miarka F. 43
Mikusiński J 323, 336, 442 К
Miller G. A. 777
Miller G. F. 458
Miller K. S. 33 К
Mira Fernandes A. de 694
Misès R. de 548
Misonou Y. 496
Mitrinovitch D. S. 335
Mitrovič D. 80
Mlak W. 359, 360
Moldovan E. 421
Molinaro I. 147, 175
Mordell L. J. 102
Moreau-Tauzin 26
Morgan H. C. 834
Morgenthaler G. W. 224
Mori T. 174
Morimura H. 519, 573
Morita K. 197
Morrow C. T. 804
Morse P. M. 829
Morton K. W. 596
Mostert P. S. 144
Mostowski A. 61
Mourier E. 612
Müller G. 640
Muracchini L. 691
Murase I. 160
Murty V. N. 544
Mycielski J. 238
Myers G. H. 803
Myers Wm. M., Jr 231
Myrberg L. 280

N

Nádeník Z. 638
Nagumo M. 339
Nakamura M. 358
Namyet S. 836
Neugebauer C. J. 230, 234
Nevanlinna R. 274
Newell H. E. 630 К
Newman M. 123, 166
Newns W. F. 191
Nicolescu M. 364
Nightingale J. M. 840
Nishimiya H. 601
Nishimura I. 243
Nobuhara T. 688
Novák J. 12
Novák O. 631 К
Nunziante-Cesàro C. 57
Nutter J. C. 825

O

Obalski T. 783 К
O'Beirne T. H. 748
O'Brien J. A. 784
Ogasawara T. 500
Ogilvy C. S. 642
O'Meara O. T. 96
Ono I. 286
Ono T. 138, 711
Onofri L. 433 К
Orlicz W. 354
Osborn H. 586
Osserman R. 263
Ostrom T. G. 709
Ozaki S. 286

P

Palamà G. 74
Pan T. K. 678
Parodi M. 120
Parrish C. E. 24
Pastidès N. 290
Pastori M. 380
Pavel M. 476
Payne L. E. 348
Pelegrin M. J. 826, 827
Pellegrino F. 90
Perfect H. 417
Petersen G. M. 452, 454
Petiau G. 402 К
Pfau E. 831
Pi Calleja P. 257
Pignedoli A. 397
Pin H. 550
Pisot Ch. 182
Placzek G. 775
Pleijel A. 716
Poenaru V. 356
Pogorelow A. W. 723 К
Poitou G. 89
Poli L. 470 К
Pólya G. 348
Pompilj G. 537
Popov B. S. 297
Popovici C. 287
Prasad B. N. 245
Prvanovitch M. 677

Q

Quine W. V. 64

R

Radziszewski K. 717, 718
Rahman A. 778
Rankin B. 821
Rasiowa H. 61, 178
Raszewski (Rašev-skii) P. K. 621, 698 К
Raymond F. H. 830
Reid W. T. 554
Remmert R. 288
Reuter G. E. H. 514
Revuz A. 619
Rham G. de 704 К
Ricci G. 255
Richard U. 438 К
Riesen D. E. 804
Ritchie R. H. 389
Robert P. 28
Roberts J. H. 18
Rohleder H. 65
Rooijen J. P. van 571
Ross P. M. 777
Rossier P. 634, 635
Roth J. P. 749
Ruben H. 567
Rudin M. E. 188
Rudin W. 492
Rutishauser H. 760
Rychlík K. 49

S

Sabidussi G. 186
Saichin A. 420
Sakakura A. Y. 389
Saladini G. 644 К
Samelson K. 758
Sampei Y. 171, 172
Sandham H. F. 459
Sansone G. 103
San Soucie R. L. 165
Sard A. 511
Sargent W. L. C. 451
Sasayama H. 700
Savage I. R. 563
Saworotnow P. P. 497, 498
Schafer R. D. 15, 19
Scherwatow W. G. 439 К
Schmetterer L. 578 К
Schmydt Z. 351
Schulze H. 833
Schützenberger M. P. 148, 149
Schwabe J. 432
Schwartz L. 441 К
Schwartz M.-H. 215
Schwarz Š. 150
Scorza Dragoni G. 219
Scott D. S. 749
Scott D. R. 820
Seal K. C. 546, 547
Sekanina M. 187
Selmer E. S. 764
Sen R. N. 616
Senft W. von 708
Seng You Poh 610
Serre J.-P. 212
Shapiro J. M. 532
Shibata T. 400
Shields A. L. 144
Shipman J. S. 763
Sieker K.-H. 627
Sierpiński W. 237, 418
Sikkema P. C. 270
Silverman E. 554
Silvey S. D. 564
Simoda S. 340
Singal M. K. 679
Skolem Th. 59
Smale S. 201
Smith R. C. T. 455
Sofonea T. 605
Spain B. 626 К
Speranza F. 689
Standish C. 540
Stegun I. A. 761
Stein S. 561
Stein S. K. 153
Steinfeld O. 163
Štěpánek J. 256
Stern R. K. 798
Steyn H. S. 545
Stoilow S. 217
Storer J. E. 561
Straus E. G. 166
Strother W. L. 193
Sugurí T. 701
Šulka R. 152
Sunouchi H. 499
Sunyer Balaguer F. 267
Süss W. 715
Szász G. 173
Szmydt Z. 351

T

Takahashi S. 520
Tamari D. 71
Tamura T. 143
Tanaka C. 258, 259
Tanaka S. 424
Taussky O. 123, 166, 485
Teicher H. 518
Teichroew D. 549
Teleman C. 683
Teodorescu N. 382
Thierrin G. 161
Thompson G. L. 579
Thompson W. A., Jr 572
Tomić M. 240
Tondl A. 378, 379
Torrens-Ibern J. 555
Toscano L. 456
Toulmin S. 72
Townsend B. B. 697
Triteanu O. 595
Truesdell C. 251

U

Ueno S. 701
Umezawa T. 286
Usai G. 602

V

Vallée R. 603, 604
Vance A. W. 719
Van der Waerden B. L. 94

Vázquez García R. 203
Vekua I. N. 11
Vernić E. 13
Veselý F. 48
Viola T. 239
Vodička V. 391
Vogel W. 566
Vorel Z. 377
Vos J. de 817
Vrănceanu G. 692
Vyčichlo F. 631 K

W

Wada H. 198
Wadlin M. L. 799
Walfisz A. Z. 85
Walker M. J. 125
Warner S. 474
Watanabe H. 573
Watanabe Y. 358
Watari C. 225
Ważewski T. 325
Webb J. 750
Webster M. S. 293
Wedel J. J. 851
Wecken Fr. 767
Weinberger H. F. 348
Whitesitt J. E. 156
Williams F. K. 834
Williams N. 585
Wilson I. 815
Wing G. M. 381, 515
Wintner A. 295, 665
Wirsing E. 76
Wittich H. 292 K, 303
Wolf F. 490
Wolff P. de 575
Wolk E. S. 176
Woods A. C. 91
Wright E. M. 78
Wu Wen-tsün 204, 207, 208

Y

Yamada M. 145
Yamamoto K. 86
Yoshimatsu S. 404
Yoshinaga K. 500
Young L. C. 232
Youngs J. W. T. 17
Younker E. L. 793
Yourgrau W. 415

Z

Zachrisson L. E. 317
Zaremba S. K. 517
Zemanek H. 842
Zieliński K. 38 K
Zmigrodzka W. 783 K
Zweifel P. F. 746

中村得之 209
加藤信義 453
徐利治 192
林嘉男 431
樋口伊佐夫 465
武田楠雄 839
玉河恒夫 97
磯部豊作 453
程民德 247, 248
胡和生 682
董懷允 284
董光昌 78
鍾同德 285
関嗣鶴 284
陳永和 247, 248
陸啓 285
鞠德航 450

Технический редактор *Р. М. Денисова*